Lectures on Dynamics of Structures

结构动力学讲义

（第二版）

周智辉　文　颖　曾庆元　编著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

Lectures on Dynamics of Structures

结构动力学讲义

（第二版）

周智辉　文　颖　曾庆元　编著

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书系统地论述了结构动力学的基本原理,除了传统的结构动力学理论,还包括曾庆元院士在结构动力学领域的两项原创性成果,即弹性系统动力学总势能不变值原理与形成系统矩阵的“对号入座”法则。

本书可作为大学工程学科(包括土木工程、机械工程、载运工具等)高年级学生以及研究生的教材或教学参考书,也可供有关教师、研究人员及工程技术人员参考。

Summary of Contents

This book systematically introduces the fundamental concepts and principles of the subject of “Dynamics of Structures”. It covers topics not only of the classical theory of vibration of structures but of two original contributions presented by Zeng Qingyuan, namely the principle of total potential energy with stationary value in elastic system dynamics and the “set in right position” rule for formulating system matrices.

The book can be used as a textbook or supplementary material for engineering undergraduates with a background in Civil, Mechanical and Vehicle Operation Engineering as well as graduate students, it will also be a handy reference for college teachers, researchers and practical engineers.

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学讲义 / 周智辉, 文颖, 曾庆元编著. —2 版. — 北京 : 人民交通出版社股份有限公司, 2017.8

ISBN 978-7-114-13990-1

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①周… ②文… ③曾… Ⅲ. ①结构动力学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 160696 号

书　　名:结构动力学讲义(第二版)
著 作 者:周智辉　文　颖　曾庆元
责任编辑:李　喆　周　宇
出版发行:人民交通出版社股份有限公司
地　　址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址:http://www.ccpress.com.cn
销售电话:(010)59757973
总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京盈盛恒通印刷有限公司
开　　本:787×1092　1/16
印　　张:12.25
字　　数:290 千
版　　次:2015 年 10 月　第 1 版
　　　　　2017 年 8 月　第 2 版
印　　次:2017 年 8 月　第 2 版　第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-114-13990-1
定　　价:38.00 元
(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

第二版前言

我在长沙铁道学院(现为中南大学)读硕士研究生时,学习结构动力学,采用的教材就是本书油印稿。当时,学到曾老师提出的弹性系统动力学总势能不变值原理与形成系统矩阵的“对号入座”法则,敬仰之情油然而生。因为在结构动力学这一传统经典力学领域,能够有创新、有发展,谈何容易。此后有幸追随曾老师攻读博士学位,从事车桥系统振动研究十余年,研究过程中,用到动力学的方法与概念时,总不忘温习油印稿中的相关章节,从中汲取养分,该书稿一直是我手边最重要的工具书。直到 2012 年,曾老师提议将此书稿整理出版,尽管他当时年近九旬,仍然提出修改补充意见,安排我和文颖对原书稿进行完善。历经 3 年,书稿终于在 2015 年 10 月出版面世。当我把新出版的书呈送到曾老师面前时,虽未见激动之情,但那满意的笑容至今记忆犹新。我知道,他每出一本书,就像一个小孩出生一样,看得很重。然而,万万没有想到,两个月后他住进了医院,并且再也没有回到他熟悉的校园,就这样永远地离开了他身边的人。现在想起,书稿得以及时面世,他能看一眼自己的作品,是何等庆幸,否则,我们将留下永远的遗憾。

对老师最好的纪念是继承他的事业并将其发扬光大。《结构动力学讲义》书稿虽已出版,并不表示它已经完美无缺。我们在教学与科研的过程中,还在不断地思考如何让书稿做得更好一些。同时,很多同行朋友还有学生在阅读本书后,也给我们提出了许多中肯的建议,我们将这些一一记在笔记本上。恰逢此时出版社提议将原稿修改再版。我们也借此机会将近两年的思考反映到新的书稿之中,对原稿部分章节做了适当调整,具体如下:(1)除第 1 章外,其他各章开头增加了一段简短的导言,简述本章与其他章节的衔接关系。(2)第一版 2.4、2.5 与 2.6 节讲述了非驻定势场与第一类拉格朗日方程等内容,这部分难度较大,同时在工程中应用很少,故将相关内容删除。(3)将第一版 5.1 与 5.2 节形成系统矩阵的“对号入座”法则提到第 2 章,使其置于运动方程建立的体系之中,这样可以更好地体现联合运用弹性系统动力学总势能不变值原理与此法则建立系统运动方程的优势。(4)将第一版第 5 章标题改为“多自由度体系反应计算的振型叠加法”,并添加了“体系自由度缩减”一节,着重阐述结构动力学自由度的概念,方便读者理解结构静力与动力自由度之间的区别和联系。如此一来,第 3、4、5 章依次讲述多自由度体系(也包括连续体系)运动方程解耦为单自由度运动方程的方法、单自由度运动方程求解以及多自由度体系反应分析等内容,编排更趋一体,连贯性更强。(5)对结构振动分类、广义力以及哈密尔顿原理等细节性内容作了适当补充。

尽管追求完美一直是我们整理书稿的初衷,但是限于作者水平,错漏之处仍然难免,敬请

各位同行朋友继续批评指正，我们的联系邮箱为：zzhyy@ csu. edu. cn。

最后，向为本书稿完善工作献出劳动与智慧的朋友表示由衷的谢意。在此特别感谢人民交通出版社领导、李喆与周宇编辑长期以来对我们的鼓励与支持。

作 者
2017 年 7 月

第一版前言

1980 年以来，我为长沙铁道学院（现为中南大学）桥梁、轨道、岩土工程、应用力学等专业讲授硕士生课程“结构动力学”。当时，我感到按一般顺序即由单自由度讲到多自由度，许多概念不便交代，如线性体系的微振动、主振动、振动按固有振型展开等。另外，觉得“结构动力学”的根本内容是能量原理的应用；而阐述能量原理如何应用于结构振动分析，必须针对多自由度体系。因此，讲授中先论述多自由度体系的振动分析，得出振型叠加法；然后，问题归结为单自由度体系的振动分析。这样，与一般著作的顺序不一致，学生复习不便，便提议印发讲稿。该讲稿在长沙铁道学院一直沿用 30 余年，油印稿尽管能够一定程度地满足本校研究生的教学需要，但为了让更多学生或科研工作者读到该书稿，决定在原稿的基础上做一定的修改补充将其出版。

本讲义共分为 7 章。第 1 章介绍结构振动的基本概念。第 2 章介绍运动方程的建立，除拉格朗日方程与哈密尔顿原理等经典理论外，还叙述了本人提出的弹性系统动力学总势能不变值原理。第 3 章为线性微振动的正则化方程，从一般多自由度系统出发，推导出解耦的正则化方程，从而将多自由度系统线性微振动方程转化为单自由度方程的求解。第 4 章为单自由度体系的振动，一方面继续阐述第 3 章留下的单自由度方程的求解问题，另一方面引出了动力学的一些物理概念。第 5 章为结构振动问题的矩阵分析，本章特色在于运用本人提出的形成系统矩阵“对号入座”法则，建立矩阵形式的系统运动方程。第 6 章为频率和振型的近似计算，介绍了瑞利能量法、瑞利—里兹法、矩阵迭代法以及子空间迭代法求解结构自振特性的原理与过程。第 7 章介绍了逐步积分法，阐述了逐步积分法的基本思路，介绍了几种代表性的逐步积分方法，并对解的稳定性与精度分析作了详细阐述。

在本讲义整理出版的过程中，我重新梳理了原稿的思路，提出了补充和完善意见。周智辉和文颖两位副教授根据补充和完善意见，查阅相关文献，完成了对原书稿的整理工作。硕士研究生林立科、杨露、钱志东、刘国、姜博、刘征宇、李特完成了本书稿文字打印和图表绘制工作。

本讲义出版过程中，得到了人民交通出版社和周宇编辑的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中的错漏之处在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

曾庆元

2015 年 5 月

目　　录

第1章　结构振动引论

1.1　结构振动问题的重要性

移动车辆、强风、地震、机械制造偏差引起的不平衡力等外部作用都迫使结构发生振动。在不利情况下,振动使结构不能正常使用,噪声强烈,甚至破坏。

1847年英国Chester铁路桥在列车通过时由于剧烈振动而导致桥梁垮塌,首次引出了车桥系统振动分析问题。1940年11月美国塔科马(Tacoma)吊桥在18m/s的大风中动力失稳而破坏,震惊当时的桥梁工程界。1957年武汉长江大桥通车典礼,公路桥面上人山人海、桥梁摇晃,晃动持续到晚上人群散去为止。1966年四川渡口两座钢拱桥由于大量群众聚集而出现晃动,使该桥限制运营。2001年,上海铁路局发现南京长江大桥128m下承简支钢桁梁在提速货物列车通过时,晃动较大,横向振幅超过9mm,担心该梁横向刚度不能满足列车安全运行要求,对桥上列车走行安全性与舒适性进行了评估。

最近几十年,全球处于地震高发期,如1960年智利地震、1976年中国唐山地震、1985年墨西哥地震、1995年日本阪神地震、2001年印度地震以及2008年中国汶川地震,给所在国家经济建设和人们生命财产安全造成了严重破坏。为了减少或避免地震对工程结构物的破坏,必须对一些重点建设项目和地震高设防地区的结构物进行抗震设计。飞机机翼的颤振、发动机的异常振动,曾多次造成飞机事故。在机械工程中,振动影响精密仪器及一些设备的功能,降低机械加工的精度和光洁度,加剧机械部件的疲劳和磨损。振动也有有利的一面,各种发生器,钟表及一些生产设备的振动传输、振动筛选、振动研磨、振动打桩等都是利用机械振动的有利特点。

研究结构振动的目的在于:了解结构振动的机理和规律,从中引出防止或降低振动危害的方法,例如在机械中设法消除或隔离有害振动,在桥梁中防止动力失稳和危害正常使用的振动。

1.2　结构动力学的主要内容

1. 振动位形描述

由于惯性力是导致结构振动的根本原因,因此对惯性力的描述至关重要。惯性力与结构质量有关,其大小为质量与加速度之积,其方向与加速度方向相反。实际结构的质量是连续分布的,因而实际结构中惯性力的大小与方向也是连续分布的,若要准确考虑和确定结构的全部

惯性力,就必须确定结构的振动位形,为此需掌握任意时刻振动位形的描述方法。振动位形一般由结构质点的位置坐标决定。例如:精确地描述简支梁在竖平面的振动需要获取沿梁长度方向连续分布质点的位置坐标 v_n($n=1,2,\cdots$),如图 1-2-1a)所示。这在实际振动分析中非常困难,也无十分必要。作为满足工程精度要求的结构振动近似分析,可将梁划分为有限区段(单元),区段的振动变位由其节点变位来描述。进一步说,梁的动位移可由节点位移来表示。或者将具有分布质量的梁简化为集中质量系,梁的振动位形由各集中质量(节点)的振动坐标确定,如图 1-2-1b)所示。选取合适的振动坐标描述结构振动位形实质是结构动力学计算模型的抽象,关系到计算工作的简繁和计算结果的精粗,是结构振动分析非常重要的第一步。

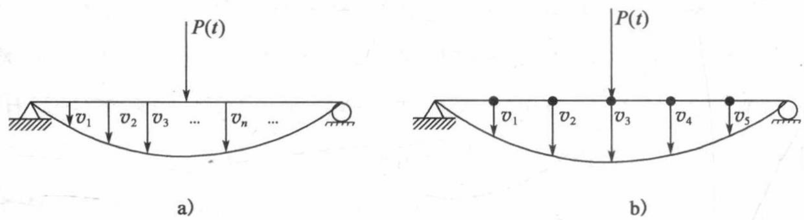

图 1-2-1 梁的振动位形描述

a)分布质量;b)集中质量

2. 激振源分析

引起结构振动的各种因素统称为激振源,实际结构振动的激励源很复杂且受随机因素支配。例如列车对桥梁的动力作用就是很复杂的激扰,它包括轮对蛇行引起的轮轨接触力、车辆惯性偏载、轨道表面空间不平顺产生的附加力等。这些激扰一般难以用确定性的数学式定量描述,但满足统计规律性。地震对结构的动力输入用地震时记录的地震动加速度波表示,但不同地区相同级别的地震加速度波不能用统一的数学式表示,具有随机性。同样,风力对建筑物的作用也是随机的。上述动力作用统称为随机荷载。

实际工程中也存在特殊的振动激励,尽管任意时刻的振动幅值随机变化,但这些变化均是围绕某一确定性均值发生微小波动,这类激励用随时间按确定性规律变化的函数来表述已具有足够的精度。例如匀速转动的转子偏心引起的谐振激扰。

根据激扰作用能否用确定性数学方法描述,结构振动激励分为两大类:

(1)随机性动力荷载——荷载随时间的变化规律不能精确表述,每次试验均得出差异较大的荷载量值,但可由概率论描述量值的统计规律特征。

(2)确定性动力荷载——荷载随时间的变化完全清楚,通过不同次试验能得出基本相同(考虑试验记录误差)的荷载值。其典型形式如图 1-2-2 所示。

确定性动力荷载包括周期性荷载与非周期性荷载。其中,周期性荷载可分为简谐荷载[图 1-2-2a)]与复杂周期荷载[图 1-2-2b)];非周期性荷载可分为持续时间极短的冲击荷载

[如冲击波或爆炸波，图 1-2-2c)]和具有一定持续时间荷载[如实测地震激励，图 1-2-2d)，确定性分析时将它视为确定性荷载]。

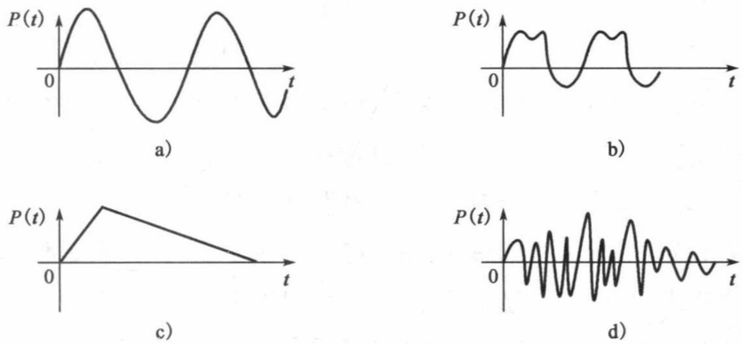

图 1-2-2　典型确定性振动激扰时程

a)简谐荷载；b)复杂周期荷载；c)冲击荷载；d)任意非周期性荷载

3. 振动耗能机理与阻尼力

结构振动过程中出现的机械能耗散机制(阻尼)很复杂，至今未完全分析清楚。与能量耗散相对应的结构振动阻尼力可由下列因素引起：固体材料变形时的内摩擦，结构连接部位的摩擦(例如钢结构螺栓连接处的摩擦)，混凝土裂纹的张开与闭合，结构构件与非结构构件之间的摩擦(如梁与支座的摩擦)，结构周围外部介质引起的阻尼(如空气、流体的影响等)。确切了解阻尼对结构振动的影响，需要先建立各类型阻尼力的数学表达式，这部分内容将在 4.7 节阻尼理论中详细介绍。

4. 振动微分方程的建立

这是解决结构振动问题的关键，也是前述各项工作的落脚点。有很多结构的振动问题无法解决，关键在于不知如何建立具有明确边界条件的振动微分方程，例如研究车轨桥振动问题，必需建立列车—轨道—桥梁系统空间振动方程，而不是分别建立列车、轨道和桥梁运动方程后再进行迭代求解。因为车轮—钢轨相互作用力、位移衔接条件尚属未知，分别建立方程并迭代求解难以得出满足轮轨约束条件的车轨桥系统振动适定解。

建立振动微分方程的主要途径包括：直接动力平衡法和能量方法。采用广义坐标的概念，建立描述结构振动位形的多自由度模型。此时，结构振动规律可用下面微分方程组描述(代表动力平衡方程)

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \tag{1-2-1}$$

式中：$\boldsymbol{q}$——广义坐标(位移)列阵；

$\dot{\boldsymbol{q}}$——广义速度列阵；

$\ddot{\boldsymbol{q}}$——广义加速度列阵；

$\boldsymbol{M}$——质量矩阵；

C——阻尼矩阵;

K——刚度矩阵;

Q——与广义坐标互为能量共轭的广义力列阵。

5. 振动微分方程的求解

线性振动微分方程求解方法比较成熟,可分成以下两大类:

(1)常系数线性振动方程的解法:主要包括经典方法——数值积分法(如 Euler 方法,Runge-Kutta 方法)、变分方法、振型叠加法、逐步积分法、加权残数法。

(2)变系数线性振动微分方程的解法:主要包括变分法、逐步积分法、加权残数法。

非线性振动方程求解至今无普遍的分析解法,一般用小参数法、变分法以及加权残数法求解。随着电子计算机的快速发展,较多采用逐步积分法。

6. 振动测试

振动测试主要目的是检验理论分析结果的正确性、修正理论分析模型和测定理论分析中需要的参数和资料,例如结构各阶固有振动频率、振型,阻尼系数,作为动力输入的地震加速度资料等都是振动测试内容,它们是结构振动分析的基础。

1.3　振动分类

(1)按激扰因素是否定性为随机作用,振动分为确定性振动与随机振动。

(2)按激扰因素的类型,振动分为自由振动、强迫振动、自激振动和参数激振。

①自由振动——外部扰动导致系统偏离初始平衡位置或系统具备初始速度,扰动迅速撤除后系统发生的振动,称为自由振动。

②强迫振动——系统在持续外界激扰下发生的振动,分为与振动初始条件相关的瞬态振动和具有与激扰相同频率的稳态振动。由于阻尼作用,瞬态振动快速衰减,故强迫振动又称为稳态振动。

③自激振动——由系统自身运动引发和控制的振动称为自激振动。分析自激振动时,首先要确定系统的组成部分,此外还要弄清各部分相互作用和系统能量输入与消耗的过程。系统做自激振动时,以系统某一部分的周期振动从外界获取能量,其激振力是系统本身运动的位移、速度和加速度的函数。在自然界里、工程技术中,乃至在人们的日常生活中自激振动无处不在,例如发动机的活塞运动、钟表运动、美国塔科马(Tacoma)桥风致振动以及微风中的树叶振动等。

仔细观察树叶在风力作用下的摆动过程,当微风吹向迎风而立的树叶时,风对叶片的推动使枝条弯曲,改变了叶片的迎风角度。一部分气流沿叶片滑过,减弱了风对叶片的正压力。于是枝条的弹性恢复力使叶片回归原处。如此重复不已,表现为树叶的顺风摆动现象。

归纳一下上述过程:作为恒定能源的风并非周期变化,但它对叶片的作用力是周期变化的。变化的原因在于叶片自身的运动控制了风对叶片的作用。也就是说,叶片的运动成为风力能源的控制阀。这种类型的振动称为自激振动。

④参数激振——外力作用使系统的参数按一定规律变化,由于改变系统参数而产生的振动。摆长作周期性变化的单摆运动是参数激振的一个简单例子[图 1-3-1a)],考虑单摆微振动,其运动方程为$\ddot{\phi}+2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\phi}+\frac{g}{l}\phi=0$,推导过程见例 2-3,可见外力作用使系统参数随摆长 l 按一定规律变化,在系统运动方程中外力并不体现在荷载项。

另一例子是受周期变化轴向压力作用下直杆发生振幅逐渐增大的横向振动[图 1-3-1b)]。轴向力影响直杆横向弯曲振动,周期性变化的轴向力导致横向弯曲振动方程中的参数发生周期性改变(具体方程见文献[2]第 17 章),当作用力频率 $\overline{\omega}$ 与压杆横向振动固有频率 ω 满足一定关系,即 $\overline{\omega}=2\omega/K(K=1,2,3,\cdots)$时,压杆横向振幅越来越大[图 1-3-1c)],以致丧失稳定性,这就是杆件轴线方向激扰力周期性变化激起杆件横向共振现象。

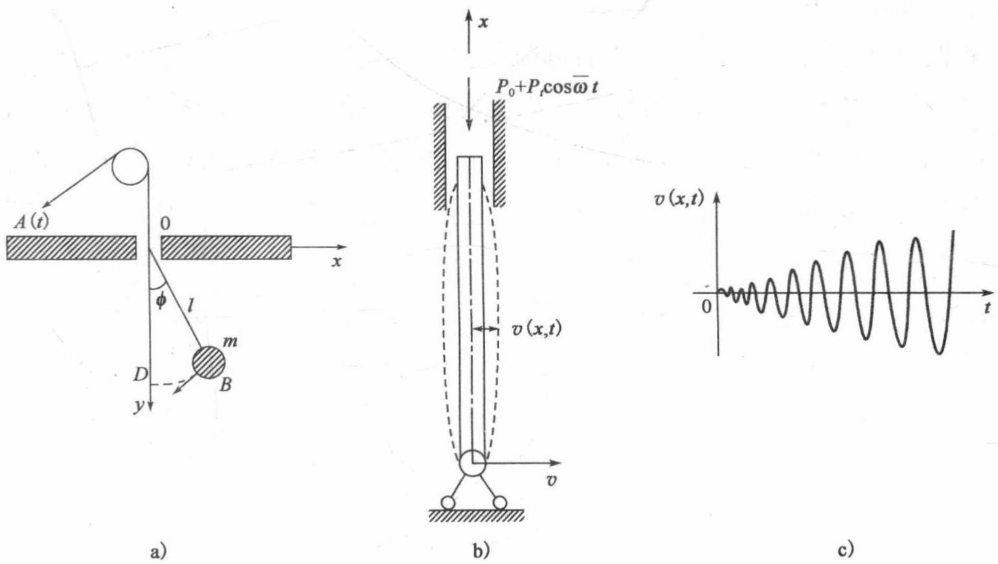

图 1-3-1　参数激振实例与响应特性

a)变化摆长的单摆运动;b)直杆横向振动失稳;c)参数共振响应曲线

(3)按描述系统振动的微分方程是否为线性,振动分为线性振动和非线性振动。

①线性振动——系统在线性阻尼和线弹性恢复力作用下发生的微幅振动,即作用于振动系统的内部抵抗力均可表示成系统状态变量(如速度,位移)的线性函数。

②非线性振动——系统振动状态用非线性阻尼、非线性刚度表征。例如,地震引起的结构破坏性倒塌,强风作用下柔性结构的大幅振动均属于非线性振动。

1.4　振动问题的几种提法

系统受外界激扰作用发生振动,而表述系统振动状态的物理量(如加速度、速度以及位移等)称为响应,也称为反应。激扰称为系统动力输入,响应称为输出,两者由系统的振动特性(质量特性 M、刚度特性 K、阻尼特性 C)联系着,如图 1-4-1 所示。

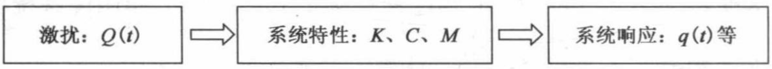

图 1-4-1　描述系统振动的三要素

三者中知其两者就可求第三者,故有以下几种提法:

(1)在外部激扰与系统特性已知的情况下,求系统响应,称为振动分析。

(2)在系统特性与系统响应已知的情况下,反推系统输入特性,称为振动环境预测。

(3)在外部激扰与系统响应均为已知的情况下,确定系统特性称为振动特性测定或系统识别(辨识)。也可改为下面的提法:给定外部激扰,如何设计系统,使得系统响应满足指定条件,这就是振动综合和设计。

工程振动问题往往错综复杂。它可能同时包含系统识别、振动分析、振动综合和设计等几个方面的问题。将实际问题抽象为力学模型,其实质是系统识别问题。按力学模型列方程求解,其实质是振动分析问题。而振动分析并不是问题的终了,其结果还必须用于改进设计,这就是振动综合和设计的问题。

第 2 章　运动方程的建立

除应用牛顿第二定律可直接导出运动系统控制微分方程外，其余建立运动方程的方法都是基于达朗贝尔原理（D'Alembert's Principle），将动力问题转化为动力平衡问题，并运用能量方法简化列式。建立系统运动方程的方法包括：

（1）牛顿第二定律（Newton's Second Law of Motion）。

（2）虚位移原理（Principle of Virtual Displacements）。

（3）拉格朗日方程（Lagrange's Equations）。

（4）哈密尔顿原理（Hamilton's Principle）。

（5）弹性系统动力学总势能不变值原理（Principle of Total Potential Energy with Stationary Value in Elastic System Dynamics）以及形成系统矩阵的"对号入座"法则（The "Set in Right Position" Rule for Formulating System Matrices）[1]。

第（1）（2）种方法在经典力学教材上多有阐述，这里不再赘述。下面主要讲述第（3）~（5）种方法，并进行比较。

2.1　系统的约束、广义坐标及自由度

运动方程描述系统振动形态的变化规律。振动形态的表述与系统约束、广义坐标及自由度等概念相关，故建立运动方程之前，先介绍这些概念。

1. *约束质点系及自由质点系*

讨论系统振动时选取地球作为参照系，取固结于地球的笛卡尔坐标系（如图 2-1-1 所示），该坐标系称为基础坐标系。0 表示坐标系原点。桥梁、房屋等都固结在地球上，不能自由运动，只能作满足外部约束条件的运动。这种系统称为约束质点系，或称非自由质点系。天空中的飞机、飞鸟等能相对于地球（即基础坐标系）沿各方向自由运动，称为自由质点系。其中每个质点在满足系统内部约束条件外，都可以相对于基础坐标系在各方向自由运动。

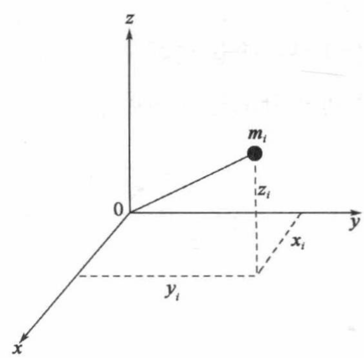

图 2-1-1　基础坐标系下质点位置描述

---

[1] 此原理与此法则由曾庆元院士提出，可以方便地建立具有复杂动力作用的系统有限元方程，已成功解决列车—轨道—桥梁等复杂系统振动方程的建立问题。

2. 约束分类及其数学表述

对质点的位置和速度所施加的几何或运动学的限制称为约束,通过约束方程表示。例如结构边界条件就是一类约束方程。下面简要介绍常见的约束分类。

(1)根据约束方程所涉及的状态变量分为几何约束和运动约束:

几何约束——只限制系统质点的位置。例如图 2-1-2 中质点 m 的位置坐标(x,y,z)必须满足方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \tag{2-1-1}$$

式(2-1-1)称为约束方程,l 为刚杆的长度。由式(2-1-1)可解出 $z = \pm\sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}$,可见只要知道 x、y 即知道 z,故描述质点 m 在 t 时刻空间位置坐标 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 中只有两个坐标是相互独立的。也可取球坐标 $\psi(t)$、$\varphi(t)$ 表示质点 m 的位置,两者是相互独立的,故独立坐标的选择不是唯一的。

运动约束——不仅限制质点位置,还限制质点的运动速度。例如图 2-1-3 所示圆柱滚筒沿水平地面 x 方向运动,其质心 C 的位置必须满足

$$z_C = R \tag{2-1-2}$$

式(2-1-2)为几何约束方程。若只能滚动,不能滑动,则滚筒与地面接触点 D 的速度为零,即

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0 \tag{2-1-3}$$

式(2-1-3)为运动约束方程。经过积分,可得 $x_C = R\varphi + c$(c 为积分常数),运动约束变为几何约束。但是,有些运动约束方程不能积分为几何约束方程。如图 2-1-4 所示,冰刀在冰面上的运动可以简化为杆 AB 在一平面上的运动,而质心 C 的速度 v_C 始终沿 AB 的方向,它在 x 和 y 方向上的两个分速度 $\dot{x}_C$、$\dot{y}_C$ 应满足关系式

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = \tan\theta \quad 或 \quad \dot{x}_C\sin\theta - \dot{y}_C\cos\theta = 0$$

上式是一个运动约束方程,由于杆 AB 和 x 轴夹角 θ 随着体系运动而不断变化,故上式是一个不可积分的运动约束方程。如何判别运动约束方程是否可积,可参考文献[12]。

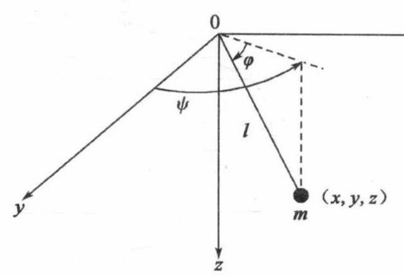

图 2-1-2　描述质点运动的独立坐标

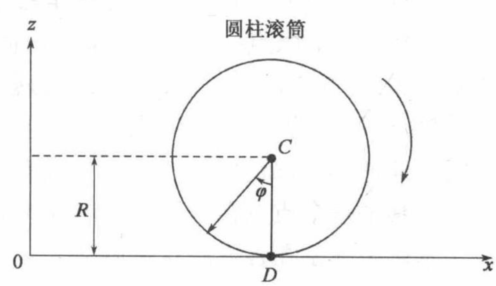

图 2-1-3　圆柱筒水平滚动

(2)根据约束方程是否显含时间变量分为稳定(定常)约束和非稳定(非定常)约束:

稳定约束——约束方程不显含时间变量 t,式(2-1-1)、式(2-1-2)与式(2-1-3)表示的约束

均为稳定约束。

设力学体系由 l 个质点组成,稳定约束方程一般表达式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_l)=0$$

或
$$f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_l,\dot{y}_l,\dot{z}_l)=0 \tag{2-1-4}$$

式中:　$\boldsymbol{r}_i$——第 i 个质点的位置矢量;

$\dot{\boldsymbol{r}}_i$——第 i 个质点的速度矢量;

(x_i,y_i,z_i)——基础坐标系下的第 i 个质点的坐标分量;

$(\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i)$——基础坐标系下的第 i 个质点的速度分量,$i=1,2,\cdots,l$。

非稳定约束——约束方程显含时间变量 t,例如图 2-1-5 所示平面摆的悬支点 j 按 $y_0=a\sin\omega t$ 正弦模式沿铅垂方向上下运动,则质点 m 的约束方程为

$$x^2+(y-a\sin\omega t)^2=l^2 \tag{2-1-5}$$

非稳定约束的一般表达式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_l,t)=0$$

或
$$f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_l,\dot{y}_l,\dot{z}_l,t)=0 \tag{2-1-6}$$

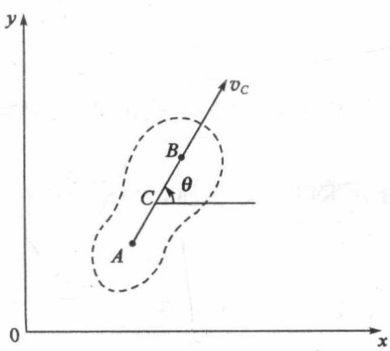

图 2-1-4　冰刀面内运动

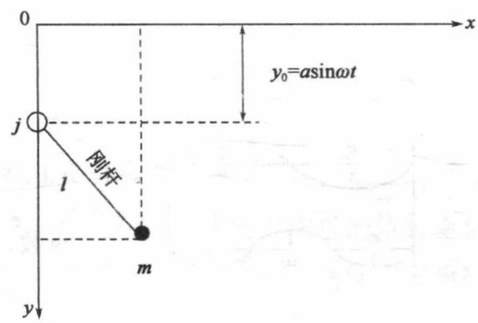

图 2-1-5　作垂向运动的单摆

(3)根据约束方程是否显含质点速度项分为完整约束和非完整约束:

完整约束——几何约束和可积分的运动约束称为完整约束,其约束方程不包含坐标对时间的导数(速度分量)。其一般表示式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,t)=0$$

或
$$f_c(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_l,y_l,z_l,t)=0 \tag{2-1-7}$$

非完整约束——不可积分的运动约束称为非完整约束,其约束方程包含坐标对时间 t 的导数。其一般表示式为

$$f_c(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_l,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_l,t)=0$$