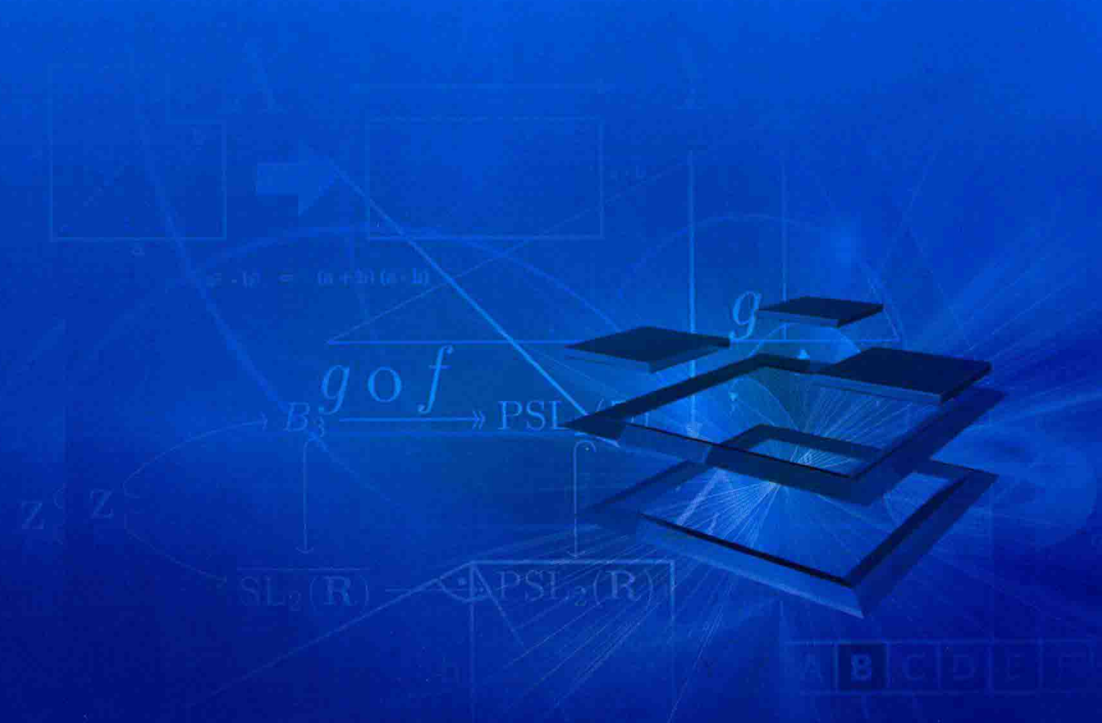
SHUXUE
JIANMO JIAOCHENG

数学建模教程

姜英姿　赵建强　米军利　编



中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

数学建模教程

姜英姿　赵建强　米军利　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书重点阐述了从实际问题中抽象出来的数学概念，通过适当近似，保留具体对象的基本本质，结合实际，用体现严密性和逻辑性的数学符号描述实际问题，形成适当的模型并指导实践，最后用大量生动的应用实例来展示数学理论的应用价值。具体内容有数学建模概论、初等模型、线性代数模型、微分方程模型、图论模型、优化模型、随机模型等，最后介绍几个用数学建模解决实际问题的案例。

本书叙述严谨，可读性、趣味性较强，适合应用型本科院校学生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教程/姜英姿，赵建强，米军利编. —徐州：中国矿业大学出版社，2017.2

ISBN 978-7-5646-3417-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①姜… ②赵… ③米… Ⅲ. ①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 008820 号

书　　名	数学建模教程
编　　者	姜英姿　赵建强　米军利
责任编辑	潘俊成
出版发行	中国矿业大学出版社有限责任公司 (江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线	(0516)83885307　83884995
出版服务	(0516)83885767　83884920
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷	徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本	787×1092　1/16　**印张** 13.25　**字数** 348 千字
版次印次	2017 年 2 月第 1 版　2017 年 2 月第 1 次印刷
定　　价	25.00 元

(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

前　言

随着科学技术和计算机技术的迅速发展，数学向各个领域的广泛渗透已日趋明显，数学不仅在传统的物理学、电子学和工程技术领域继续发挥着重要的作用，而且在经济、人文、体育等社会科学领域也成了必不可少的解决问题的工具。数学建模是大学数学课程的重要组成部分，它是在数学分析、高等代数、概率论与数理统计等课程基础上开设的重要课程。它将数学知识、实际问题与计算机应用有机地结合起来，旨在提高学生的综合素质与分析问题、解决问题的能力。计算机的应用在数学建模的教学中占有重要地位，为解决实际问题而建立数学模型的过程中，对所建模型的求解、检验以及用到的大量的数值计算，都必须用计算机来完成。所以，要学好本课程，必须通过大量的数学建模实验操作，来提高数学建模和计算机应用等方面的能力。

本书重点阐述了从实际问题中抽象出来的数学概念，通过适当近似，保留具体对象的基本本质，结合实际，用体现严密性和逻辑性的数学符号描述实际问题，形成适当的模型并指导实践，最后用大量生动的应用实例来展示数学理论的应用价值。具体内容有数学建模概论、初等模型、线性代数模型、微分方程模型、图论模型、优化模型、随机模型等，最后介绍几个用数学建模解决实际问题的案例。

本书虽经多次修改，但编写过程中难免存在错误，恳请读者批评指正，以待逐步完善。

编　者
2016 年 10 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

2. 模型构成

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来。

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 1-2 中椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

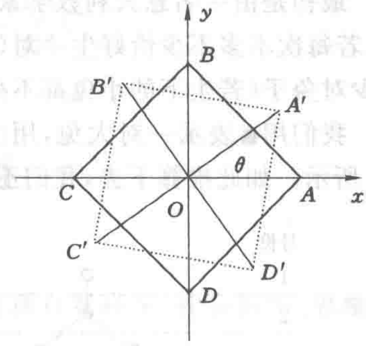


图 1-2

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个变量表示椅脚与地面的垂直距离，那么当这个距离为零时，就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子的位置变量 θ 的函数。

虽然椅子有四只脚，因而有四个距离，但是由正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了。记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，则 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 皆大于零。由假设(2)知，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数；由假设(3)知，椅子在任何位置至少有三只脚着地，所以对于任意的 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。这样，改变椅子的位置使四脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

命题　已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对于任意的 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。则必存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

可以看到，引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 后，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来了，从而构成了这个实际问题的数学模型。

3. 模型求解

上述命题有多种证明方法，这里只介绍其中的一种。

证：将椅子旋转 $90°(\frac{\pi}{2})$，对角线 AC 与 BD 的位置互换，由 $g(0)=0$、$f(0)>0$ 知，$g(\frac{\pi}{2})>0$，$f(\frac{\pi}{2})=0$。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$、$h(\frac{\pi}{2})<0$。由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续性知，$h(\theta)$ 也在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续。根据闭区间上连续函数的零点定理知，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内必存在一点 θ_0，使得 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。

又因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。证毕。

由于这个问题非常直观和简单，模型的分析和检验就略去了。这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示了椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子的四脚与地面的距离。至于利用正方形的中心对称性以及旋转 90°并不是本质的东西，同学们可以考虑椅子的四脚连线呈长方形的情形，并在课后完成。

思考题：小王早上 8:00 从 A 城出发于下午 5:00 到达 B 城。次日早上 8:00 他又从 B 城出发沿原路返回并于下午 5:00 准时到达 A 城。试用数学模型说明 A、B 城之间定有一个

位置，小王在往返 A、B 二城的途中于相同的时间到达该位置。

斐波那契数列

最初是由一名意大利数学家斐波那契在 13 世纪初提出的：兔子出生两个月后就能生小兔，若每次不多不少恰好生一对（一雌一雄），假如养了初生的小兔一对，试问第八个月共有多少对兔子（若生下的小兔都不死的话）？

我们用●表示一对大兔，用○表示一对小兔，则可逐月统计得到每月的兔子对数，如图 1-3 所示。如此推算下去，我们不难得出表 1-1 所示结果。

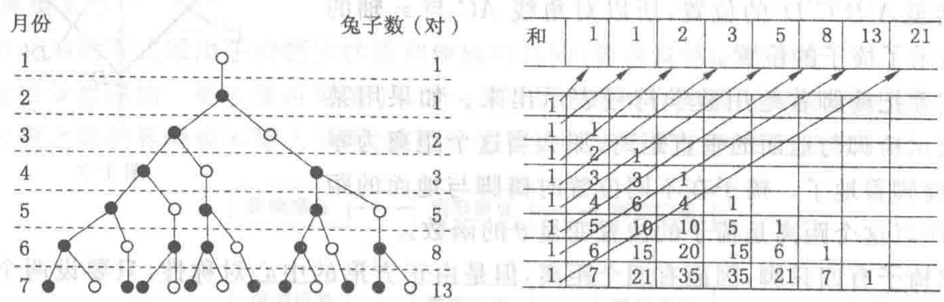


图 1-3

表 1-1 每月的兔子对数

月份数	1	2	3	4	5	6	7	8	…
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	…

所以第八个月共 21 对兔子。

如果我们用 u_n 表示第 n 月后的兔子数，则有 $\{u_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21…这个数列称为斐波那契数列，下面我们就来研究这个有趣的数列问题。

斐波那契螺旋：由正方形可以构成一系列的长方形，其边长为斐波那契数列的连续项，在正方形内绘出一个圆的 1/4，就可以得到一条螺线，这样的螺线被称为**斐波那契螺旋**。

斐波那契螺旋在自然界随处可见，如蜘蛛网、向日葵、水流的旋涡、蜗牛壳的螺纹以及星系内星球的分布等（图 1-4），美国还在 1963 年创刊了《斐波那契季刊》专门研究该数列。

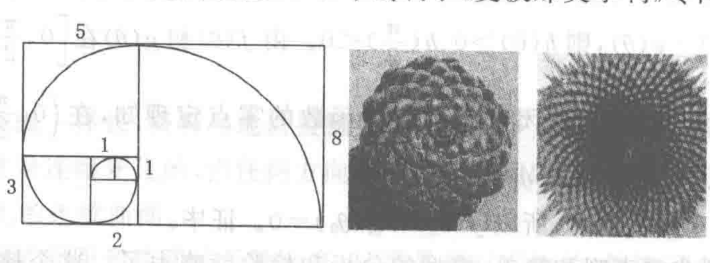


图 1-4

在 Mathematica 中可以运行下列程序得到该数列：

$$\mathrm{RSolve}[\{a[n+2]a[n]+a[n+1], a[0]1, a[1]1\}, a, n]$$

杨辉三角形与斐波那契数列：把杨辉三角形中的数据排列在表格中，自左下至右上斜线

相加。直觉告诉我们,和数列可能是斐波那契数列。学生通过观察和归纳得出了 Fibonacci 数列通项的组合表达式的猜想:

$$u_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-k}^k = \sum_{i=0}^{k} C_{n-i}^i$$

其中,$k=[n/2]$是不超过 $n/2$ 的最大整数。

第四节 数学模型简述

一、数学模型的意义

数学模型是处理数学理论问题的一种经典方法,也是处理自然科学、社会科学、思维科学、哲学、工程技术领域中各种实际问题的一般方法。

什么是数学模型? 概言之,对某种事物系统的特征和数量关系,借助数学语言而建立起来的符号系统,就称之为数学模型。详言之,数学模型有广义理解和狭义理解。按广义理解,凡是以相应的客观原型作为背景加以一级抽象或多级抽象的数学概念、数学理论、数学式子等等都叫做数学模型。按狭义理解,那些反映特定问题或特定事物系统的数学符号系统就叫做数学模型。在应用数学中所使用的数学模型,通常是按狭义理解的,而构造数学模型的目的在于解决具体的实际问题。

二、数学模型的类型

数学模型按不同的标准分类,有很多不同的类型。就人们对数学模型的认识过程来分,数学模型可分为描述性数学模型和解释性数学模型。

描述性模型是从特殊到一般,它是从分析具体客观事物及其状态开始,最终得到一个数学模型。客观事物之间的量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中。

解释性数学模型是由一般到特殊,它是从一般的公理系统开始,借助于数学客体,对公理系统给出正确解释的一种数学模型。例如,当非欧几何开始发现的时候,被认为是一种抽象的几何体系。这种几何体系,在逻辑上推不出任何矛盾,但与人们的直观相差甚远,与传统的看法相悖。1868 年,意大利数学家贝特拉米在近似高音喇叭、其高斯曲率为负常数的特殊曲面(伪球面)上证明了:伪球面的内蕴几何与罗氏几何是一致的,一个伪球面可以解释成为罗氏几何中一个平面的一部分。这就为罗氏几何提供了一个模型。稍后,彭加勒和克莱因在欧氏系统也分别构造了罗氏几何的模型。彭加勒的模型是:在欧氏平面上划一条直线而使之分为上、下两个半平面,把不包括这条直线在内的上半平面作为罗氏平面,其上的欧氏点当做罗氏几何的点,把以该直线上任一点为中心、任意长为半径所作出之半圆周算做是罗氏几何的直线。然后,对如此规定了的罗氏几何元素一一验证罗氏几何诸公理全部成立。借助彭加勒模型可以证明罗氏几何的相对相容性。这种解释性模型是数理逻辑和数学基础理论研究的重要方法,而描述性数学模型是解决实际应用问题的重要手段。

在描述数学模型中,如果按数学所研究的实际对象的分明度来分,又可分为明晰数学模型和模糊数学模型。明晰数学模型主要用于描述明晰现象的量的关系,模糊数学模型主要用于描述模糊现象的量的关系。

在明晰数学模型中,又可分为确定性数学模型和随机性数学模型。确定性数学模型所

对应的客体对象具有确定的量的关系，其表现的形式主要是代数方程、微分方程、积分方程、函数方程、数学关系式、逻辑关系式、线性图等等。随机性数学模型所对应的客体对象具有或然性或随机性，解决这类问题所用的方法是概率论、随机过程和数理统计学中的方法。

如果按着客观事物量的变化特征来分，又可分为连续变化与不连续变化的数学模型。不连续变化的数学模型，又可分为离散数学模型和突变数学模型。微积分是处理连续变化现象的数学模型，突变理论则是处理突变现象的数学模型。

如果按着对事物现象的观察方法来分，可分为宏观模型与微观模型、静态模型和动态模型、确定模型和随机模型。当我们考察某一事物量的状态不注意量的波动性，而仅仅注意其平均值，这种观察方法是确定的，抽象的数学模型是确定的；若注意量的波动性，这种观察方法便是随机的，概括出的数学模型就是随机的。当我们考察某一事物现象注意时间的变化时，就会抽象出动态数学模型；不考虑时间因素，便抽象出静态数学模型。当我们考察某一事物现象只注意空间与时间的微小部分，这就是微观观察法，得出的数学模型就是微观的；若对研究对象的事物，从长期的、宏观的角度着眼，在大局或整体上进行观察，就得到宏观模型。用微观观察方法所导出的方程大都是微分方程，用宏观观察方法所导出的方程大都是积分方程。

对于复杂的实际客体对象往往可抽象为混合型的数学模型，例如兼具有确定性和随机性、或随机性和模糊性等等。从解决实际问题的具体过程来分，又可分为实际的数学模型和计算数学模型。如果按照数学所划分的学科来分，又分为代数模型、几何模型、分析模型、线性规划模型，非线性规划模型、图论模型等等。在数学的不同层次上，还有其他一些分类标准，这里就不再详述了。

三、数学模型的构造

对于同样一个实际问题，可能抽象出不同的数学模型；对于不同的实际问题，也可能抽象为同一个数学模型。究竟一个实际问题怎样抽象为一个数学模型？它要经过哪些步骤？现在叙述如下。

1. 掌握和积累客体的丰富资料和有关数据

数学模型是从客体中抽象出来的，它依赖于客体的原型。因此，对于客体本身应当了解和熟悉，必须掌握和积累客体的丰富资料和有关数据。在此基础上，才有可能对客体事物之间的相互关系及其对象系统整体运动变化规律作出客观的推断。

2. 确定所考察问题的系统，并抓住系统的本质特征

合理的数学模型应该包含与所考察问题有关的那部分信息，这就需要考察问题所属的系统。通过对该系统错综复杂的结构的去粗取精，去伪存真，由表及里的矛盾分析，舍末求本，抓住主要矛盾，概括出系统特征的本质方面。例如，在地球引力这个范围内考察重力加速度 g 的变化。影响 g 的因素很多，地球的大气圈、水圈、岩石圈、天体引力和地球内部物质的运动，对 g 的大小都有影响。但经过分析，实验观察，这些因素都可以忽略。影响 g 变化的主要因素是地球与物体间存在的万有引力和地球绕地轴自转时所产生的离心力。

3. 进行数学抽象

对所考察的客观对象及其间的关系，用数学语言表达出来，这就是数学抽象。

4. 检验

数学模型建立起来以后，还必须回到客观实践去检验，看它是否符合客观实际，若不符

合，再进行修正，直到得到符合客观原型的数学模型。

5. 数学模型的作用

20 世纪及其后的自然科学和技术科学发展的一个显著特点是，多个学科相互渗透，各种边缘学科相继出现，特别是数学向各个学科的渗透尤为普遍和突出。科学的数学化是当代科学发展的一个主要趋向，它在不同程度上涉及一切科学领域和人类活动的各个方面。在科学的数学化进程中，数学模型的建立是重要的一环。为阐述某种现象和解决某种问题，需要建立数学模型。

四、数学建模竞赛的由来

1985 年在美国出现了一种叫 MCM 的一年一度的大学生数学模型(1987 年全称为 Mathematical Competition in Modeling，1988 年改全称为 Mathematical Contest in Modeling，其所写均为 MCM)。这并不是偶然的，在 1985 年以前美国只有一种大学生数学竞赛(The William Lowell Putnam Mathematical Competition，简称 Putman(普特南)数学竞赛)，这是由美国数学协会(MAA——Mathematical Association of America 的缩写)主持，于每年 12 月的第一个星期六分两试进行，每年一次，在国际上产生很大影响，现已成为国际性的大学生一项著名赛事。该竞赛每年 2 月或 3 月进行。

我国自 1989 年首次参加这一竞赛，历届均取得优异成绩。经过数年参加这一竞赛表明，中国大学生在数学建模方面是有竞争力和创新联想能力的。为使这一赛事更广泛地展开，1990 年先由中国工业与应用数学学会后与国家教委联合主办全国大学生数学建模竞赛(简称 CMCM)，该项赛事每年 9 月进行。

数学建模竞赛与通常的数学竞赛不同，它来自实际问题或有明确的实际背景。它的宗旨是培养大学生用数学方法解决实际问题的意识和能力，整个赛事是完成一篇包括问题的阐述分析，模型的假设和建立，计算结果及讨论的论文。通过训练和比赛，同学们不仅用数学方法解决实际问题的意识和能力有很大提高，而且在团结合作发挥集体力量攻关，以及撰写科技论文等方面将都会得到十分有益的锻炼。

【案例分析】

高跟鞋问题

女孩子都爱美，你知道你穿鞋跟多高的鞋子看起来最美吗?

问题分析

穿高跟鞋是为了身高在视觉上得到增加，但是身高越高看起来越美吗？

合理化假设

由黄金分割原理，我们不妨假定，当人的下肢和身高的比为 0.618 时，看起来最美。

设某人身高为 h 厘米，下肢长为 l 厘米，高跟鞋的鞋跟为 x 厘米。

转化为数学问题

穿上高跟鞋后，身高为 $h+x$ 厘米，下肢长为 $l+x$ 厘米。得到一个关于 x 的一次方程：

$$\frac{l+x}{h+x}=0.618$$

问题的求解

解该一次方程，得：

$$x=\frac{0.618h-l}{0.382}$$

问题的检验

以身高 168 cm、下肢长为 102 cm 的人为例，其所穿的鞋跟高度与好看程度的关系可由下表说明：

原比(l/h)	身高/cm	鞋跟高度/cm	新比值
0.6071	168	2.50	0.6129
0.6071	168	3.55	0.6151
0.6071	168	4.50	0.6173
0.6071	168	4.77	0.6180

又如，按照上述模型，身高 153 cm、下肢长为 92 cm 的女士，应穿鞋跟高为 6.6 cm 的高跟鞋显得比较美。

习　题

1. 叙述建立数学模型的基本方法和步骤。

2. 有一个边界形状任意的蛋糕，兄妹俩都想吃，妹妹指着蛋糕上的一点 P，让哥哥过点 P 切开一人一半，能办到吗？

3. 某地区居民用的自来水来自一个由远处水库供水的水塔，水库的水来自降雨和流入的河流。水库的水可以通过库底的渗透和水面的蒸发而有一定的流失。如果要求你建立一个数学模型来预测任何时刻水塔的水位，问需要了解哪些信息？

4. 某人早上 6 时从山下一旅店出发沿一条路径上山，中午 12 时到达山顶，下午游览并在山顶留宿，次日早上 6 时沿同一路径下山，于中午 12 时返回旅店。问此人能否在两天的同一时刻经过途中的同一地点，为什么？

5. 以下是一个数学游戏：

(1) 甲先说一个不超过 6 的正整数，乙往上加一个不超过 6 的正整数，甲再往上加一个

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

正整数，……，如此继续下去。规定谁先加到 50 谁就获胜，问甲、乙各应怎样做？

（2）如将 6 改为 n，将 50 改为 N，问题又当如何回答？

6. 甲乙两人约定中午 12:00 至 1:00 之间在市中心某地见面，但两人讲好到达后只等待对方 10 分钟，求这两人能相遇的概率。

第二章　初等数学方法建模

现实世界中有很多问题，它的机理较简单，用静态、线性或逻辑的方法即可建立模型，使用初等的数学方法即可求解，我们称之为初等数学模型。本章主要介绍有关自然数、比例关系、状态转移及量纲分析等建模例子，这些问题的巧妙的分析处理方法，可使读者达到举一反三、开拓思路、提高分析和解决实际问题的能力。

第一节　有关自然数的几个模型

一、鸽笼原理

鸽笼原理又称为抽屉原理，把 N 个苹果放入 $n(n<N)$ 个抽屉里，则必有一个抽屉中至少有 2 个苹果。

例 2-1　如果有 N 个人，其中每个人至多认识这群人中的 $n(n<N)$ 个人（不包括自己），则至少有两个人所认识的人数相等。

分析：我们按认识人的个数，将 N 个人分为 $0,1,2,\cdots,n$ 类，其中 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 类表示认识 k 个人，这样形成 $n+1$ 个"鸽笼"。若 $n<N-1$，则 N 个人分成不超过 $N-1$ 类，必有两人属于一类，也即有两个人所认识的人数相等；若 $n=N-1$，此时注意到 0 类和 N 类必有一个为空集，所以不空的"鸽笼"至多为 $N-1$ 个，也有结论成立。

例 2-2　在一个边长为 1 的正三角形内最多能找到几个点，而使这些点彼此间的距离大于 0.5。

分析：边长为 1 的正三角形$\triangle ABC$，分别以 A、B、C 为中心，0.5 为半径画圆弧，将三角形分为四个部分（图 2-1），则四部分中任一部分内两点距离都小于 0.5，由鸽笼原理知道，在三角形内最多能找四个点，使彼此间距离大于 0.5，且确实可找到如 A、B、C 及三角形中心四个点。

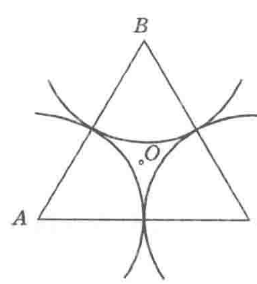


图 2-1

例 2-3　能否在 8×8 的方格表 $ABCD$ 的各个空格中，分别填写 1、2、3 这三个数中的任一个，使得每行、每列及对角线 AC、BD 的各个数的和都不相同？为什么？

分析：若从考虑填法的种类入手，情况太复杂；这里我们注意到，方格表中行、列及对角线的总数为 18 个；而用 1、2、3 填入表格，每行、每列及对角线都是 8 个数，8 个数的和最小为 8，最大为 24，共有 $24-8+1=17$ 种；利用鸽笼原理，18 个"鸽"放入 17 个"鸽笼"，必有两个在一个"鸽笼"，也即必有两个和相同。所以题目中的要求，无法实现。

二、"奇偶校验"方法

所谓"奇偶校验"，即是如果两个数都是奇数或偶数，则称这两个数具有相同的奇偶性；

若一个数是奇数,另一个数是偶数,则称具有相反的奇偶性。在组合问题中,经常使用"奇偶校验"考虑配对问题。

例 2-4　(棋盘问题)假设你有一张普通的国际象棋盘,一组对角上的两个方格被切掉,这样棋盘上只剩下 40 个方格(图 2-2)。若你还有 20 块骨牌,每块骨牌的大小为 1×2 方格。试说明用互不重叠的骨牌完全覆盖住这张残缺的棋盘是不可能的。

分析:关键是对图 2-2 的棋盘进行黑白着色,使得相邻的两个方格有不同的颜色;用一块骨牌覆盖两个方格,必是盖住颜色不同的方格。我们计算一下黑白着色棋盘的黑格、白格个数,分别为 21 和 20;因此不能用 20 块骨牌盖住这张残缺的棋盘。用奇偶校验法,我们可以把黑色方格看成奇数方格,白色方格看成偶数方格;因为奇偶个数不同,所以不能进行奇偶配对,故题中要求的做法是不可能实现的。

例 2-5　(菱形十二面体上的 H 路径问题)沿一菱形十二面体各棱行走,要寻找一条路径使它通过各顶点恰好一次,该问题被称为 Hamilton 路径问题。

分析:我们注意到菱形十二面体每个顶点的度或者为 3 或者为 4,所谓顶点的度是指通过这一顶点的棱数,如图 2-3 所示;且每 3 度顶点刚好与 3 个 4 度顶点相连,而每个 4 度顶点刚好与 4 个 3 度顶点相连。因此一个 Hamilton 路径必是 3 度与 4 度顶点交错,故若存在 Hamilton 路径,则 3 度顶点个数与 4 度顶点个数要么相等,要么相差 1。用奇偶校验法,3 度顶点为奇数顶点,4 度顶点为偶数顶点,奇偶配对,最多只能余 1 个;而事实上菱形十二面体中,有 3 度顶点 8 个,4 度顶点 6 个,故可得结论:菱形十二面体中不存在 Hamilton 路径。

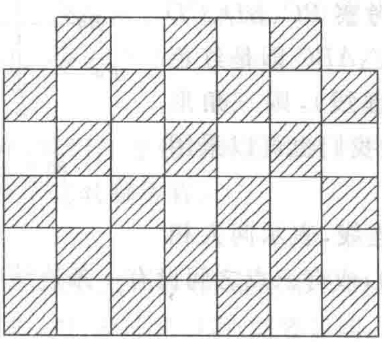


图 2-2

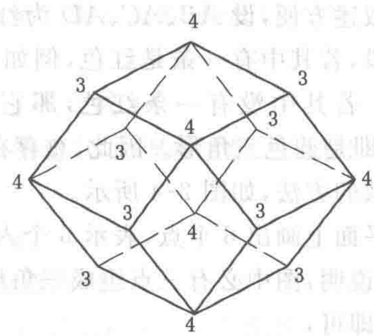


图 2-3

三、自然数的因子个数与狱吏问题

令 $d(n)$ 为自然数 n 的因子个数,则 $d(n)$ 有的为奇数,有的为偶数,见表 2-1 所示。

表 2-1　　自然数对应因子个数表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

我们发现这样一个规律:当且仅当 n 为完全平方数时,$d(n)$ 为奇数;这是因为 n 的因子是成对出现的,也即 $n=ab$;只有 n 为完全平方数,才会出现 $n=a^2$ 的情形,$d(n)$ 才为奇数。

下面我们利用上述结论研究一个有趣的问题。

狱吏问题:某王国对囚犯进行大赦,让一狱吏 n 次通过一排锁着的 n 间牢房,每通过一

次按所定规则转动门锁，每转动一次，原来锁着的被打开，原来打开的被锁上；通过 n 次后，门锁开着的，牢房中的犯人放出，否则犯人不得获释。转动门锁的规则是这样的：第一次通过牢房，要转动每一把门锁，即把全部锁打开；第二次通过牢房时，从第二间开始转动，每隔一间转动一次；第 k 次通过牢房，从第 k 间开始转动，每隔 $k-1$ 间转动一次。问通过 n 次后，哪些牢房的锁仍然是打开的？

问题分析：牢房的锁最后是打开的，则该牢房的锁要被转动奇数次；如果把 n 间牢房用 $1,2,\cdots,n$ 编号，则第 k 间牢房被转动的次数，取决于 k 是否为 $1,2,\cdots,n$ 整除，也即 k 的因子个数，利用自然数因子个数定理，我们得到结论：只有编号为完全平方数的牢房门仍是开着的。

四、相识问题

例 2-6　在 6 人的集会上，总会有 3 人互相认识或互相不认识。

分析：把任选的 6 个人抽象为平面上任选的 6 个点，分别用字母 A、B、C、D、E、F 来表示，两点之间连以红色（实线）或蓝线（虚线）表示两个人相互认识或不认识。这样，6 个人中任 2 人的认识与不认识就被抽象为两个点的连线是实线还是虚线，原问题就转化为：平面上 6 个点（为使这些连线不重叠，须规定其中无 3 点共线），每两点之间连以线段，并将每一条线段涂上红色（实线）或蓝色（虚线），那么由这些线段构成的三角形中必有同色三角形存在。

先考察从某一点（如点 A）出发的 5 条线段。由于仅红、蓝两种颜色，所以这五条线段中至少有 3 条是同色的（抽屉原理），不妨设为红色。为叙述方便，设 AB、AC、AD 为红线（实线），再考察 BC、BD、CD 三条线段，若其中有一条是红色，例如 BC，则三角形 $\triangle ABC$ 即是红色三角形。若其中没有一条红色，那它们都是蓝色（虚线），则三角形 $\triangle BCD$ 即是蓝色三角形。因此，总存在同色三角形。我们也可以采用几何模似的方法，如图 2-4 所示。

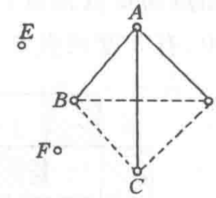


图 2-4

在平面上画出 6 个点，表示 6 个人，两点间存在连线，表示两人相识；只需说明，图中必有三点组成三角形（有三人相识），或有三点之间设有一条连线（三人互不相识）即可，

五、将问题数字化

例 2-7　7 只杯子放在桌子上，3 只杯口朝上，4 只杯口朝下，现要求每次同时翻转其中 4 只使杯口朝向相反，问能否经过有限次翻转后，使所有杯子杯口均朝下？

分析：$+1$ 表示杯口朝上，-1 表示杯口朝下。

起始状态：3 个 $+1$，4 个 -1。

$(+1)(+1)(+1)(-1)(-1)(-1)(-1)$

终点状态是七个 -1，即 $(-1)^7$。翻转一只杯子使其朝向相反，不是 $+1\to-1$ 就是 $-1\to+1$，也即在 $(+1)$ 或 (-1) 上乘以 (-1)。现欲将 4 只杯子同时翻转，可见每次“运算”（即翻转杯子）的总结果是乘以 $(-1)^4$。

原问题就抽象为如下问题：能否每次同时改变 4 个符号使起始状态变为终点状态，显然不可能。因为，起始状态结果为 $+1$，终点状态为 -1。

例　男女若干人围坐在一个圆桌，在相邻两人间插上一朵花；同性者中间插一朵红花，异性者中间插一朵蓝花。若所插的红花与蓝花一样多，证明：男女人数总和是 4 的倍数。

第二节　状态转移问题

本节介绍两种状态转移问题，解决这种问题的方法有状态转移法、图解法及用图的邻接矩阵等。

一、人、狗、鸡、米问题

人、狗、鸡、米均要过河，船上除 1 人划船外，最多还能运载一物，而人不在场时，狗要吃鸡，鸡要吃米，问人、狗、鸡、米应如何过河？

分析：假设人、狗、鸡、米要从河的南岸到河的北岸，由题意知，在过河的过程中，两岸的状态要满足一定条件，所以该问题为有条件的状态转移问题。

1. 允许状态集合

我们用 $(w,x,y,z)(w,x,y,z=0$ 或 $1)$ 表示在岸的状态，例如 $(1,1,1,1)$ 表示它们都在南岸，$(0,1,1,0)$ 表示狗、鸡在南岸，人、米在北岸；很显然有些状态是允许的，有些状态是不允许的，用穷举法可列出全部 10 个允许状态向量，

$(1,1,1,1)$、$(1,1,1,0)$、$(1,1,0,1)$、$(1,0,1,1)$、$(1,0,1,0)$

$(0,0,0,0)$、$(0,0,0,1)$、$(0,0,1,0)$、$(0,1,0,0)$、$(0,1,0,1)$

我们将上述 10 个可取状态向量组成的集合记为 S，称 S 为允许状态集合。

2. 状态转移方程

对于一次过河，可以看成一次状态转移，我们用向量来表示决策，例如 $(1,0,0,1)$ 表示人运米过河。令 D 为允许决策集合：

$$D=\{\ (1,x,y,z)\ :x+y+z=0\ \text{或}\ 1\}$$

另外，我们注意到过河有两种，奇数次的为从南岸到北岸，而偶数次的为北岸回到南岸，因此得到下述转移方程：

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k d_k \tag{2-1}$$

式中，$S_k=(w_k,x_k,y_k,z_k)$ 表示第 k 次状态；$d_k\in D$ 为决策向量。

人、狗、鸡、米过河问题，即要找到 $d_1,d_2,\cdots,d_{m-1}\in D,S_0,S_1,\cdots,S_m\in S,S_0=(0,0,0,0)$。$S_m=(1,1,1,1)$ 且满足式(2-1)。下面用状态转移图求解。

将 10 个允许状态用 10 个点表示，并且仅当某个允许状态经过一个允许决策仍为允许状态，则这两个允许状态间存在连线，而构成一个图。如图 2-5 所示，在其中寻找一条从 $(1,1,1,1)$ 到 $(0,0,0,0)$ 的路径，这样的路径就是一个解，可得下述路径图。

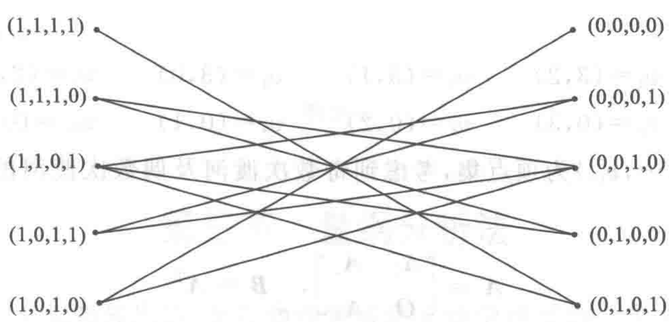


图 2-5

由图 2-6 可知，有两个解都是经过 7 次运算完成，均为最优解。

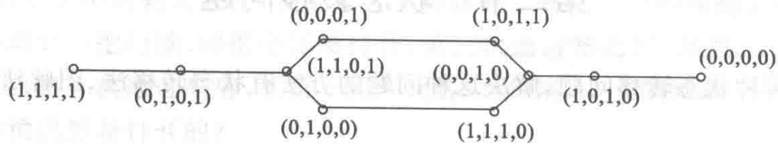


图 2-6

二、商人过河问题

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人，由他们自己划行，若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定，试给出一个商人安全渡河的方案。

首先介绍图论中的一个定理。

G 是一个图，$V(G)$ 为 G 的顶点集，$E(G)$ 为 G 的边集。设 G 中有 n 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & v_iv_j \in E(G) \\ 0 & v_iv_j \notin E(G)\end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

定理 1：设 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵，则 G 中从顶点 v_i 到顶点 v_j，长度为 k 的道路的条数为 A^k 中的 i 行 j 列元素。

证：对 k 用数学归纳法。

$k=1$ 时，显然结论成立；假设 k 时，定理成立，考虑 $k+1$ 的情形。

记 $\boldsymbol{A}^l$ 的 i 行 j 列元素为 $a_{ij}^{(l)}\, l\geqslant 2$，因为 $\boldsymbol{A}^l\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{l+1}$，所以：

$$a_{ij}^{(l+1)}=a_{i1}^{l}a_{1j}+a_{i2}^{l}a_{2j}+\cdots+a_{in}^{l}a_{nj}$$

而从 v_i 到 v_j 长 $k+1$ 的道路无非是从 v_i 经 k 步到某顶点 $v_l(1\leqslant l\leqslant n)$，再从 v_l 走一步到 v_j；由归纳假设从 v_i 到 v_l 长为 k 的道路共计 a_{il}^{k} 条，而从 v_l 到 v_j 长为 1 的道路为 a_{lj} 条，所以长为 $k+1$ 的从 v_i 经 k 步到 v_l 再一步到 v_j 的道路共有 $a_{il}^{(k)}a_{lj}$ 条，故从 v_i 经 $k+1$ 步到 v_j 的路径共有 $a_{ij}^{(k+1)}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}^{(k)}a_{lj}$ 条。

下面分析及求解。

假设渡河是从南岸到北岸，(m,n) 表示南岸有 m 个商人，n 个随从，全部的允许状态共有 10 个。

$v_1=(3,3)$　　$v_2=(3,2)$　　$v_3=(3,1)$　　$v_4=(3,0)$　　$v_5=(2,2)$

$v_6=(1,1)$　　$v_7=(0,3)$　　$v_8=(0,2)$　　$v_9=(0,1)$　　$v_{10}=(0,0)$

以 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}$ 为顶点集，考虑到奇数次渡河及偶数次渡河的不同，我们建立两个邻接矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

其中：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com