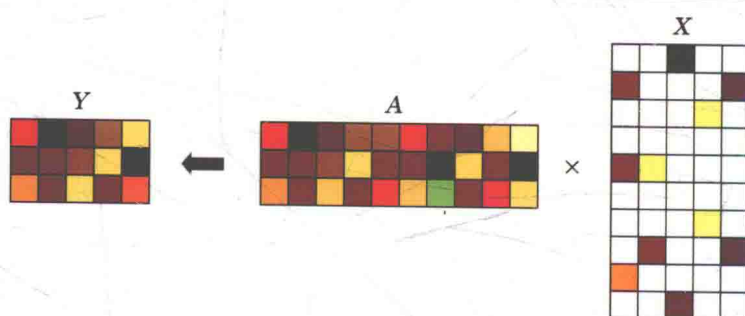


稀疏表示方法 导论

Introduction to
Sparse Representation
Method

栾悉道 王卫威 谢毓湘 朱培栋 著

Introduction to Sparse Representation Method



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

稀疏表示方法导论

Introduction to Sparse Representation Method

栾悉道 王卫威 谢毓湘 朱培栋 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

稀疏表示是信号处理领域的一个重要研究问题。本书共分7章对稀疏表示问题进行介绍。第1章讲述稀疏表示的思想以及产生的原因；第2章主要介绍稀疏表示模型；第3章主要介绍稀疏表示模型的求解方法；第4章主要介绍稀疏表示模型的求解性能；第5章主要介绍稀疏表示模型的参数选择方法；第6章主要介绍字典设计与学习方法；第7章主要介绍稀疏表示的应用与未来发展。

本书有助于计算机科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程等学科领域的读者全面了解稀疏表示问题，适用于相关领域的普通高校研究生、研究员、工程技术人员学习和参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

稀疏表示方法导论 / 栾悉道等著. — 北京: 电子工业出版社, 2017.8

ISBN 978-7-121-32489-5

I. ①稀… II. ①栾… III. ①稀疏矩阵—应用—信号处理 IV. ①TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第196111号

策划编辑: 马 岚

责任编辑: 马 岚 文字编辑: 葛卉婷

印 刷: 北京京师印务有限公司

装 订: 北京京师印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 9.75 字数: 231千字

版 次: 2017年8月第1版

印 次: 2017年8月第1次印刷

定 价: 49.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: classic-series-info@phei.com.cn。

前 言

稀疏表示是 20 世纪 90 年代以来信号处理领域快速发展的一个研究方向,因其在图像处理、语音处理等方面取得了很好的应用效果,所以获得了广泛的关注。经过二十多年的发展,稀疏表示虽然仍存在若干问题尚待深入解决,但相关的研究与应用已趋于稳定与成熟,因此,有必要对稀疏表示的相关工作进行梳理和总结。

稀疏表示的目标,是要从有限的低维观测数据中对未知的高维待估向量进行求解,得到其高精度的估计值。严格来说,稀疏表示并非新颖的研究课题,其“稀疏”核心思想与统计建模中的“节省性”原则非常相似,因此本书在信号处理领域与统计建模领域都对稀疏表示问题进行了深入研究。稀疏表示能够引起研究人员广泛兴趣的原因,在于以下几个方面:一是常见的自然信号多符合稀疏性质;二是稀疏性表现形式非常简洁,且具有明确的数学意义,求解算法易设计,可利用线性规划等方法进行求解,求解工具箱也易获得;三是稀疏表示模型的求解性能可从理论上进行分析,得到不同条件下的性能边界,存在理论支撑;四是人们关心的如图像复原、语音识别等现实问题,稀疏表示模型均有较好的处理效果;五是稀疏表示与压缩感知、深度学习等研究课题有着千丝万缕的关系,彼此间相互渗透。

考虑到稀疏表示的理论与现实意义,以及现阶段的研究现状,我和另外三位作者共同编写了本书,对稀疏表示的若干问题,包括稀疏表示模型与分析、稀疏表示模型求解方法、稀疏表示模型性能分析、模型参数选择方法、字典设计与学习方法等问题进行了重点介绍。其中,本书的第 1 章至第 4 章由栾悉道和王卫威编写;第 5 章至第 7 章由谢毓湘和朱培栋编写。

稀疏表示本身涵盖的内容较广,又与其他相关学科有着密切的联系,经过研究人员的不懈努力,在此领域形成了丰富的研究成果。作者在撰写过程中,融合了自己多年的研究基础,并参考了很多学者的研究成果,限于篇幅,不能一一介绍,在此表示诚挚的感谢!

由于作者学识有限,在撰写过程中难免存在疏漏与错误之处,敬请谅解。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 稀疏性的几个例子	1
1.1.1 帕累托原理	1
1.1.2 组合测试	1
1.1.3 神经影像分析	2
1.2 稀疏表示的思想与产生	2
1.2.1 稀疏性思想	2
1.2.2 稀疏表示的产生	2
1.3 相关概念	4
1.3.1 稀疏表示的相关概念	4
1.3.2 基与超完备字典	5
1.3.3 与其他方法的联系	5
1.4 稀疏表示的发展	6
1.4.1 重要的时间进展	6
1.4.2 进展情况总结	7
1.5 符号表示说明	8
参考文献	8
第 2 章 稀疏表示模型与分析	10
2.1 线性方程与稀疏表示	10
2.2 稀疏性概念	11
2.2.1 稀疏与稀疏度	11
2.2.2 严格稀疏与近似稀疏	12
2.2.3 绝对稀疏与相对稀疏	12
2.3 稀疏性度量函数	13
2.3.1 范数的定义与性质	13
2.3.2 l_p 范数类测度函数	13
2.3.3 对数类测度函数	15
2.4 稀疏表示模型构造	15
2.4.1 l_0 范数表示模型	16
2.4.2 l_1 范数表示模型	16
2.4.3 l_p 范数表示模型	17
2.4.4 加权范数表示模型	18
2.5 稀疏表示模型的解释	18

2.5.1	稀疏表示的 MAP 解释	18
2.5.2	稀疏表示的几何解释	19
2.6	稀疏表示模型分析	20
2.6.1	稀疏表示模型求解的难点	20
2.6.2	偏差与方差的矛盾	21
2.6.3	模型与病态逆问题的关系	24
2.6.4	全局最小值点分析	24
2.7	综合模型与分析模型	26
2.8	构造稀疏表示模型的一个例子	27
	参考文献	28
第 3 章	稀疏表示模型求解方法	30
3.1	求解方法概述	30
3.2	l_0 范数最小化求解方法	31
3.2.1	硬阈值方法	31
3.2.2	贪婪类算法	32
3.2.3	平滑 l_0 范数方法	36
3.3	l_1 范数最小化求解方法	38
3.3.1	软阈值方法	38
3.3.2	基追踪求解方法	38
3.3.3	LARS 方法	40
3.3.4	Shrinkage 方法	41
3.3.5	Dantzig Selector	42
3.4	l_p ($0 < p < 1$) 范数最小化求解方法	43
3.4.1	迭代重加权方法	44
3.4.2	半阈值方法	45
3.4.3	正交情况下的阈值方法	46
3.5	其他方法	53
3.5.1	贝叶斯学习方法	53
3.5.2	Message Passing 方法	53
	参考文献	54
第 4 章	稀疏表示模型性能分析	58
4.1	基本概念	58
4.1.1	字典的性质描述	58
4.1.2	受限等距属性	59
4.2	稀疏解唯一性分析	60
4.2.1	测不准原理	60
4.2.2	正交基情况	60
4.2.3	任意字典情况	61

4.3	P_0 与 P_1 问题的等价性	62
4.3.1	互相干性判别框架	62
4.3.2	RIP 判别框架	63
4.4	稀疏解复原性能分析	64
4.4.1	复原类型	64
4.4.2	无噪情况下的复原性能	64
4.4.3	含噪情况下的复原性能	65
4.4.4	渐进复原条件分析	71
4.4.5	渐进最小总方差分析	73
	参考文献	75
第5章	模型参数选择方法	79
5.1	常用准则	79
5.1.1	模型选择准则	79
5.1.2	L 曲线准则	80
5.1.3	交叉验证准则	80
5.1.4	其他准则	80
5.2	最小均方误差 (MMSE) 准则	80
5.2.1	均方误差计算	81
5.2.2	求解最小均方误差	81
5.2.3	自适应求解过程	83
5.2.4	仿真实验结果	83
5.3	MMSE 准则在多幅图像超分辨重构中的应用	84
5.3.1	模型构造	84
5.3.2	迭代求解方法	85
5.3.3	实验结果	86
5.4	酉矩阵情况下的模型直接求解方法	92
5.4.1	问题描述	92
5.4.2	迭代解的解析表达式分析	92
5.4.3	模型参数的确定与求解	94
5.5	广义岭估计的直接解法与稀疏性分析	97
5.5.1	复数域广义岭估计的快速解法	97
5.5.2	数值仿真实验	102
5.5.3	SAR 图像重构应用分析	104
5.6	MMSE 准则的局限性分析	106
	参考文献	107
第6章	字典设计与学习方法	108
6.1	概述	108
6.2	常用的参数化字典	108

6.2.1	DCT 字典	109
6.2.2	离散傅里叶字典	110
6.3	数据驱动字典学习方法	118
6.3.1	最小二乘方法	119
6.3.2	MOD 方法	119
6.3.3	K-SVD 类方法	120
6.3.4	统计方法	122
6.3.5	其他方法	122
6.4	任务驱动字典学习方法	123
6.4.1	基本概念与模型	123
6.4.2	求解算法	123
6.5	在线字典学习方法	124
6.5.1	算法描述	124
6.5.2	应用分析	125
6.6	字典设计与学习待解决问题	127
6.6.1	模型方法与数据方法相结合	128
6.6.2	自适应确定原子数目	128
6.6.3	字典学习的理论问题	128
6.6.4	应用分析	129
	参考文献	129
第 7 章	稀疏表示的应用与展望	132
7.1	稀疏表示的应用概述	132
7.2	稀疏表示的主要应用	133
7.2.1	模式识别	133
7.2.2	图像去噪与重构	135
7.2.3	图像压缩	138
7.2.4	压缩感知	138
7.3	稀疏表示的局限性	139
7.3.1	稀疏表示模型较为固化	139
7.3.2	模型超参数的难以自适应获取	139
7.3.3	稀疏表示模型求解存在不确定性	139
7.4	稀疏表示的发展	140
7.4.1	先验信息挖掘与利用	140
7.4.2	多观测向量问题	141
7.4.3	非线性稀疏表示问题	141
7.4.4	目标导向的稀疏表示模型与最优参数选择	143
	参考文献	144

第1章 绪 论

奥卡姆剃刀定律 (Occam's Razor) 由 14 世纪逻辑学家奥卡姆的威廉提出。这个原理可表述为“如无必要, 勿增实体”, 即“简单有效原理”。在参数建模领域, 一个好的模型, 除最大限度地准确挖掘并提取测量数据中的信息之外, 还应具有较为简单的形式, 即模型的待估参数较少, 具有稀疏性或节省性, 选择关键的参数对数据进行建模。稀疏表示, 是节省性原则在现代统计学、机器学习与信号处理领域的特殊体现。在信号处理领域, 由于观测成本或其他方面的限制, 需要从数量较少的观测中对未观测高维信号进行精确表示或复原。当仅有少量变量为真正重要的变量时, 真实解可以很好地由稀疏向量来近似。或者说, 如果信号是稀疏的, 或具有某种恰当的结构, 则可以在表示方面具有可利用的特性。信号稀疏表示是过去近二十年信号处理领域的热门研究问题, 成为了高维信号表示与压缩等应用的有利工具, 其目的是在线性系统中, 在给定 (含噪) 观测信号的情况下, 通过给定或待定的超完备字典, 用尽可能少的原子来表示信号, 或利用稀疏变量来表示 (含噪) 观测信号, 从而可以方便地进行信号的压缩、去噪、复原与重构、分类等处理。信号稀疏表示的主要研究内容包括稀疏表示模型建模、模型求解方法、稀疏表示性能分析、模型参数选择、超完备字典设计以及稀疏表示应用等几个方面。

1.1 稀疏性的几个例子

如何从有限的观测中推断未被观测到的信号或特征, 同时, 这些信号或特征中起主要作用或处于主要地位的部分所占比例又非常小, 这样的问题广泛出现在日常生活和研究工作中。

1.1.1 帕累托原理

帕累托原理, 又称 80/20 原理、最省力原则、不平衡原则等, 由意大利经济学家维弗雷多·帕累托于 1897 年提出。最初表述为, 国家财富的 80% 掌握在 20% 的人手中, 即“关键的少数和次要的多数”的关系, 这里的“20%”相对全体人群来讲地位很重要, 但数量较少, 具有稀疏性。其借鉴意义为, 在工作、生活中学会抓住关键的少数; 在分析问题中, 抓住关键因素。

1.1.2 组合测试

稀疏信号复原问题的描述可追溯到 1943 年用于组合测试问题, 或可能更早。当时需要设计一个高效的测试方案, 从大量的血液样本中识别出人数相对较少的感染者。在——检测成本较高的情况下, 对受试者进行分组, 将每组的血液样本进行组合测试, 目标是用最少的检测次数识别出较少的患病者。

此外, 在软件工程领域, 组合测试是一种有效的测试用例生成技术, 可用于软件测试

或计算机网络故障诊断中。文献[1, 2]中提到, 在软件的功能测试中, 可以通过检查系统参数的所有取值组合来进行充分的测试。对于一般的被测系统而言, 这个组合数是一个庞大的数字。根据观察, 对于很多应用程序来说, 很多错误是由少数几个参数的相互作用导致的。

1.1.3 神经影像分析

利用大脑影像数据, 如 fMRI, 可以用来预测人的心理状态。这里的心理状态可以是理性的, 如阅读一句话等; 也可以是开心、焦虑等感性的。在实验中, 安排受试者执行一项特定的任务, 记录受试者的 BOLD (Blood Oxygen Level Dependent, 血氧水平依赖) 信号, 该信号反映整个大脑中神经活动的变化。给定 fMRI 数据集, 以及对应的任务序列, 将预测任务构造为一个线性回归问题。在影像分析中, 需要找到与给定任务或心理状态最为相关的大脑区域。这样的区域占整个大脑的比例一般是比较小的, 构成了稀疏性。

1.2 稀疏表示的思想与产生

1.2.1 稀疏性思想

首先来看信号表示、信号变换的概念。信号表示是指通过函数解析表达式或图形化方法对信号进行展现与描述, 信号变换是指出于分析与利用的目的, 将信号从一种形式变换到另一种不同的形式, 或者从一个域变换到另一个域, 如信号的傅里叶变换、拉普拉斯变换与 z 变换等。信号在自身域或变换域数据量可能非常大, 为便于表示、应用与分析, 需要对信号进行压缩等处理去除冗余, 去掉的冗余信息是指对信号表述来说无关、重复或不重要的。在该过程中, 我们需要找到对信号表示起关键作用的成分。

如果信号是稀疏的, 那么信号是可以压缩的。如果信号本身非稀疏, 而在某变换域上的表示是稀疏的, 那么我们也可以利用该性质。自然界很多信号主要成分在低频上, 高频上的多为噪声。一般情况下, 对信号进行变换, 信号的主要成分或重要稀疏主要对应低频的基, 对应高频的部分接近 0。幸运的是, 许多自然信号, 如图像信号和音频信号, 可以进行稀疏表示。例如, 在疾病的诊断中, 虽然人类有大量的基因, 但是仅有少量的基因对某种疾病有作用。视觉皮层复杂刺激的表达采用的即是稀疏编码原则。

图 1.1 给出了不含噪情况下稀疏表示的模型示意图。假设观测信号 y 由字典 D 与向量 x 表示, 即 $y = Dx$ 。由于 x 中的元素较多, 需要找到最能通过 D 来表示 y 的重要元素, 即图中重点标注的部分。图中同时也重点标注了与这些成分对应的 D 中的列。

1.2.2 稀疏表示的产生

稀疏表示的产生起源于两个方面:

(1) 信号处理领域的信号表示需要。

稀疏表示或冗余表示模型建立在信号冗余变换的基础上^[3]。20 世纪 90 年代, 开始进行病态反卷积问题中 l_1 惩罚的理论研究工作, 出现了新的信号处理问题, 即超完备信号表示, 用两个不同的基集合来表示信号, 该思想在 20 世纪 90 年代早期出现在计算调和与分析

领域。一般采用正交基来有效地表示目标^[4]，这里的“有效”是指仅需要较少的重要系数。在信号分析领域，经常考虑在一些变换域进行处理，如小波或傅里叶域中，通常感兴趣的信号为稀疏的。这些基各有其应用范围，那么自然而然地会设想进行组合信号表示，即从几种不同的基中选择几项组成基集合。既然可以利用一组基来表示任意信号，那么可以利用两组基来构成欠定方程，是否可以得到更好的表示结果？很多信号由多个不同的现象混合构成，没有一个单一的变换能够很好地描述这些信号。假如一个目标由两种现象重叠而成，例如，其中一项可以有效地由基 1 表示，另外一项可以有效地由基 2 表示，那么由这两组基组合也许可以有效地表示该目标。因此，出现了利用多个变换混合来表示信号的方法，即超完备信号稀疏表示。稀疏表示具有如下优点^[5]：一是捕捉数据结构时的灵活性，用更多一般化的基集合来表示特定的信号，形成更紧致的表示，因为每一个基函数可以描述数据中的一个较重要的结构；二是超完备表示增加了表示的稳定性，对信号中的小的扰动不敏感。

(2) 统计分析领域的参数估计需要。

在科学或工程问题中，当方程数量小于未知（待估）参数数量时，构成欠定方程（Under-determined Equation）。对于欠定方程来说，若无额外信息，则不可能得到正确的候选解，从而形成了病态逆问题^[6]。常用于求解线性方程的普通最小二乘（Ordinary Least Squares, OLS）不能令人满意的原因在于^[7]：一是预测精度（Prediction Accuracy），OLS 一般具有低偏差、高方差，预测精度有时可以通过将某些系数收缩或设为 0 来改进，牺牲偏差但降低了预测值的方差；二是解译性（Interpretation），在大量的预测值中，希望得到具备最强影响力的较小子集。存在两个标准的技术用于改进 OLS 估计——子集选择和岭回归，但都存在不足^[7]。子集选择为离散过程，提供了可解译的模型，但数据的较小变化导致模型的较大变化，并降低了预测精度；岭回归为连续过程，对系数进行压缩，比较稳定，但不能将任何系数设置为 0，因此不能得到易解译的模型。为此，可利用稀疏先验信息构成正则化模型进行求解。理论表明：在待估参数较为稀疏的情况下，稀疏表示方法能够从较少的观测中严格复原未知参数。稀疏信号复原背后的关键性假定为^[8]：观测信号可以写为由给定字典中的若干原子组成的线性组合形式。这与参数建模中的加法模型极为相似。

稀疏表示模型示意图如图 1.1 所示。

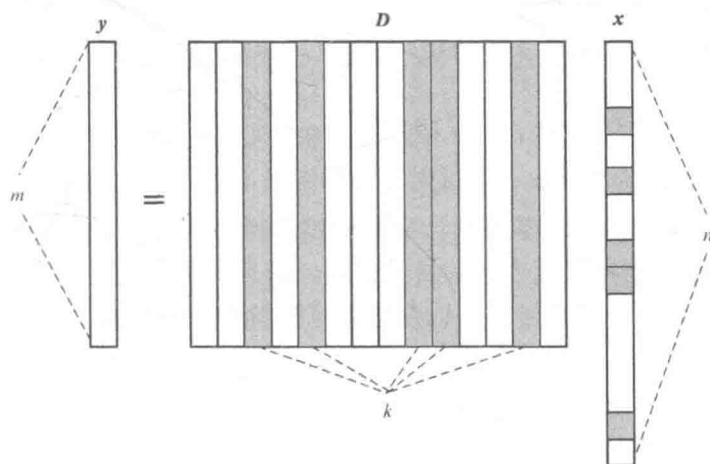


图 1.1 稀疏表示模型示意图

1.3 相关概念

1.3.1 稀疏表示的相关概念

稀疏表示与统计分析中的节省性建模非常相似, 因此, 这里将涉及的主要概念介绍如下。

(1) 基选择与原子分解。

稀疏表示^[3]是指通过选择向量的超完备集合(称为字典或冗余基)将信号分解为数量较少的若干分量的技术。相应地, 稀疏信号是指可以用几种相对较少的基元素或超完备字典表示为线性组合的信号^[9]。

相似的概念为基选择(Basis Selection)^[10, 11]。基向量的最小生成集(Minimal Spanning Set)通常对于有效表示一小类信号来说是足够的, 然而通过恰当选择冗余基向量的集合构成超完备字典可以紧致表示更广范围的信号。选择这些恰当的冗余基向量, 称为基选择(Basis Selection)问题。基选择(子集选择)问题的研究可以追溯到统计文献中的最优回归^[12]。

原子分解(Atomic Decomposition)^[13]是指, 给定信号向量 $\mathbf{y}$, 寻找最稀疏向量 $\mathbf{x}$, 使得 $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 这个过程称为原子分解。其中, $\mathbf{D}$ 并没有限制是否完备, 以及是欠完备还是超完备。问题的重点是利用尽可能少的原子进行信号分解。

(2) 稀疏复原与稀疏编码。

稀疏复原(Sparse Recovery)或稀疏近似表示(Sparse Approximate Representation), 是指含噪情况下的稀疏表示过程。稀疏复原是指基于 m 个含噪的观测集合, 估计 n 维但为 k 稀疏的向量 $\mathbf{x}$ ^[14]。稀疏复原产生于回归中的子集选择、图模型选择(Graphical Model Selection)等。

稀疏编码(Sparse Coding)是指将数据向量建模为基元素的稀疏线性组合。将已知 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{x}$ 计算 $\mathbf{y}$ 的过程称为编码(Encoding); 将从 $\mathbf{y}$ 求解 $\mathbf{x}$ 的过程称为解码(Decoding)^[15]。

(3) 稀疏表示与参数建模。

文献[16]研究了稀疏表示与参数建模之间的关系。对于参数建模来说,

$$y_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m f(t_n, \theta_m) + w_n, \quad n=1, 2, \dots, N$$

其目标是要确定模型阶 M , $\Theta = \{\theta_m\}_{m=1}^M$, $\alpha = \{\alpha_m\}_{m=1}^M$ 。在稀疏重构中, 观测向量 $\mathbf{y}$ 建模为 $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{w}$, 目标为重构 $\mathbf{x}$ 。通过对 θ 采样网格上进行采样构造矩阵 $\mathbf{D}$, 将参数建模与稀疏重构联系起来。那么, 参数估计可以通过选择稀疏向量 $\mathbf{x}$ 中非零元素对应的 $\mathbf{D}$ 中的列来近似表示 M , 这与稀疏表示的目的相同。古典的参数估计问题将 α 、 Θ 看作待估计的连续参数。当模型阶已知时, 可以直接计算模型参数的最大似然估计:

$$\{\hat{\alpha}_{ml}, \hat{\Theta}_{ml}\} = \arg \min_{\alpha, \Theta} \ln p(\mathbf{y}; \alpha, \Theta)$$

这也就意味着模型参数估计中, α 、 Θ 均为待估参数。但是, 对于很多模型建模问题, 模型阶 M 是未知的, 必须利用古典的信息准则方法, 如AIC、BIC与GIC等估计得到。

1.3.2 基与超完备字典

完备通常是指该对象不需要添加任何其他元素。一个空间被称为是“完备的”，是指该空间任何 ξ 数列均一致收敛，且该极限包含于该空间中。一个拓扑向量空间 V 的子集 S 的集合称为完备的，是指该 S 的扩张在 V 中是稠密的。一个测度空间是完备的，是指该空间任何零集合的任何子集都是可测的。

假定在 N 维复向量空间 W 中的含有 $M \geq N$ 个非零信号的集合 F ，可以张成 W ，那么称 F 为帧(Frame)或字典^[17]。字典的列向量称为原子。如果字典 D 的原子恰能张成 n 维欧氏空间，则称字典 D 为完备的。如果 D 的列数大于行数，则 D 是冗余的，若仍能张成 n 维欧氏空间，则 D 是超完备的。

1.3.3 与其他方法的联系

(1) 稀疏表示与主成分分析。

主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)，是多元统计分析中一种常用的降维方法，是由卡尔·皮尔森提出来的，其通过正交变换将一组可能存在相关性的变量转换为一组线性无关的变量，转换后的变量称为主成分。该方法研究的出发点在于，通常变量之间具有一定的相关性。当变量具有相关性时，一般认为变量反映的信息具有重叠性。当变量数目较多时会增加问题分析的难度，从而希望变量个数较少的同时得到的信息也较多。另一个与PCA相关的方法，称为独立分量分析(Independent Component Analysis, ICA)，可以从具有非高斯分布的数据中学习非正交基，该方法在混合音频信号的盲源分离应用、EEG信号的分解、fMRI数据的分析等应用中非常有效。PCA主要用于数据压缩与特征降维；ICA基于独立性准则对样本进行学习获得非正交基，主要用于盲源分离。PCA寻找投影后保留原信息量的投影方向；ICA寻找投影后变量之间相互独立的投影方向。

可以说，稀疏表示与PCA、ICA的目的大体上是相似的，均要找出能够表示数据主要特征的变量，而且变量的数量尽可能少。但是，在模型表现与求解方法，以及对变量的具体要求上有所不同。在PCA与ICA中，基向量的数目等价于输入数据的数目。因为这些基张成输入空间，所以它们是完备的，且对于数据表示来说是充分的。但是，该表示是有限的。而且，这两种方法均未明确地利用稀疏先验。不过，两类方法可以结合起来，如稀疏性与主成分分析结合，衍生出稀疏主成分分析方法^[18]。

(2) 稀疏表示与模型选择。

在对数据进行建模时，存在多个变量可以选择，选择不同的变量可以构成不同的模型。如何对这些变量进行恰当的选择，从而得到合适的模型，对数据或问题进行准确的描述，就构成了模型选择问题。模型选择多见于统计建模领域。

模型选择算法，如所有子集选择(All Subsets)回归、前向选择与后向消除等的目的是基于数据选择线性模型^[19]，在该过程中，希望选择节省集合来预测响应变量。对于模型选择来说，优度(Goodness)经常用来评估预测精度，但节省性(Parsimony)是另一个重要准则。信号处理的参数化方法(基于模型的方法)不仅需要估计参数，也需要对确

定模型的参数进行选择^[20], 如模型的阶。文献[20, 21]从信息准则角度对相应的定阶方法进行了总结。

与稀疏线性回归相联系的变量选择 (Variable Selection) 是压缩采样领域的基础^[22]。变量选择是与模型定阶问题紧密联系的复杂的组合问题。对于线性模型来说, 稀疏表示的一个结果就是确定模型的阶, 只是要求模型的阶较低。文献[16]论证了稀疏表示可以用于求解模型阶选择与参数估计问题。该文献提出了一种方法用于选择稀疏参数, 使得稀疏表示可以模拟经典的阶选择方法, 如 AIC、BIC 等。实验表明, 稀疏线性建模比传统的基于模型的参数/阶估计方法更好。

(3) 稀疏表示与正则化。

在线性代数理论中, 由于线性方程的条件数较大, 导致产生了不适定的反问题。用一组与原不适定问题相“接近”的适定问题的解来逼近原问题的解, 称为正则化方法。在形式上, 一般在原问题上施加约束条件, 构成正则化模型。通常, 约束条件与解的先验知识有关。常用的正则化方法有 Tikhonov 正则化等。

稀疏表示的基础是线性模型或方程, 而且方程一般为欠定的。为缩小解空间, 或得到稀疏解, 一般施加稀疏先验约束, 从而构成具有优化目标与约束函数的优化模型, 该模型表现为正则化模型形式, 从而可以利用相关的正则化求解方法或优化方法进行求解。

1.4 稀疏表示的发展

1.4.1 重要的时间进展

1959 年, Hubel 等研究猫的简单细胞感受野, 发现位于主观视觉皮层 V1 区的细胞能够对视觉信息进行稀疏表示^[23], 从此稀疏性研究引起了学者们的关注。哺乳动物感知视觉信息时, 其大脑视觉皮层中只有少量神经元处于激活状态, 即视觉信息可以用少量的神经元进行稀疏表示。

1993 年, Mallat 提出了字典的概念, 并阐述了超完备字典的概念, 同时提出匹配追踪 (Matching Pursuit, MP) 方法, 开启了求解稀疏表示结果的算法研究领域。之后, Pati 等提出了 OMP 方法, 相比 MP 算法收敛速度更快, 从而形成了贪婪类追踪算法的主要内容。

1995 年, Donho 与 Chen 提出了基追踪 (Basis Pursuit, BP) 方法, 之后研究认为 BP 问题可以转化为线性规划问题, 可利用现有高效、成熟的方法进行求解。

1999 年, Engan 提出最优方向 MOD 方法, 字典更新方式简单, 但收敛速度较慢; 2006 年, Elad 提出了 K-SVD 方法, 相比 MOD 方法, 收敛速度提高, 但在图像处理中, 受噪声影响会丢失部分细节, 产生模糊的效果。

2004 年, Donoho 证明了, 如果字典满足某种条件, 那么 l_0 范数优化问题具有唯一解。2006 年, Tao 与 Candes 证明了在 RIP 条件下, l_0 范数最小化与 l_1 范数最小化问题等价。

1.4.2 进展情况总结

以色列理工学院教授 Elad^[3]于 2012 年对稀疏与冗余表示的发展做了详细的总结,认为 21 世纪初的 10 年是稀疏与冗余表示的时代。1980 年到 2000 年稀疏表示模型得到广泛关注,小波与框架理论为之做了很大贡献,大量的工作开始于 20 世纪 90 年代中期,标志着稀疏表示作为独立研究的诞生。图 1.2 为 Elad 教授对 1993 年到 2012 年稀疏表示有关论文的统计情况。里程碑式的工作为 Donoho 与 Huo 于 2001 年发表的论文^[4],第一次建立了稀疏变换与 l_1 范数测度之间的理论联系(实际上,Donoho 在文献[24]中提到将稀疏性与 l_1 范数联系在一起的工作是在 20 世纪 70 年代后期的地震探测中^[25]),引发了人们研究的兴趣。稀疏表示能够得到广泛应用的原因归结为三个方面:通用性(Universality)、理论性(Theory)以及实用性(Practicality)^[3]。Elad 教授提出了 3 方面共计 10 个该领域的研究方向^[3],见表 1.1。

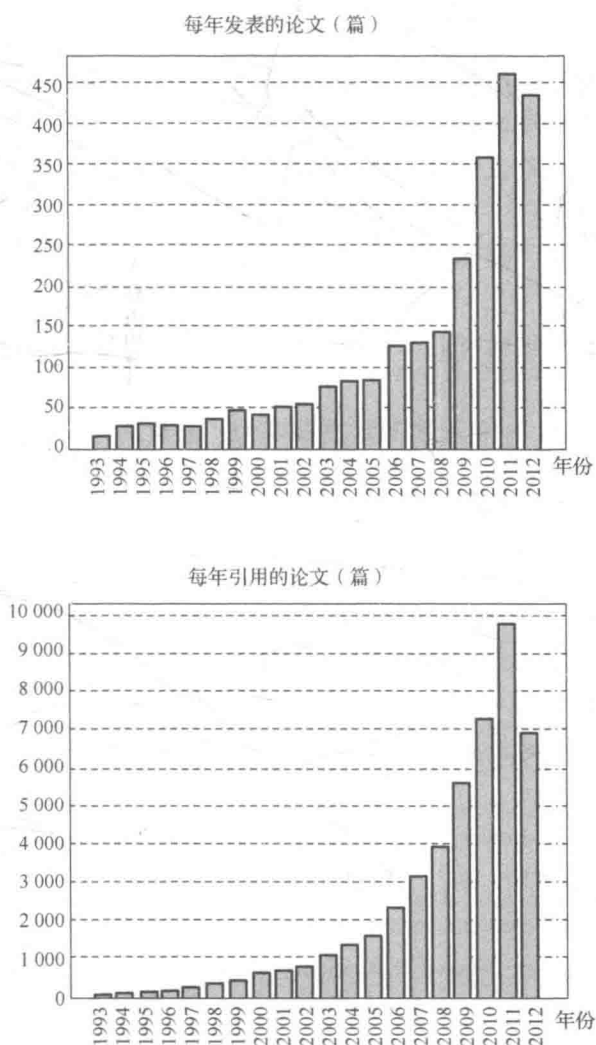


图 1.2 1993 年到 2012 年 9 月关于信号稀疏表示的论文统计情况

表 1.1 文献[3]总结的稀疏表示研究发展方向

序号	领域	研究方向
1	理论前沿 (Theoretical Frontiers)	更准确的边界条件
2		面向一般字典
3		字典学习理论
4		稀疏测度的统一理论
5	模型改进 (Model Improvement)	引入向量结构信息
6		构造结构字典
7		Co-Sparse 模型
8		考虑模型误差
9	应用研究 (Applications Research)	计算机图形学
10		非传统信号处理

1.5 符号表示说明

在后续内容中,为清晰介绍稀疏表示理论的相关内容,需要利用数学模型以及数学符号进行描述。这里,对相关的符号进行简要说明:

(1) 用黑斜体表示矩阵或向量,如 $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ 。其中,小写的黑斜体变量表示向量;大写的黑斜体变量表示矩阵。

(2) 用斜体表示标量,如 a 、 b 等。向量中的元素也用斜体来表示,如 x_i 表示向量 $\mathbf{x}$ 中的第 i 个元素。

(3) 上标 (i) 表示迭代求解过程中的第 i 次迭代,如 $\mathbf{x}^{(i)}$; 上标 T、H 分别表示矩阵或向量的转置与共轭转置。

(4) 常用的表示变量: $\mathbf{y}$ 表示观测数据或信号; $\mathbf{x}$ 表示稀疏向量; $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示字典; $\mathbf{w}$ 表示噪声; $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵; ε 表示较小正常数。

参考文献

- [1] 陈翔, 顾庆, 王新平, 等. 组合测试研究进展[J]. 计算机科学, 2010, 37(3): 5.
- [2] 严峻, 张健. 组合测试: 原理与方法[J]. 软件学报, 2009, 20(6): 13.
- [3] Elad M. Sparse and Redundant Representation Modeling-What Next?[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(2): 7.
- [4] L. Donoho D., Huo X. Uncertainty Principles and Ideal Atomic Decomposition[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(7): 18.
- [5] M. Lewicki, T. J. Sejnowski. Learning Overcomplete Representations[J]. Neural Computation, 2000, 12(29): 29.
- [6] I. Daubechies, M. Defrise. An Iterative Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems with a Sparsity Constraint[J]. Commun. Pure Appl. Math., 2004, 57: 45.
- [7] Tibshirani R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso[J]. Journal of Royal Statistical Society: Series B, 1996, 58(1): 22.

- [8] Elhamifar E., Vidal R. Block-Sparse Recovery via Convex Optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(8): 14.
- [9] G. Baraniuk R., Candes E., Elad M., et al. Applications of Sparse Representation and Compressive Sensing[C]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 4.
- [10] D. Rao B. Signal processing with the sparseness constraint[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998: 4.
- [11] Rubinstein R., M. Bruckstein A., Elad M. Dictionaries for Sparse Representation Modeling[C]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 13.
- [12] S. F. Cotter, J. Adler, B. D. Rao, et al. Forward Sequential Algorithms for Best Basis Selection[C]. IEE Proceedings of Vision, Image and Signal Processing, 1999: 10.
- [13] L. Donoho D., Elad M. Maximal Sparsity Representation via l_1 Minimization[C]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2002, 100: 6.
- [14] Wang W., J. Wainwright M., Ramchandran K. Information-Theoretic Limits on Sparse Signal Recovery: Dense versus Sparse Measurement Matrices[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(6): 13.
- [15] Cevher V., Indyk P., Carin L., et al. Sparse Signal Recovery and Acquisition with Graphical Models[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(6): 12.
- [16] D. Austin C., L. Moses R., N. Ash J., et al. On the Relation Between Sparse Reconstruction and Parameter Estimation With Model Order Selection[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(3): 11.
- [17] Akcakaya M., Tarokh V. Performance of Sparse Representation Algorithms Using Randomly Generated Frames[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(11): 4.
- [18] Zou H., Hastie T., Tibshirani R. Sparse Principal Component Analysis[J]. Journal of Computational & Graphical Statistics, 2006, 15(2): 32.
- [19] Efron B., Hastie T., Johnstone I, et al. Least Angle Regression[J]. Annual Statistics, 2004, 32(2): 93.
- [20] Stoica P., Selen Y. Model-order Selection: A Review of Information Criterion Rules[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2004, 21(4): 12.
- [21] A. Rezek I., J. Roberts S. Parameter Model Order Estimation: A Brief Review[C]. Proceedings of the 1997 IEE Colloquium on the Use of Model Based Digital Signal Processing Techniques in the Analysis of Biomedical Signals, 1997.
- [22] Angelosante D., Bazerque J. A., B. Giannakis G. Online Adaptive Estimation of Sparse Signals: Where RLS Meets the l_1 -Norm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(7): 12.
- [23] D. H. Hubel, T. N. Wiesel. Receptive Fields of Single Neurons in the Cat's Striate Cortex[J]. Journal of Physiology, 1959, 148(3): 18.
- [24] L. Donoho D., Tsaig Y. Recent Advances in Sparsity-Driven Signal Recovery[C]. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005: 4.
- [25] F. Claerbout J., Muir F. Robust Modeling with Erratic Data[J]. Geophysics, 1973(38): 19.