



“十三五”国家重点图书出版规划项目
材料科学研究与工程技术系列

弹塑性力学基础理论与解析应用 (第2版)

Basic Theory and Analytical
Application of Elastic-Plastic Mechanics

● 主 编 张 鹏
● 副主编 初冠南 陈 刚 王传杰

哈尔滨工业大学出版社



中国科学院出版社
CHINESE ACADEMY OF SCIENCES PRESS

弹塑性力学基础理论与 解析应用

Basic Theory and Analytical
Applications of Elastic-Plastic Mechanics

■ 徐 惠 珪 著

■ 徐惠珪 1928—2008 年 10 月—2009 年 10 月

科学出版社北京 000000



“十三五”国家重点图书出版规划项目
材料科学研究与工程技术系列

弹塑性力学基础理论与解析应用 (第2版)

Basic Theory and Analytical
Application of Elastic-Plastic Mechanics

- 主 编 张 鹏
- 副主编 初冠南 陈 刚 王传杰

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书阐述了弹塑性力学的应力理论、几何理论、屈服准则、弹塑性应力应变关系、主应力解析法、滑移线场理论等,按基本理论概述、理论要点分析、理论解析应用和习题格式来编写,以提高分析问题、解决问题的能力为目的,在选题上尽量照顾到各种类型的读者需要,便于掌握弹塑性力学理论要领与解析应用。

本书可作为高等学校材料成型及控制工程专业本科生或材料加工工程研究生教材或参考书,也可供从事材料塑性加工研究或生产的工程技术人员参考。

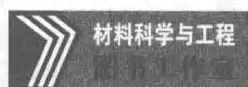
图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学基础理论与解析应用/张鹏主编.—2版.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5603-7251-8

I. ①弹… II. ①张… III. ①弹性力学—高等学校—教材
②塑性力学—高等学校—教材 IV. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 023610 号



策划编辑 许雅莹 杨 桦 张秀华

责任编辑 许雅莹

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 14.75 字数 350 千字

版 次 2014 年 1 月第 1 版 2018 年 3 月第 2 版

2018 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7251-8

定 价 33.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

第2版前言

“弹塑性力学”是材料成型及控制工程专业的基础理论课,它为后续的塑性加工工艺课程提供理论基础。本书注意理论联系实际,以提高学生运用基本理论知识分析和解决实际问题的能力。本书在编写时遵循循序渐进的原则,注重概念、突出要点、强化应用,内容处理力求清晰阐述弹塑性力学的基本概念和理论要点,并注重阐明弹塑性力学基础理论在塑性加工工艺中的解析应用。

全书共分7章,第1章绪论,简要介绍材料的弹性与塑性、塑性加工工艺分类、弹塑性力学理论的发展概况及本课程学习的内容和要求;第2章论述应力理论及其解析应用;第3章论述几何理论及其解析应用;第4章论述屈服准则及其解析应用;第5章论述弹塑性应力应变关系及其解析应用;第6章论述主应力法及其解析应用;第7章论述滑移线场理论及其解析应用;附录列举金属塑性变形基本实验方法。为满足教学及自学读者自测的需要,每章都根据理论要点附有相关的例题和习题。

本书可作为高等学校材料成型及控制工程专业本科生或材料加工工程研究生的教材或参考书,也可供从事材料塑性加工研究或生产的工程技术人员参考。

本书由张鹏任主编,初冠南、陈刚、王传杰任副主编,林艳丽、栾冬、朱强参与编写第1~7章,尚晓晴、林熙原、张坤、苏倩、王海洋参与编写习题和实验。本书在编写过程中,引用了本领域著名专家学者的著作及研究资料,在此表示衷心感谢!

由于编者水平所限,书中不妥之处,敬请读者指正。

编 者

2018年1月

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 弹性与塑性	1
1.2 塑性加工工艺分类	2
1.3 弹塑性力学理论的发展概况	5
1.4 本书的学习目的	6
第 2 章 应力理论及其解析应用	7
2.1 基本理论概述	7
2.1.1 有关应力的基本概念	7
2.1.2 点的应力状态	8
2.1.3 主应力与应力张量	11
2.1.4 主剪应力与最大剪应力	13
2.1.5 应力平衡微分方程	14
2.2 理论要点分析	16
2.2.1 应力状态的独立分量构成	16
2.2.2 主应力状态图及应力张量的几何表示	16
2.2.3 平面问题与轴对称问题的应力状态	18
2.2.4 应力莫尔圆	21
2.2.5 八面体应力与等效应力	24
2.3 理论解析应用	26
2.3.1 正应力、剪应力、全应力的求解	26
2.3.2 应力不变量、主应力、最大剪应力的求解	27
2.3.3 应力状态的判别	29
2.3.4 应力莫尔圆的绘制	29
习题	31
第 3 章 几何理论及其解析应用	32
3.1 基本理论概述	32
3.1.1 弹塑性变形的基本概念	32
3.1.2 点的应变状态	34
3.1.3 位移分量与小变形几何方程	37
3.1.4 变形的协调性与应变连续方程	42
3.1.5 主应变	44
3.1.6 主剪应变与最大剪应变	45
3.1.7 应变增量和应变速率张量	45

3.2 理论要点分析	47
3.2.1 名义应变与真实应变	47
3.2.2 塑性变形程度的表达式	48
3.2.3 主应变状态图及应变张量的几何表示	50
3.2.4 平面变形和轴对称变形	50
3.2.5 应变莫尔圆	51
3.2.6 八面体应变与等效应变	52
3.2.7 塑性变形体积不变条件	53
3.2.8 点的应变状态与应力状态的组合	54
3.3 理论解析应用	54
3.3.1 正应变、剪应变的求解	54
3.3.2 名义应变、真实应变、等效应变的求解	55
3.3.3 应变不变量、主应变、最大剪应变的求解	56
3.3.4 应变状态的判定	58
3.3.5 塑性变形体积不变条件的运用	59
习题	61
第4章 屈服准则及其解析应用	63
4.1 基本理论概述	63
4.1.1 屈服准则	63
4.1.2 能量屈服准则	63
4.1.3 最大剪应力屈服准则	64
4.1.4 屈服准则的验证	64
4.2 理论要点分析	66
4.2.1 屈服准则与强度理论的关系	66
4.2.2 中间主应力的影响	69
4.2.3 屈服准则的几何表达	70
4.2.4 硬化材料后继屈服与固体现实应力空间	72
4.3 理论解析应用	75
4.3.1 利用屈服准则判定应变状态	75
4.3.2 利用屈服准则求解外载条件	76
4.3.3 利用屈服准则控制塑性变形区	78
习题	79
第5章 弹塑性应力应变关系及其解析应用	81
5.1 基本理论概述	81
5.1.1 广义虎克定律	81
5.1.2 加、卸载准则和 Drucker 公设	81
5.1.3 增量理论和全量理论	85
5.1.4 应力应变对应规律	85

5.2 理论要点分析	86
5.2.1 弹性变形广义虎克定律的形式变换	86
5.2.2 真实应力—应变曲线的试验确定	88
5.2.3 塑性变形应力应变曲线的简化形式	93
5.2.4 塑性应力应变关系的特点	95
5.2.5 增量理论特点分析	97
5.2.6 全量理论特点分析	100
5.2.7 应力应变顺序关系和中间关系的证明	102
5.3 理论解析应用	104
5.3.1 弹性力学问题的位移法和应力法求解	104
5.3.2 圣维南原理与叠加原理	110
5.3.3 增量理论与全量理论在塑性变形状态分析中的应用	112
5.3.4 应力应变对应规律在塑性成形工序分析中的应用	114
习题	115
第6章 主应力方法及其应用	118
6.1 基本理论	118
6.1.1 塑性力学问题的数学解析	118
6.1.2 主应力法的基本原理	118
6.2 理论要点分析	119
6.2.1 塑性变形时接触表面摩擦力的计算	119
6.2.2 平衡微分方程和屈服准则联立求解	119
6.2.3 主应力法的求解流程	121
6.3 理论解析应用	124
6.3.1 主应力法在体积成形中的应用	124
6.3.2 主应力法在板材成形中的应用	130
习题	134
第7章 滑移线场理论及其解析应用	136
7.1 基本理论概述	136
7.1.1 滑移线与滑移线场	136
7.1.2 塑性平面应变状态下的应力莫尔圆与物理平面	136
7.1.3 滑移线族别的确定原则	137
7.1.4 滑移线的微分方程	138
7.1.5 滑移线场的应力方程	139
7.1.6 滑移线场的速度方程	141
7.2 理论要点分析	142
7.2.1 滑移线场的应力场理论	142
7.2.2 常见滑移线场的类型	146
7.2.3 滑移线场的绘制方法	148

7.2.4 滑移线场的速度场理论	153
7.3 理论解析应用	159
7.3.1 滑移线法在体积成形中的应用	159
7.3.2 滑移线法在板材成形中的应用	174
习题	177
附录 金属塑性变形基本实验方法	181
附录 1 金属材料拉伸实验	181
附录 2 金属材料压缩实验	186
附录 3 金属材料弯曲实验	191
附录 4 金属材料剪切实验	198
附录 5 金属材料扭转实验	202
参考答案	209
参考文献	225

第1章 绪论

1.1 弹性与塑性

1. 弹性

弹性是物体本身的一种特性,发生弹性形变后可以恢复原来状态的一种性质。

2. 塑性

材料在外力作用下能稳定地改变自己的形状和尺寸而各质点间的联系不被破坏的性质称为塑性。

3. 弹性变形

弹性变形是一种可逆性变形,它是晶格中原子自平衡位置产生可逆位移的反映。

弹性变形的机理:在没有外加载荷作用时,固体材料(如金属)的原子间存在相互平衡的引力和斥力,原子在平衡位置附近产生振动,原子间的相对位置处于一种规则排列的稳定状态。受外力作用时,这种平衡被打破,为了建立新的平衡,原子间必须产生移动和调整,即产生位移,使引力、斥力和外力之间取得平衡。原子的位移总和在宏观上就表现为变形。外力去除后,原子依靠彼此之间的作用力又回到原来的平衡位置,位移消失,宏观上变形也就消失了。

4. 塑性变形

塑性变形是指材料在外力作用下产生形变而在外力去除后不能恢复的那部分变形。

塑性变形的机理:滑移和孪晶是低温时晶粒内塑性变形的两种基本方式。滑移是一部分晶粒沿原子排列最紧密的平面和方向滑动,很多原子平面的滑移形成滑移带,很多滑移带集合起来就成为可见的变形。孪晶是晶粒一部分相对于一定的晶面沿一定方向相对移动,这个晶面称为孪晶面。原子移动的距离和孪晶面的距离成正比。两个孪晶面之间的原子排列方向改变,形成孪晶带。

5. 弹性变形与塑性变形的关系

固体材料在受力以后要产生变形,从变形开始到破坏一般要经历两个阶段,即弹性变形阶段和塑性变形阶段。弹性变形为可逆变形,其数值大小与外力成正比,其比例系数称为弹性模量,材料在弹性变形范围内,弹性模量为常数。弹性模量是衡量材料抵抗变形能力的一个指标,弹性模量越大,材料越不易变形,弹性模量是结构设计的重要参数。塑性变形为不可逆变形。

固体材料的上述弹性与塑性性质可用简单拉伸试验来说明。图 1.1 是低碳钢拉伸时的应力—伸长曲线。

整个拉伸过程中的变形可分为 4 个阶段:弹性阶段、屈服阶段、强化阶段和局部塑性变形阶段。

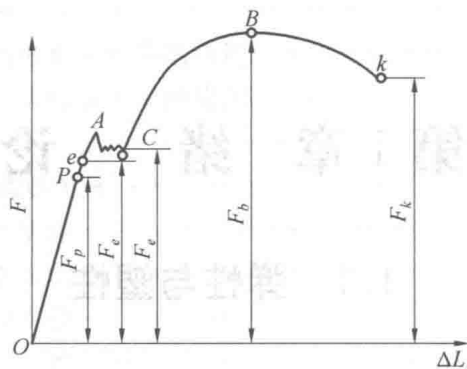


图 1.1 低碳钢拉伸时的应力—伸长曲线

Oe 阶段:弹性阶段。此阶段试样变形为弹性变形,外力卸除后试样可以完全恢复原貌。拉伸开始后,试样的伸长随力的增加而增大,在 P 点以下拉伸力 F 和伸长量 ΔL 呈直线关系。当拉伸力超过 F_p 后, $F-\Delta L$ 呈非线性关系,直至最大弹性力 F_e 。 P 点的应力称为比例极限, e 点的应力则称为弹性极限。

eC 阶段:屈服阶段。当外力超过最大弹性力 F_e 之后,试样便产生不可恢复的永久变形,即出现塑性变形。当外力增加一定值之后,应力—伸长曲线出现锯齿状的峰和谷,在这种外力不增加或者减少的条件下试样仍然伸长的现象称为屈服现象。这个阶段的外力称为屈服力,首次下降前的屈服力称为上屈服力,即 A 点外力,屈服阶段最小的外力称为下屈服力。屈服阶段过后,金属材料发生明显塑性变形。 C 点应力称为屈服强度或屈服点,对于无明显屈服的塑性材料,规定以产生 0.2% 残余变形的应力值为其屈服极限,又称为名义屈服极限或 $\sigma_{0.2}$ 。

CB 阶段:强化阶段。屈服阶段过后,外力与变形不成比例增加。应力—伸长曲线中 B 点即为材料在拉伸时的最大力, B 点的应力称为抗拉强度或者强度极限。

Bk 阶段:局部塑性变形阶段。外力超过最大值 F_b 之后,材料某一部分横截面发生收缩,即“缩颈”现象。试样抵抗变形能力下降,外力随之下降而变形继续增加。至 k 处,试样断裂, k 点的应力称为断裂强度。

但对于工程使用的金属而言,大部分没有明显的屈服现象。部分低塑性材料甚至没有缩颈现象,最大的力即为断裂时的外力。

1.2 塑性加工工艺分类

金属塑性加工是使金属在外力(通常是压力)的作用下,产生塑性变形,获得所需形状、尺寸和组织、性能的制品的一种基本的金属加工技术,以前称为压力加工。

金属塑性加工的种类有很多,根据加工时工件的受力和变形方式,基本的塑性加工方法有锻造、轧制、挤压、拉拔、拉深、弯曲等几类,见表 1.1。其中锻造、轧制和挤压是依靠压力作用使金属发生塑性变形;拉拔和拉深是依靠拉力作用使金属发生塑性变形;弯曲是依靠弯矩作用使金属发生弯曲变形。锻造、挤压和一部分轧制多在热态下进行加工;拉拔、冲压和一部分轧制,以及弯曲和剪切通常是在室温下进行的。

表 1.1 金属塑性加工分类

基本加工变形方式						
基本受力方式	压力					
分类与名称	锻造			轧制		
	自由锻造		模锻	纵轧	横轧	斜轧
	镦粗	拔长				
图例						
基本受力方式	压力		拉力			弯矩
分类与名称	挤压		拉拔	冲压(拉深)	拉深	弯曲
	正挤压	反挤压				
图例						
组合加工变形方式						
组合方式	锻造—纵轧	锻造—横轧	锻造(扩孔)—横轧	轧制—弯曲	冲压(拉深)—轧制	
名称	辊锻	楔横轧	辗压	辊弯	旋压	
图例						

1. 锻造

锻造是指在加压设备及工(模)具的作用下,使坯料产生局部或全部的塑性变形,以获得具有一定机械性能、一定形状和尺寸锻件的加工方法。锻造分为自由锻和模锻,模锻又分为开式模锻和闭式模锻。其特点是:改善金属的内部组织,提高金属的力学性能;具有较高的劳动生产率;适应范围广;锻件的质量小至不足 1 kg,大至数百吨;既可进行单件、小批量生产,又可进行大批量生产;采用精密模锻可使锻件尺寸、形状接近成品零件,因而可以大大地节省金属材料 and 减少切削加工工时。但是不能锻造形状复杂的锻件。

2. 轧制

轧制是指将金属坯料通过一对旋转轧辊的间隙(各种形状),因受轧辊的压缩使材料

截面减小,长度增加的压力加工方法。轧制方式按轧件运动分为纵轧、横轧、斜轧。纵轧过程就是金属在两个旋转方向相反的轧辊之间通过,并在其间产生塑性变形的过程。横轧:轧件变形后运动方向与轧辊轴线方向一致。斜轧:轧件做螺旋运动,轧件与轧辊轴线之间不是特殊角。轧制操作简单、产品质量好、加工成本低。其特点是:用热轧钢卷为原料,经酸洗去除氧化皮后进行冷连轧,其成品为轧硬卷,由于连续冷变形引起的冷作硬化使轧硬卷的强度、硬度上升,韧塑指标下降,因此冲压性能将恶化,只能用于简单变形的零件。

3. 挤压

挤压是指用冲头或凸模对放置在凹模中的坯料加压,使之产生塑性流动,从而获得相应于模具的型孔或凹凸模形状的制件的锻压方法。按坯料的塑性流动方向,挤压又可分为:流动方向与加压方向相同的正挤压,流动方向与加压方向相反的反挤压。

热挤压件的尺寸精度和表面光洁度优于热模锻件,但配合部位一般仍需要经过精整或切削加工。冷挤压件精度高、表面光洁,可以直接用作零件而不需经切削加工或其他精整。冷挤压操作简单,适用于大批量生产的较小制件(钢挤压件直径一般不大于100 mm)。

4. 拉拔

拉拔是指用外力作用于被拉金属的前端,将金属坯料从小于断面的模孔中拉出,使其断面减小而长度增加的方法。由于拉拔多在冷态下进行,因此也称为冷拔或冷拉。拉拔制品的尺寸精度高,表面光洁度极高,金属的强度高(因冷加工硬化强烈),适用于连续高速生产断面小的长制品。但是拉拔的道次变形量与两次退火间的总变形量有限,坯料的长度受限制。

5. 拉深

拉深又称为拉延,是利用模具将平面毛坯变成为开口的空心零件的冲压工艺方法。拉深变形的特点是:凸缘部分(法兰部分)为主要变形区;变形区切向受压缩短,径向受拉伸长(压缩类变形);壁部厚度不均;拉深件各部分硬度不同。

6. 弯曲

弯曲是指把平板毛坯、型材、管材等弯成一定的曲率、一定的角度、一定形状零件的冲压工序。

材料弯曲时,其变形区内各部分的应力状态有所不同。横断面间切向应变为零,长度不变的金属层称为中性层。中性层以外的金属受拉应力作用,产生伸长变形。中性层以内的金属受压应力作用,产生压缩变形。由于中性层两侧金属的应力和应变方向相反,当载荷卸去后,中性层两侧金属的弹性变形回复方向相反,引起不同程度的弹复。虽然弯曲变形仅限于材料的局部区域,但弹复作用却会影响弯曲件的精度。

7. 剪切

剪切是指坯料在剪切力的作用下产生剪切,使板材冲裁,以及板料和型材切断的一种常用加工方法。剪切操作简单、效率高,但是剪切面质量较差。

为了扩大加工产品的种类,提高生产率,相继出现了一些新型的塑性加工方法,如轧制与铸造相结合的连铸连轧法、锻造与轧制相结合的辊锻法等。

1.3 弹塑性力学理论的发展概况

1. 早期研究

- (1) 1678 年, 胡克(R. Hooke) 提出弹性体的变形和所受外力成正比的定律。
- (2) 19 世纪 20 年代, 法国的纳维(C. I. M. H. Navier)、柯西(A. I. Cauchy) 和圣维南(A. J. C. B. de Saint Venant) 等人建立了弹性理论。
- (3) 1773 年, Coulomb 提出土质破坏条件, 其后推广为 Mohr—Coulomb 准则。
- (4) 1857 年, Rankine 研究半无限体的极限平衡, 提出滑移面概念。
- (5) 1864 年, 特雷斯卡(H. Tresca) 提出最大剪应力屈服条件。
- (6) 1871 年, 列维(M. Levy) 将塑性应力应变关系推广到三维情况。
- (7) 1903 年, Kötter 建立滑移线方法。
- (8) 1913 年, 米赛斯(R. von Mises) 提出形变能屈服条件, 普朗特(L. Prandtl) 和罗伊斯(A. Reuss) 提出塑性力学中的增量理论。
- (9) 1929 年, Fellenius 提出极限平衡法。
- (10) 1943 年, Terzaghi 发展了 Fellenius 的极限平衡法。
- (11) 1952 ~ 1955 年, Drucker 和 Prager 发展了极限分析方法。
- (12) 1965 年, Sokolovskii 发展了滑移线方法。

2. 形成独立学科

- (1) 岩土塑性力学最终形成于 20 世纪 50 年代末期。
- (2) 1957 年, Drucker 指出要修改 Mohr—Coulomb 准则, 以反映平均应力或体应变所导致的体积屈服。
- (3) 1958 年, 剑桥大学的 Roscoe 等人提出土的临界状态概念, 于 1963 年提出剑桥黏土的弹塑性本构模型, 开创了土体实用计算模型。
- (4) 从 1970 年前后至今, 岩土本构模型的研究十分活跃, 建立的岩土本构模型也很多。
- (5) 1982 年, Zienkiewicz 提出广义塑性力学的概念, 指出岩土塑性力学是传统塑性力学的推广。

3. 弹塑性力学的发展趋势

- (1) 由早期的精确解法占主导地位到如今数值近似解法占主导地位。
- (2) 由线性问题向非线性问题不断扩展, 并且研究开裂过程、多组分材料、多场耦合问题。
- (3) 由研究型的软件逐渐发展成商品化软件, 如 ANSYS、ADINA 等。
- (4) 以后的发展趋势是功能更加完善, 使用更加方便, 与其他软件进行集成。

1.4 本书的学习目的

弹塑性力学是固体力学的分支学科,是研究可变形体受到外载荷、边界强制位移、温度变化及边界约束变动等外力作用时在变形体内所产生的相应的应力场和应变场。这将为结构承载能力、塑性加工时外载荷(力、力矩)计算、结构总体变形计算、塑性加工件的尺寸与形状变化预测奠定基础。

在现有的教材中有《理论力学》《结构力学》《材料力学》《弹性力学》《塑性力学》等,它们之间研究对象、考虑问题的出发点是不同的,见表 1.2。

表 1.2 有关力学课程的研究对象与解决问题的范围

学科	研究对象	解决的问题范围
理论力学	刚体	力的平衡、力运动学、动力学
结构力学	弹性杆件系统	杆件系统的应力与位移
材料力学	弹性杆件	杆状件拉、压、弯、扭简化解
弹性力学	弹性体	复杂形状构件应力、位移分析及杆件内力的精确解
塑性力学	塑性体	超弹性设计、塑性加工

本书在学习过程中要建立准确的物理概念,掌握塑性变形力学分析方法,提高分析和解决塑性加工实际问题的能力,学习目的主要如下:

- (1) 在“理论力学”“结构力学”“材料力学”和“弹性力学”等课程的基础上,进一步系统地学习塑性力学的基本概念和研究方法,为后续专业课程的学习打下坚实的力学基础。
- (2) 学习掌握塑性加工时工件及模具的塑性力学的解析方法,以便合理地选择加工设备以及准确校核工模具的强度。
- (3) 了解并掌握塑性加工中的应力应变分析、应力应变关系方程等塑性变形力学知识,掌握相应变形力的计算。
- (4) 学会应用弹塑性力学的基本理论和方法思考、分析和解决工程实际问题。
- (5) 为进一步学习和研究材料塑性变形微观机理、塑性变形过程中金属组织性能变化的规律以及确定塑性加工的温度、速度等热力学条件奠定基础。

第2章 应力理论及其解析应用

2.1 基本理论概述

2.1.1 有关应力的基本概念

1. 外力

施加于物体上的力,是塑性加工的外因,可以分为表面力与体积力两类,表面力是作用于物体表面上的力,如摩擦力、正压力等;体积力是作用于物体每一质点上的力,如重力、磁力、惯性力等。在一般的塑性加工过程中,体积力的作用远远小于表面力。

2. 内力

物体抵抗外界作用而产生于内部各部分之间相互平衡的力。外界作用可以是外力,也可以是物理作用和化学作用。内力的产生主要有两个因素:一是平衡外力;二是物体中各区域因变形而产生的相互作用。

3. 应力

应力是变形体中单位面积上的内力,用 σ 表示,当物体中某一微元面积 ΔA 趋近于零时,作用在该面积上的内力 ΔP 与 ΔA 比值的极限,即

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta P / \Delta A) \quad (2.1)$$

应力可以分解成两个分量,垂直于面(或平行于面法线方向)的分量,称为正应力,用 σ 表示;平行于面(或垂直于面法线方向)的一个或者两个正交分量,称为剪应力,用 τ 表示。

应力分量的下角标规定:每个应力分量的符号带有两个下角标,第一个角标表示该应力分量所在的面,用其外法线方向表示,第二个角标表示该应力分量的坐标轴方向;正应力分量的两个角标相同,一般只需一个角标表示,如图2.1所示。

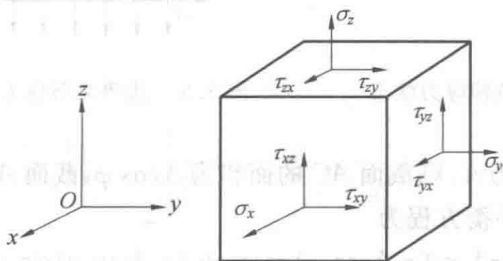


图 2.1 平行于坐标面上应力示意图

应力分量的正负号规定:正应力分量以拉为正、压为负。剪应力分量正负号规定分为两种情况:当其所在的面外法线与坐标轴的正方向一致时,则以沿坐标轴正方向的剪应

力为正,反之为负;当所在面的外法线与坐标轴的负方向一致时,则以沿坐标轴负方向的剪应力为正,反之为负。

2.1.2 点的应力状态

1. 单向应力状态

单向均匀拉伸应力状态,如图 2.2 所示,垂直于轴线的平面上的应力可以表示为

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_0} \tag{2.2}$$

式中, P 为轴向力; A_0 为垂直于轴线的横截面面积。

当所截平面的法线与轴线成 α 角时,相应的轴应力为

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_0} \cos \alpha \tag{2.3}$$

随夹角 α 的增大,截面越来越倾斜,应力也越来越小。

2. 平面应力状态

假设 $\sigma_z = 0$,即在垂直于 xy 平面的方向上没有应力存在,物体中各点所受的应力都位于同一平面内。在 x 方向上作用应力 σ_1 ,在 y 方向上作用应力 σ_2 ,如图 2.3 所示。

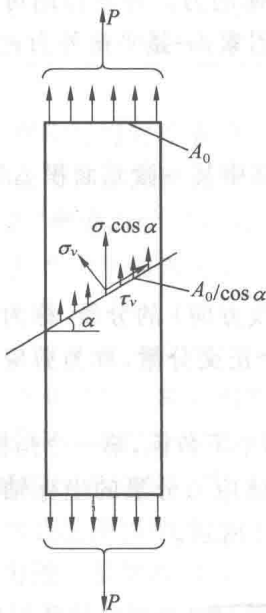


图 2.2 单向均匀拉伸应力状态

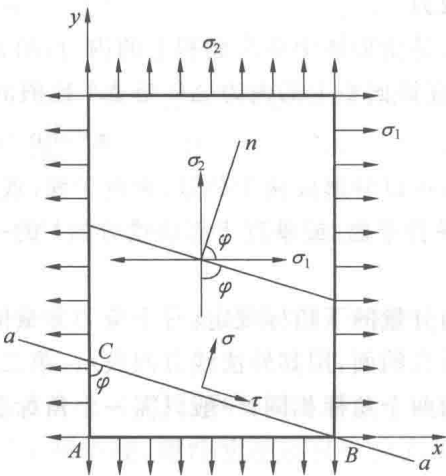


图 2.3 边界无剪应力的平面应力状态

设截面 BC 的面积为 A ,则截面 AC 的面积为 $A \cos \varphi$,截面 AB 的面积为 $A \sin \varphi$,则沿 BC 面法线方向的力的平衡方程为

$$\sigma A = (\sigma_1 A \cos \varphi) \cos \varphi + (\sigma_2 A \sin \varphi) \sin \varphi$$

平行于 BC 面方向的力的平衡方程为

$$\tau A = (\sigma_1 A \cos \varphi) \sin \varphi - (\sigma_2 A \sin \varphi) \cos \varphi$$

整理后,得