



维尔斯特拉斯 教你学数列极限

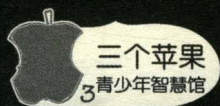
[韩] 罗昭妍 著 王烨 译

考点精讲，高分必备！

- ★ 无限数列
- ★ 无限级数
- ★ 二项式定理
- ★ 收敛数列和发散数列

理解概念 · 掌握应用 · 攻克难题
★ 数学 ★
就得这样学！

全国百佳图书出版单位
时代出版传媒股份有限公司
黄山书社



维尔斯特拉斯

教你学数列极限

[韩] 罗昭妍 著 王烨 译

考点精讲，高分必备！

- ★ 无限数列
- ★ 无限级数
- ★ 三明治定理
- ★ 收敛数列和发散数列

掌握应用，攻克难点
★ 数学 ★
就得这样学！

全国百佳图书出版单位
ARPTIME 时代出版传媒股份有限公司
黄山书社

수학자가 들려주는 수학 이야기

Copyright © 2010 by JAEUM & MOEUM CO., LTD.

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Huangshan Publishing House.

This translation was published by arrangement with Jaeum & Moeum Publishing Co., through Shanghai

All One Culture Diffusion Co., Ltd.

All rights reserved.

图书在版编目 (CIP) 数据

维尔斯特拉斯教你学数列极限 / 【韩】罗昭妍著; 王烨译. — 合肥: 黄山书社, 2015. 12

(数学家教你学数学: 中学版)

ISBN 978-7-5461-5125-0

I. ①维… II. ①罗… ②王… III. ①数学—青少年读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 175877 号

版权合同登记号 图字: 12151528

WEI'ERSITELASI JIAO NI XUE SHULIE JIXIAN

维尔斯特拉斯教你学数列极限

【韩】罗昭妍 著 王烨 译

出品人 任耕耘
总策划 任耕耘 杨雯
执行策划 司雯
责任编辑 程景
特约编辑 古宏伟 赵迪秋
装帧设计 齐娜 李斐斐
出版发行 时代出版传媒股份有限公司 (<http://www.press-mart.com>)
黄山书社 (<http://www.hspress.cn>)
地址邮编 安徽省合肥市蜀山区翡翠路 1118 号出版传媒广场 7 层 230071
印刷 安徽国文彩印有限公司
版次 2016 年 3 月第 1 版
印次 2016 年 3 月第 1 次印刷
开本 710mm×1000mm 1/16
字数 80 千
印张 8.25
书号 ISBN 978-7-5461-5125-0
定价 24.00 元

服务热线 0551-63533706

销售热线 0551-63533761

官方直营书店 (<http://hssbook.taobao.com>)

版权所有 侵权必究

凡本社图书出现印装质量问题,
请与印制科联系。

联系电话 0551-63533725



让我们站在数学巨人的肩膀上， 以更远的目光、更广的视野去观察数学世界吧！

数学教科书往往以“结果”来揭示数学，很难使学生了解数学不断进化的过程。事实上，数学的历史是围绕着一个课题，由众多数学家刻苦研究从而揭示一个个规律性原理的演绎推理过程。

《数学家教你学数学》是古今中外的数学家以他们那亲切的声音直接给我们讲述各种数学原理的产生过程，有助于学生以“现在进行时”来理解数学，而不是以“过去完成时”来理解。

学生对数学产生畏难情绪的主要原因之一是数学较强的“抽象思维”。数学的这一特性恰恰与学生喜欢的“具体思维”相悖。要想缩短“抽象思维”和“具体思维”之间的差距，方法只有一个，那就是在尽量回避数学抽象推理的同时，尽可能地增加对数学概念和原理的具体说明。而《数学家教你学数学》正是生动再现数学教科书的内容，力争使数学“变脸”，将原来抽象的数学改头换面成为具体的数学。此外，书中引用的大量名人逸事和数学家的趣闻，使学生感到枯燥无味的数学很容易变成妙趣横生、回味无穷的数字

游戏。

从结构上看,《数学家教你学数学》首先简要介绍数学家的业绩,然后通过数学家的讲解揭示数学的内在世界和外在世界,从列举的大量例子中说明数学概念和原理,最后再通过一个小结来归纳每节课讲的内容。本丛书的这种结构可以使读者从整体上了解每个数学概念和原理。

《数学家教你学数学》紧扣中学数学教程,尽可能包含中学数学所涉及的全部内容。比如《莱布尼茨教你学记数法》讲述的是数字形成的背景、原始进制法到数位进制法的发展过程、0的出现、莱布尼茨二进制法等方面的故事,如实反映了中学一年级进制法的内容。可见这套《数学家教你学数学》丛书能够起到帮助学生消化和吸收学校数学课程的作用。

伟大的科学家牛顿留下了一句绝世名言:“If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants. (如果说我比别人看得更远些,那是因为我站在了巨人的肩膀上)”没错,如果我们也站在这些数学巨人的肩膀上放眼远眺,就可以用更长远、更开阔的视野去了解数学世界。希望这套丛书能使我们的读者们都有机会站在数学巨人的肩膀上,把数学世界看得更清楚。

弘益大学数学教育系教授、《数学协奏曲》作者 朴京美



用数学眼光看穿世上的真理， 让我们亲身体会真理之伟大的“数列极限”的故事

“无限”这个词在电视节目中经常被提到，所以大家应该并不陌生。但是对于最开始研究它的数学家来说，这可真是一个模糊的概念。他们用“没有界限的、没有完结的、持续下去的……”等字眼来描述它，也曾为是否要把这一概念引入数学界而苦恼。被誉为天才数学家的高斯曾经说过：“无限不应该是数学世界里的概念。”而且在实际生活中，人们必须用到的实数都没有准确的定义，更多的数学家只是用它来解决别的问题。但维尔斯特拉斯却一直在努力着，最终发现了实数的本质和它的完美性，解答了有关无限的问题。

依靠维尔斯特拉斯和其他数学家的努力，我们才看到了实数体系的完美（无矛盾性）和实数与自然数的关系以及欧几里得几何学的完美。还有，在当时困扰众多数学家的无限小、无限大等问题，也通过 ε （伊普西龙）- δ （德尔塔）理论得到了解决。不仅是数列的极限，还有函数的连续性等数学性质都得到了解决。

维尔斯特拉斯不仅是著名的数学家、现代分析学之父，更是一

位受人尊敬、爱戴的好老师。受古德曼教授的影响，维尔斯特拉斯获得了数学灵感并把自己的一生都奉献给了数学，同时他也像他的老师古德曼教授一样，为了让学生们感受到数学的魅力，他无私奉献着自己的知识，兢兢业业地准备上课内容。

大家读这本书时不会觉得“数学太难了”而把书扔到一边吧？数学是一门早在公元前就存在的学科，它的体系严谨缜密，不禁会让人产生畏难情绪。每当这个时候，就请大家想一想书中这些伟大的数学家：维尔斯特拉斯——他连数学王子高斯都认为不应该出现在数学世界里的“无限”都敢于挑战，并且深入研究；康托尔——敢于研究无人涉及的“无限”领域；桑雅·卡巴列夫斯基——在以男性居多的数学家世界中也占有一席之地的女数学家……他们都是大家学习的榜样。

维尔斯特拉斯在教学的同时不断启发学生新的灵感，就让我们来看一看他如何教授我们轻松理解复杂的数列极限知识，树立挑战数学的信心吧。好了，就让我们和维尔斯特拉斯一起向极限的世界出发吧！

罗昭妍



1

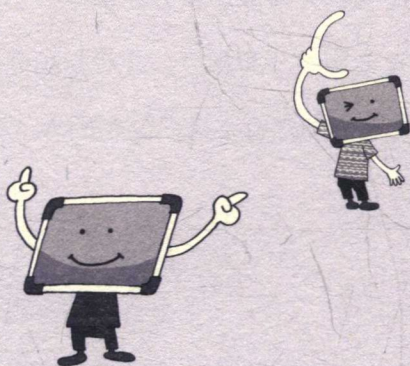
这本书的不同之处

《维尔斯特拉斯教你学数列极限》把求数列极限的方法融入到用线段画出的雪花、足球弹起的高度、吃比萨量的比较、四边形中无限增多的面积之和等在日常生活中我们经常见到的事例中。通过这些事例，数列不再是只有数组成的抽象概念，我们可以饶有兴趣地了解隐藏在它们当中的数学规则，以及正确地理解极限的定义等内容。而且作为微分和积分的基础，了解一下极限产生的过程，再从极限过度到微分和积分，并对微积分有一个简单大致的了解，这本书在这些方面都给了我们很大帮助。

1. 从简单的数列到复杂的阶差数列，全部蕴含有数列的性质，且这些性质多种多样，所以会让人觉得数列很难。但是本书中提到的事例都是在生活中随处可见的，所以大家可以轻松地学习数列的极限。

2. 把数列中的通项通过好朋友自然数自然而然地导入进来，使人更容易理解。加上坐标图像，使数列的变化更加直观，更容易判断数列的收敛或发散。

3. 介绍了数列极限的产生过程，有助于学生记住高中阶段最著名的微积分和数列的关联性。



第一课 无限的世界

- 提前预习：平面图形、线段、自然数、偶数和奇数、斐波那契数列。

- 学习方法：通过列举一对兔子的数量变化过程和形象数的点数以及科赫曲线中边的条数等例子，思考自然数、偶数、奇数中最大的数是什么，理解无限的概念。熟记无限的表示符号。

第二课 无限数列

- 提前预习：乘方、对应、括号、正数和负数、正数和负数的乘法。

- 学习方法：通过第一课的学习，试着发现数列中蕴含的规则，把无限和数列联系起来，轻松理解无限数列的概念。能够找出数列的规则，并熟记规则的表示方法。

第三课 数列的尾巴在哪里？

- 提前预习：分数、比和比例。

- 学习方法：韩国大韩生命 63 大厦那么高的地方掉下的小球弹起的高度、按人头分得的比萨量，通过我们身边的例子，直观地理解数列的极限。并且像 $\{\frac{n}{n+1}\}$ 分子、分母都有 n 的情况，不是直

接求极限，而是先要变形再求极限，并且提到了高中求极限的计算方法，有助于同学们提前掌握。

第四课 无限数列的发散

- 提前预习：数轴。

- 学习方法：配合无限的概念，理解数列的末尾是无限变大的话，那么这个数列就是发散数列。根据符号的不同，区分发散数列种类的不同。通过数轴表示的项与值的关系，了解数列的变化趋势，如发散分为向正负无限的发散和振动。

第五课 我们是相似的

- 提前预习：等号、不等号、三角比。

- 学习方法：熟悉不等号的使用方法后，求解用不等号表示出来的有大小关系的数列的极限。明白即使实际求不出来，也可以通过与其他数列相比较得到结果，这就是三明治定理。另外，通过比较判定法，判定学生易出错的数列极限。

第六课 无限数列之和的尾巴在哪里？

- 提前预习：繁分数、小数。

- 学习方法：在图画纸上上色，上色部分的面积占整张纸的一

部分，虽然无限上色下去，但终归是在纸内，所以上色部分的和一定比整体 1 小。通过这个例子，我们知道加上比 0 大的数，从直观上判断，和一定是个有限的数，可以帮助我们理解无限级数的概念。用同一方法，理解无限小数 $0.\dot{9}$ 与 1 是同一个数。

第七课 为了数学的严谨缜密，维尔斯特拉斯付出的努力

- 提前预习：函数、抛物线、中点、实数。
- 学习方法：理解到现在为止学习的数列、数列的极限等概念，随着维尔斯特拉斯的讲解，了解数列的极限是如何成为一门单独的学科的。还有了解极限与微积分的关系，为高中学习数列、数列的极限、微分和积分与它们的关系打好基础。



数学家简介

维尔斯特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815~1897)

我是德国数学家维尔斯特拉斯，也被誉为现代分析之父。

我一心致力于天才数学家阿贝尔 (Abel) 的理论的研究，

发表了有关阿贝尔函数的论文，

因此，我也被认为是超椭圆函数的先驱数学家，

并有幸担任了皇家技术研究所的教授和柏林大学的副教授。

我致力于学术研究，并把我的成果毫无保留地教给学生，

我把我所有的时间都献给了数学事业，终身未娶。

我非常满足于教师工作，

绝大多数学生都很崇拜我，

虽然我不愿意发表研究成果，

后来我的学生在得到了我的允许后，代替我发表了成果。



大家好，我是维尔斯特拉斯！

我于 1815 年出生在德国的小城市里。我是一位数学家，也被誉为现代分析之父。曾是教师的父亲为了让我能接受正式的教育，以后成为公务员，我们全家搬到了有中学的城市。我按照父亲的意愿，以优异的成绩结束了中学的学习。当时很多人对法律、行政和经济学感兴趣，我父亲也希望我学习这些，我却对待遇不是很好的数学开始有了兴趣。所以我的大学生活就是不去上课，一个人独自学习数学，那段时间的学习为我以后的数学研究打下了坚实的基础。

得知我对数学很感兴趣之后，父亲想让我当老师，所以把我送到了能获得教师资格证的学校。在这里，我遇到了对用幂级数形

态表示椭圆函数感兴趣的数学家古德曼 (Christoph Gudermann, 1798~1852)。古德曼在即使只有我一个学生的情况下,也精心授课。通过学习,我知道了函数的幂级数展开是多么有效的手段,跟随阿贝尔的足迹,在前人“现代数学之父”阿贝尔的基础上更往前迈进了一步。

我按照父亲的意愿,准备着教师资格证的考试,与此同时并没有放弃学数学的想法。在资格考试中,本没有关于椭圆函数的问题,但我拜托古德曼,请他出题。他知道我一向很喜欢数学,努力学习数学,但并不知道我的数学学得怎么样,所以在他看完我的答卷之后,大吃一惊,并且向一所中学推荐了我。之后,我开始了一边教书一边做学术研究的生活,而且经常研究到很晚,随后还在学校的刊物上发表了有关分析性阶乘的论文。

一般来说,数学家都是在小时候就表现出天赋,被称作“天才”,长大后顺利成为数学家的。但是我的经历与他们不同,我是在教学的同时,进行了大量的学术工作。在此期间发表的论文在10年后偶然被众人知晓,得到认同之后,我才成为了大学老师。之后又进入了皇家学校,担任了数学、物理、德语、植物学、历史、书法、体育等多种课程的老师,除此之外,仅有的一点时间我全部献给了数学。有一次,已经到上课时间了我还没有出现在教室,校长直接到家里找我,发现我正在埋头搞研究,因为太投入而忘了时间,竟不知道

天已经亮了，我的桌上还点着蜡烛。

我主要研究天才数学家阿贝尔的理论，发表过与阿贝尔函数有关的论文，并因此被称为超椭圆函数的先驱数学家。以此为契机，我进入了皇家技术研究所，担任教授一职，并被柏林大学聘请担任副教授一职。我全身心地投入到学术研究中，并把自己的理论毫无保留地传授给学生。

我认为“不具有诗人气质的数学家绝不是完美的数学家”。我在想象力和哲学性的逻辑思考的基础上授课，吸引了德国及其他各国的学生来听课，我的课堂经常是人满为患。在中学和大学任教的教学经验和对数学的研究，才使得我能有这样的成绩。对于教学，我有以下看法：

“教学的成功与否和教师能否让学生进行持续性的研究有关。这并不是偶然的，是由课前准备、重点部分的解析实现的，教师应该让学生恰当地把握主要内容。讲解的过程就是对旧知识的再整理、再开发。”

我的“ $\varepsilon - \delta$ 理论”是现今大学分析课程中的基本内容，我整理了均等数列的概念，并用幂级数定义和解析了函数，实现了分析学的算术化，因此被称为“现代分析学之父”。我终身未婚，把全部时间都用在了数学研究上，我也很满足于把我的研究成果教给学生，大部分学生也很认可我的成果。虽然我不愿意发表，但是我的学生