JILEI GUANGYI BUBIAN TUXING

几类广义不变凸性及其应用研究

JIQI YINGYONG YANJIU

李婷 著

版传媒集团

济出版社

几类广义不变凸性及其应用研究

JILEI GUANGYI BUBIAN TUXING

李婷 著

山西出版传媒集团
山西经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

几类广义不变凸性及其应用研究 / 李婷著. —太原:山西经济出版社,2017.7

ISBN 978-7-5577-0217-5

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①凸函数—研究 Ⅳ. ①O174.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第162439号

几类广义不变凸性及其应用研究

著　　者:李　婷
责任编辑:宁姝峰
封面设计:赵　娜

出 版 者:山西出版传媒集团·山西经济出版社
地　　址:太原市建设南路21号
邮　　编:030012
电　　话:0351-4922133(发行中心)
0351-4922085(综合办)
E-mail:scb@sxjjcb.com(市场部)
zbs@sxjjcb.com(总编室)
网　　址:www.sxjjcb.com

经 销 者:山西出版传媒集团·山西经济出版社
承 印 者:山西出版传媒集团·山西新华印业有限公司

开　　本:890mm×1240mm　1/32
印　　张:5.75
字　　数:120千字
版　　次:2017年7月 第1版
印　　次:2017年7月 第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5577-0217-5
定　　价:32.80元

目　录

第一章　绪论

1.1　数学规划中广义凸性的研究意义

20 世纪 60 年代中期，由于数学规划论、对策论、数理经济学、逼近论、变分学、最优控制理论等多方面的需要，出现了一个新的数学分支——凸分析。1970 年 Rockatellar[1] 所写的《Convex Analysis》一书和 1973 年 Rokerts[2] 所写的《Convex Founction》一书的出版，是凸分析发展的一个重要里程碑，极大地推动了凸分析的发展。凸分析所研究的主要内容是凸性理论（包含凸集理论和凸函数理论）。凸性理论在数理经济学、对策论、工程、管理科学和最优化理论中起着非常重要的作用。这主要是因为定义在凸集上的凸函数具有以下几个重要的性质：(1)极值点集是凸集；(2)局部极值点一定是其全局极值点；(3)满足 KKT 条件的点一定是其极值点；(4)严格凸函数在凸集上的局部极值点一定是其唯一全局极值点。但遗憾的是实际问题中的大量函数都是非凸函数。因为具有凸性的函数相对来说是很少的，加之凸函数具有上述这些优秀的性质，因此人们一直在研究凸函数的各种推广形式即广义凸函数，使其既能保持凸函数的一些良好性质又具有比凸性更弱的条件，其实用的范围却比凸函数要广，是凸函数的拓广与发展。

广义凸函数具有许多类似于凸函数的性质,尤其在扩展优化条件到更广泛的优化问题方面有着较大的优势,所以,近年来,国内外许多学者对广义凸函数做了大量的深入研究。经过多年探索,人们相继提出了拟凸、伪凸、不变凸、预不变凸、α-不变凸、B-不变凸、G-凸等广义凸函数。随着各种广义凸函数的不断出现,广义凸性理论现已成为数学规划、对策论、经济学、变分学、最优化理论、工程学、管理科学等学科的重要理论基础和有用工具。

利用函数的广义凸性可以研究单目标问题与多目标问题的最优性条件、对偶理论,也可以研究变分不等式问题、平衡问题、变分包含问题等解的存在性。随着各类广义凸性的出现,在更广泛的条件下讨论数学规划和最优化理论等相关学科中的问题,为解决大量应用科学中的具体问题也提供了行之有效的方法。深入研究广义凸性理论和应用,必将丰富和完善最优化理论的内容,促进相关学科的发展,为解决大量应用科学中的具体问题提供有力的工具。

广义凸性理论在应用上越来越重要,其在数学规划论、对策论、数理经济学、变分学和最优控制领域中起着重要的作用,并且有着无限的发展潜力和发展前景。

1.2 广义凸性的发展及研究现状

1967 年 Ponstein[3]在介绍了凸集与凸函数概念的基础上,将凸性推广到拟凸性和伪凸性。1979 年 Bazar 和 Shetty[4]进一步讨论了凸函数,严格凸函数,拟凸函数,严格拟凸函数,半严格拟凸函数,伪凸函数,严格伪凸函数这 7 种凸函

数的性质和相互关系,证明了除凸函数之外的 6 种广义凸函数也具有凸函数的某些优秀性质。这七种凸性是最基本的 7 种凸性,广义凸性以此为基础不断被丰富。1989 年薛家声和沈舜莺[5]又引入了 4 种新凸性,即显凸性(半严格凸性)、强凸性、强拟凸性和强伪凸性,将 7 种凸性扩展到了 11 种凸性。

在凸函数的各种推广形式中,一个非常重要的推广是 1981 年 Hanson[6]引入的一类新函数,Craven[7]称之为不变凸函数。Hanson 的工作激发了大量关于不变凸性及其在非线性优化中应用的研究。1985 年 Kaul 和 Kaur[8]引入了伪不变凸函数和拟不变凸函数,研究了它们在非线性规划中的应用。1988 年,Weir 和 Wond[9]引入了不变凸集和预不变凸函数的定义,表明了不变凸集是凸集的推广,并建立了非线性规划的最优性条件和对偶理论。1991 年 Pini[10]引入了预拟不变凸函数,证明了可微的预不变凸函数也是不变凸函数,但反之不成立。接下来,1995 年 Mohan 和 Neogy[11]证明了在条件 C 下,不变凸函数是预不变凸函数,拟不变凸函数是预拟不变凸函数。杨新民等又于 2001 年在[12]中定义了半严格预拟不变凸函数与严格预拟不变凸函数,讨论了预拟不变凸函数、半严格预拟不变凸函数和严格预拟不变凸函数之间的关系,得到了它们的一些性质及其在最优化中的应用。2006 年,唐万梅和杨新民[13]引进了强预不变凸函数的定义,研究了强预不变凸函数与预不变凸函数、严格预不变凸函数及半严格预不变凸函数之间的关系。接下来,2007 年,唐万梅和杨新民[14]又引进了强预拟不变凸函

数的概念,并讨论了强预拟不变凸函数与预拟不变凸函数、严格预拟不变凸函数及半严格预拟不变凸函数之间的相互关系。

1992 年,Jeyakumar 和 Mond[15]引入了 α - 不变凸函数的概念,研究了 α - 不变凸函数在广义凸规划和多目标优化中的重要应用。2004 年,Noor[16]给出了 α - 预不变凸函数、α - 不变凸函数和 $\alpha\eta$ - 单调算子的概念,建立了 α - 预不变凸函数、α - 不变凸函数和 $\alpha\eta$ - 单调性之间的关系。2006 年,Noor M A 和 Noor K I[17]又引入了强 α - 预不变凸函数,建立了强 α - 预不变凸性、强 α - 不变凸性和强 $\alpha\eta$ - 单调性之间的关系。2007 年,Fan 和 Guo[18]系统地研究了(伪、拟)α - 预不变凸性、(伪、拟)α - 不变凸性和(伪、拟)$\alpha\eta$ - 单调性之间的关系。2008 年,刘彩平在文献[19]中进一步将拟 α - 预不变凸性推广到强拟 α - 预不变凸性,在适当的条件下建立了强拟 α - 预不变凸性,强拟 α - 不变凸性之间的关系。2013 年,唐万梅[20]定义了严格拟 α - 预不变凸函数和半严格拟 α - 预不变凸函数,并对它们的性质及相互关系进行了研究。

1991 年, Bector 和 Singh[21]引入了 B - 凸函数的定义,B - 凸函数是凸函数从另一方面的重要推广,并研究了 B - 凸函数一些重要的性质。1993 年, Bector、Suneja 和 Lalitha[22]推广了 B - 凸函数、伪 B - 凸函数和拟 B - 凸函数,分别得到了 B - 不变凸函数、伪 B - 不变凸函数和拟 B - 不变凸函数,进而也得到了包括 B - 凸函数和 B - 不变凸函数的非线性规划问题的最优性条件和对偶理论结果。同年,

S. K. Suneja、C. Singh和 C. R. Bector[23]等人引入了 B-预不变凸函数,得到了 B-预不变凸函数,得到了 B-预不变凸函数在不变凸集上的局部极小点也是全局极小点的性质,并分别讨论了 B-预不变凸函数在不变凸集和 B-不变凸集上的许多性质。2002 年,杨新民[24]等引入了半严格 B-预不变凸函数,讨论了半严格 B-预不变凸函数的一些性质,并建立了 B-预不变凸函数和半严格 B-预不变凸函数之间的关系。2006 年,彭建文等[25]讨论了严格 B-预不变凸函数,得到了严格 B-预不变凸函数的一个充分条件,同时也讨论了严格 B-预不变凸函数的一些性质以及在极小化问题中的应用。同年,龙宪军和彭建文[26]提出了半 B-预不变凸函数并讨论了它的性质。

1981 年,Schaible 和 Ziemba[27]定义了 G-函数,并给出了它的一些性质;2007 年,Antcza[28][29]提出了另一类广义凸函数—G-预不变凸函数和严格 G-预不变凸函数,它们是预不变凸函数的推广,并讨论了它们在非线性规划中的应用;2012 年,彭再云[30]提出了半严格 G-预不变凸函数的概念,讨论了它与 G-预不变凸函数之间的关系;同年,彭再云等[31]对强预不变凸函数进行了推广,得到了强 G-预不变凸函数的概念,举例说明它区别于 G-预不变凸函数、严格 G-预不变凸函数,给出了它的几个基本性质,并得到了强 G-预不变凸函数的一个充分条件。2013 年,彭再云等[32]又在此基础上提出了 G-半预不变凸函数的概念,并讨论了 G-半预不变凸函数的性质及其重要刻画。同年,彭再云等[33]讨论了强 G-半预不变凸性及其在非线性规划问题中

的应用。2015 年,李科科等[34]提出了严格 G - 半预不变凸函数的概念,研究了它的一些性质及其在无约束得非线性规划问题、带不等式约束的非线性规划问题及多目标规划问题中的应用。

1.3 主要研究工作

近 40 年来,凸性理论已应用到最优化的各个领域中,而作为最优化的一个重要分支的数学规划,影响则更为深远。同时,凸分析中很多重要性质的成立也不一定要求所讨论的函数是凸函数,而仅仅要求它的水平集是凸集就可以了。因此,广义凸性成为数学规划研究的一个发展趋势。凸性概念作为一个最基本的条件在数学规划中起着重要的作用。

本书在保持凸函数的一些良好性质的基础上,研究了几类广义凸函数,分析了这些广义凸函数的性质,讨论了它们在最优化中的一些应用。

第二章综述了凸函数的相关概念、性质以及凸函数与半连续函数之间的关系。第三章至第八章将凸函数的这些性质进行推广,分别得到了几类广义凸函数的性质。

第三章研究了一类广义凸函数——拟 α - 预不变凸函数。首先介绍了拟 α - 预不变凸函数的性质和等价刻画,给出了拟 α - 预不变凸函数与半连续函数之间的关系,然后讨论了拟 α - 预不变凸函数(半严格拟 α - 预不变凸函数)是严格拟 α - 预不变凸函数的充要条件,最后给出了拟 α - 预不变凸函数在最优化中的应用。

第四章首先介绍了强 α - 预不变凸函数的概念,然后得

到了强 α - 预不变凸函数的一些性质以及强 α - 预不变凸函数与(上半连续)下半连续函数之间的关系,最后得到了强 α - 预不变凸规划问题的一些最优性结果。

第五章首先分析了强拟 α - 预不变凸函数的性质,然后讨论了强拟 α - 预不变凸函数与强拟 α - 不变凸函数之间的关系,最后研究了强拟 α - 预不变凸函数在无约束非线性规划问题、带不等式约束的非线性规划问题以及多目标规划问题中的应用。

第六章提出了一类新的广义凸函数——α - 半预不变凸函数,首先举例说明了 α - 半预不变凸函数的存在性以及 α - 半预不变凸函数与半预不变凸函数之间的关系;其次讨论了 α - 半预不变凸函数的一些性质;最后给出了 α - 半预不变凸函数分别在无约束及带不等式约束的非线性规划问题中的应用,并举例验证所得结果的正确性。

第七章首先在广义凸的统一形式 B - 不变凸性条件下,考虑多目标分式规划问题的目标函数和约束函数的 B - 不变凸性,在 B - 不变凸性假定下,给出了多目标分式规划问题的有效解的条件,并建立对偶模型,基于 B - 不变凸性证明了各自相应的弱、强对偶定理;然后在严格 B - 预不变凸性条件下,讨论多目标分式规划问题的最优性条件和对偶定理。

第八章主要以强 G - 预不变凸函数为研究对象,首先讨论了强 G - 预不变凸函数的性质;然后在中间点的 G - 预不变凸性下得到了 G - 预不变凸函数的一个判定定理,分析了严格 G - 预不变凸函数与 G - 预不变凸函数、半严格 G - 预

不变凸函数之间的关系，建立了严格 G - 预不变凸函数与半严格 G - 预不变凸函数各自的一个等价条件；最后获得了强 G - 预不变凸函数在两类数学规划中的应用。

第九章以 G - 半预不变凸函数为主要研究对象，讨论了 G - 半预不变凸函数的一些新性质，即 G - 半预不变凸函数与半连续函数之间的关系；另外，在中间点的严格 G - 半预不变凸性条件下，利用半严格 G - 半预不变凸性，得到了严格 G - 半预不变凸函数的一个充分条件。

第二章 凸函数

本章首先介绍凸函数的相关概念、性质以及凸函数与半连续函数之间的关系. 以后的章节是在本章的基础上,将凸函数的这些性质进行推广,得到了几类广义凸函数的性质,以及它们在最优化中的应用.

2.1 凸函数的相关概念

定义 2.1.1 称集合 $S\subseteq R^n$ 是凸集,如果 $\forall x,y\in S$, $\forall \lambda\in[0,1]$,有

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in S$$

凸集有很明显的几何意义,从上述定义可知,若一个集合是凸的,意味着连接该集合中的任意两点的线段也必含于此集合之中.

我们约定:空集是凸集.

定义 2.1.2 设 $S\subseteq R^n$ 是非空凸集,$f:S\to R$,如果对 $\forall x,y\in S$, $\forall \lambda\in[0,1]$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

则称 f 是 S 上的凸函数.

如果对 $\forall x,y\in S,x\neq y$,$\forall \lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

则称 f 是 S 上的严格凸函数.

例 2.1.1 下列函数是凸函数.

(1) $f(x)=x^2$;

(2) $f(x)=-x^{\frac{1}{2}}, x\geqslant 0$;

(3) $f(x,y)=2x^2+y^2-2x-y$;

(4) $f(x)=|x|, x\in\mathbf{R}^n$.

定义 2.1.3 设 $S\subseteq R^n$ 是非空凸集, $f:S\to R$, 如果对 $\forall x,y\in S$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\max\{f(x),f(y)\}$$

则称 f 是 S 上的拟凸函数.

定义 2.1.4 设 $S\subseteq R^n$ 是非空凸集, $f:S\to R$, 如果对 $\forall x,y\in S, x\neq y$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda\ max\ \{f(x),f(y)\}$$

则称 f 是 S 上的严格拟凸函数.

定义 2.1.5 设 $S\subseteq R^n$ 是非空凸集, $f:S\to R$, 如果对 $\forall x,y\in S, f(x)\neq f(y)$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda\max\{f(x),f(y)\}$$

则称 f 是 S 上的半严格拟凸函数.

定义 2.1.6 设 $S\subseteq R^n$ 是非空开凸集, $f:S\to R$ 在 S 上可微, 如果对 $\forall x,y\in S$, 有

$$\nabla f(y)(x-y)\geqslant 0\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$$

则称 f 是 S 上的伪凸函数.

定义 2.1.7 设 $S\subseteq R^n$ 是非空开凸集, $f:S\to R$ 在 S 上可微, 如果对 $\forall x,y\in S, x\neq y$, 有

$$\nabla f(y)(x-y)\geqslant 0\Rightarrow f(x)>f(y)$$

则称 f 是 S 上的严格伪凸函数.

定义 2.1.8 称 f 在 $\bar{x}\in S$ 处是上半连续的，如果对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得 $\forall x\in S$ 且 $\|x-\bar{x}\|<\delta$ 时，有

$$f(x)-f(\bar{x})<\varepsilon$$

定义 2.1.9 称 f 在 $\bar{x}\in S$ 处是下半连续的，如果对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得 $\forall x\in S$ 且 $\|x-\bar{x}\|<\delta$ 时，有

$$f(\bar{x})-f(x)<\varepsilon$$

2.2 凸函数的性质

定理 2.2.1 设 $S\subseteq R^n$ 是非空凸集，

(1)若 $f:S\to R$ 是 S 上的凸函数，$k>0$，则 kf 是 S 上的凸函数；

(2)若 $f_1,f_2:S\to R$ 都是 S 上的凸函数，则 f_1+f_2 是 S 上的凸函数.

证明：(1)由于 $f:S\to R$ 是 S 上的凸函数，则 $\forall x,y\in S$，$\forall \lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从而 $$kf(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda kf(x)+(1-\lambda)kf(y)$$

即 $$(kf)(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda(kf)(x)+(1-\lambda)(kf)(y)$$

所以 kf 是 S 上的凸函数.

(2)因为 $f_1,f_2:S\to R$ 都是 S 上的凸函数，所以 $\forall x,y\in S$，$\forall \lambda\in[0,1]$，有

$$f_1(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f_1(x)+(1-\lambda)f_1(y)$$

$$f_2(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f_2(x)+(1-\lambda)f_2(y)$$

从而

$$f_1(\lambda x+(1-\lambda)y)+f_2(\lambda x+(1-\lambda)y)$$