河北省重点学科资助

MOHU SHUXUE JICHU JI YINGYONG

# 模糊数学基础及应用

阎少宏　王 宏　编著

化学工业出版社

河北省重点学科资助

MOHU SHUXUE JICHU JI YINGYONG

# 模糊数学基础及应用

阎少宏　王　宏　编著
刘保相　审



化学工业出版社
·北京·

模糊数学已成为高等院校本科、研究生各专业普遍需要掌握的工具。《模糊数学基础及应用》结合编著者多年的教学经验和亲身体会，本着通俗易懂的原则，简明扼要地阐述了涉及模糊数学各研究领域的基本概念、基本方法及其具体应用实例，力求内容全面，条理清晰，概念明确，难度适中，适合广大理工科专业研究生和本科高年级学生使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

模糊数学基础及应用/阎少宏，王宏编著. —北京：化学工业出版社，2017.12

ISBN 978-7-122-30809-2

Ⅰ.①模… Ⅱ.①阎…②王… Ⅲ.①模糊数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 257219 号

责任编辑：袁海燕　　装帧设计：王晓宇

责任校对：王　静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：北京云浩印刷有限责任公司

787mm×1092mm　1/16　印张 9½　字数 227 千字　2018 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686)　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：39.80 元

# 前　言

FOREWORD

自 1965 年 L. A. Zadeh 发表第一篇模糊集论文开始，模糊数学已被应用到国民经济和科学技术的各个领域，它以其崭新的理论和独特的方法，冲破了精确数学的局限性，巧妙地处理了客观世界中存在着的模糊性现象，在自然科学和社会科学的许多领域取得了令人瞩目的成果，显示出强大的生命力和渗透力。

目前，模糊数学已成为高等院校普遍开设的基础课程。本书结合编著者多年的教学经验和亲身体会，本着通俗易懂的原则，简明扼要地阐述了模糊集合理论的基本概念、基本方法及其简单应用，力求内容全面，条理清晰，概念明确，论证严谨，难度适中，适合广大工科专业研究生和本科高年级学生使用。

《模糊数学基础及应用》全书共七章。第 1 章介绍了经典集合论的相关背景知识；第 2 章详述了模糊集合的基本理论与方法；第 3 章介绍了模糊综合评价的思想与原理；第 4 章阐述了模糊聚类分析的基本概念与内容；第 5 章简述了模糊模式识别的直接方法与间接方法；第 6 章研究了模糊规划部分的主要内容；第 7 章介绍了模糊关系方程的基础知识和简单应用。每章的结尾部分都配有部分习题和程序代码（MATLAB）供读者学习和验证。王宏负责编写第 1、3、5 章，阎少宏负责全书内容的设计和统稿并编写了第 2、4、6、7 章。

本书的编写和出版得到了河北省数据科学与应用重点实验室、河北省应用数学重点学科的大力支持，教材内容通过华北理工大学理学院学术委员会论证通过，委员会主任刘保相教授审阅了全书，数学专业研究生吴宇航校对了全书。在此一并表示感谢。

由于水平有限，且编写时间仓促，书中有不妥之处，恳请读者批评指正。

编著者

**2017 年 11 月**

# 目 录

CONTENTS

## 第 1 章 预备知识



## 第 2 章 模糊集合

## 第 3 章　模糊综合评价



## 第 4 章　模糊聚类分析



## 第 5 章　模糊模式识别

## 第 6 章 模糊规划



## 第 7 章 模糊关系方程

# 第 1 章 预备知识

模糊数学是运用数学方法研究和处理模糊性现象的一门新的数学分支。它以“模糊集合论”为基础。作为学习模糊数学理论的基础，本章主要介绍经典集合论的基本内容、经典关系的基本理论、划分的基本概念。希望通过本章的学习，为读者奠定学习模糊数学理论的数学基础。

## §1.1 经典集合

模糊集合是模糊数学的理论基础。可以认为模糊集合是经典集合的推广和扩充，因此经典集合论是学习模糊数学理论的必备知识。这里只简单介绍模糊数学理论中涉及的集合论中的基本内容。

### 1.1.1 基本概念

集合是一个没有精确定义的基本数学概念，一般地说，集合是具有某种特定性质的事物的全体。常用大写英文字母 $A$，$B$，$X$，$Y$ 等表示。构成集合的事物称为集合的元素，常用小写英文字母 $a$，$b$，$c$，…表示。本书有时称集合为普通集合或经典集合，这是为了区别于模糊集合。$a$ 属于 $A$，记为 $a\in A$，$a$ 不属于 $A$，记为 $a\notin A$。不含有任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。例如，“曲线上所有的点”，“教室里所用的桌子”，“方程组的所有解”……都是集合，而该曲线上的每个点都是“曲线上所有的点”这个集合中的元素、教室里的每张桌子都是“教室里所用的桌子”这个集合里的元素、方程组的任意解都是“方程组的所有解”这个集合里的元素。

根据集合中元素个数是否为有限多个，集合可分为有限集合和无限集合。只含有有限个元素的集合，称为有限集。有限集所含元素的个数称为集合的基数。包含无限个元素的集合称为无限集。以集合作为元素的集合称为集合族。

集合的表示法主要有以下两种。

(1) 枚举法　如由 15 以内的质数组成的集合可表示为 $A=\{2,3,5,7,11,13\}$；自然数集可表示为 $N=\{1,2,3,\cdots\}$。

(2) 描述法　使 $p(x)$ 成立的一切 $x$ 组成的集合可表示为 $\{x\mid p(x)\}$，如

$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$是实数集，简记为$R$；又如集合$B=\{x \mid x^2-1=0, x \in R\}$,实际上是由元素$-1$和$1$组成的集合。

所谓论域是指所论及对象的全体，它也是一个集合，常用$X$，$Y$，…，$U$，$V$，…等表示，有时也称全集。给定论域$U$，$U$中的某一部分元素构成的集合叫做$U$上的一个集合。论域是具有相对性的概念。例如，实数集对于整数集、有理数集而言是论域，而整数集对于偶数集、奇数集而言是论域。下面给出幂集的定义。

**定义 1.1** 设有集合$A$，$A$的所有子集所组成的集合称为$A$的幂集，记为$P(A)$，即$P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$。

设$A=\{a,b\}$，则$A$的幂集为$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

由定义知，幂集是集合，集合里的元素是$A$的子集，由此可见，集合是具有相对性的。

$A$是$U$的子集有两种记法：$A \subseteq U$或者$A \in P(U)$。

经典集合具有两条最基本的属性：元素彼此相异及范围边界分明。给定论域$U$，以及$U$上的集合$A$，那么对于$U$中的任何元素$x$，$x$与集合$A$的关系是：要么属于$A$，要么不属于$A$，二者必居其一且仅居其一。也就是说，经典集合的概念服从二值逻辑。

### 1.1.2 集合的关系和运算

集合的包含概念是集合之间的一种重要相互关系。

**定义 1.2** 设集合$A$和$B$，若集合$A$的每个元素都属于集合$B$，即$x \in A \Rightarrow x \in B$，则称$A$是$B$的子集，记为$A \subseteq B$或$B \supseteq A$，读作“$A$包含于$B$中”或“$B$包含$A$”。

显然$A \subseteq A$，空集$\varnothing$是任何集合$A$的子集，即$\varnothing \subseteq A$。又若$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

**定义 1.3** 设集合$A$和$B$，若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称集合$A$与集合$B$相等，记为$A=B$。

集合的运算主要有交、并、余等。

**定义 1.4** 设$A, B \in P(X)$，$X$是论域，规定：

$A \cup B=\{x \mid x \in A$或$x \in B\}$，称为$A$与$B$的并集；

$A \cap B=\{x \mid x \in A$且$x \in B\}$，称为$A$与$B$的交集；

$A^c=\{x \mid x \overline{\in} A\}$，称为$A$的余集。

集合运算（$\cup$，$\cap$，$^c$）的性质：

**定理** 设$A, B, C \in P(X)$，$X$是论域，则有

幂等律：$A \cup A=A$，$A \cap A=A$；

交换律：$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；

吸收律：$A \cup (A \cap B)=A$，$A \cap (A \cup B)=A$；

分配律：$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C)$，$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$；

0-1 律：$A \cup U=U$，$A \cap U=A$，$A \cup \varnothing=A$，$A \cap \varnothing=\varnothing$；

还原律：$(A^c)^c=A$；

对偶律：$(A \cup B)^c=A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c=A^c \cup B^c$；

排中律：$A \cup A^c=U$，$A \cap A^c=\varnothing$。

这些性质均可由并、交及余集的定义直接推出，集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算。

### 1.1.3 集合的特征函数

现在给出集合的特征函数的定义，它在把经典集合推广为模糊集合的过程中起到重要作用，是定义模糊集合的关键。

**定义 1.5** 设 $A \in P(U)$，具有如下性质的映射

$\chi_A: U \to \{0,1\}, x \mapsto \chi_A(x)=\begin{cases}1, x \in A \\ 0, x \notin A\end{cases}$；称为集合 $A$ 的特征函数。

由定义可知，集合 $A$ 与其特征函数 $\chi_A(x)$ 互相唯一确定。

下面是特征函数与集合之间的几个基本关系：$U$ 为论域，$x$ 为 $U$ 中任意元素。

(1) $A=U \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 1, A=\phi \Leftrightarrow \chi_A(x) \equiv 0$；

(2) $A \subseteq B \in P(U) \Leftrightarrow \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$；

(3) $A=B \in P(U) \Leftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x)$。

这个性质表明 $U$ 的任一子集 $A$ 完全由它的特征函数确定。

特征函数还满足：

$\chi_{A \cup B}(x)=\chi_A(x) \vee \chi_B(x)$；

$\chi_{A \cap B}(x)=\chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$；

$\chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x)$。

此处“$\vee$”是上确界“sup”或理解为“取大”，“$\wedge$”是下确界“inf”或理解为“取小”。

## §1.2 经典关系

### 1.2.1 集合的直积

在日常生活中，有许多事物是成对出现的，且具有一定的顺序。例如，上、下；左、右；平面上点的坐标等。任意两个元素 $x$ 与 $y$ 配成一个有序的对 $(x,y)$，称为 $x$ 与 $y$ 的序对或称序偶，有序是指当 $x \neq y$ 时，$(x,y) \neq (y,x)$；$(x,y)=(x',y') \Leftrightarrow x=x', y=y'$。

**定义 1.6** 设 $X$，$Y$ 是两个非空集合，由 $X$ 的元素与 $Y$ 的元素搭配成的全体序偶组成一个集合，称为 $X$ 与 $Y$ 的直积（或笛卡尔积），记为 $X \times Y$。即 $X \times Y=\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$。

**例 1.1** 设 $X=\{1,2\}$，$Y=\{0,2\}$，则

$$X \times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\};$$
$$Y \times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

一般地，$X \times Y \neq Y \times X$。即，如果把集合的直积作为集合之间的运算，那么该运算不满足交换律。

两个集合的直积可推广为多个集合的直积。

### 1.2.2 经典二元关系

关系是一个基本概念。客观世界中的事物之间普遍存在着某种联系，这种联系就称为关系，其中最简单的就是二元关系。在日常生活中有“父子关系”，“朋友关系”、“师生关系”

等，在数学上有“大于关系”、“等于关系”等。而序偶又可以表达两个对象之间的关系。于是，引进下面的定义。

**定义 1.7** 设 $X$，$Y$ 为非空集合，则 $X\times Y$ 的子集 $R$ 称为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系。特别地，当 $X=Y$ 时，称之为 $X$ 上的二元关系，以后把二元关系简称为关系。

若$(x,y)\in R$，则称 $x$ 与 $y$ 有关系，记为 $xRy$；若$(x,y)\notin R$，则称 $x$ 与 $y$ 没有关系，记为 $x\overline{R}y$。$R$ 的特征函数：

$$\chi_R(x,y)=\begin{cases}1,\text{当 } xRy \text{ 时}\\0,\text{当 } x\overline{R}y \text{ 时}\end{cases} \tag{1.1}$$

为方便，特征函数 $\chi_R(x,y)$常简记为 $R(x,y)$。

**例 1.2** 设 $X=\{1,4,7,8\}$，$Y=\{2,3,6\}$，定义关系 $R\Leftrightarrow x<y$，称 $R$ 为“小于”关系。于是 $R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\}$。

**例 1.3** 设 $X$ 为实数集，则子集 $R=\{(x,y)\mid(x,y)\in X\times X,y=x\}$是实数集上元素间的“相等”关系。

**例 1.4** $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$X$ 上的整除关系定义为：

$R=\{(x,y)\mid x\mid y,x,y\in X\}=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$。

## 1.2.3 关系的运算

**定义 1.8** 设 $R,R_1,R_2\in P(X\times Y)$，定义：

并：$R_1\cup R_2=\{(x,y)\mid(x,y)\in R_1 \text{ 或}(x,y)\in R_2\}$；

交：$R_1\cap R_2=\{(x,y)\mid(x,y)\in R_1 \text{ 且}(x,y)\in R_2\}$；

余：$R^c=\{(x,y)\mid(x,y)\notin R\}$；

逆：$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}\in P(Y\times X)$；

合成：设 $R_1\in P(X\times Y),R_2\in P(Y\times Z)$，则 $R_1$ 与 $R_2$ 的合成 $R_1\circ R_2\in P(X\times Z)$定义为：$R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid\exists y\in Y,(x,y)\in R_1 \text{ 且}(y,z)\in R_2\}$。

**例 1.5** 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，$Z=\{\text{甲},\text{乙}\}$，若

$R_1=\{(1,a),(1,c),(2,b),(3,a),(3,d)\}\in P(X\times Y)$，

$R_2=\{(a,\text{甲}),(c,\text{甲}),(b,\text{乙}),(d,\text{乙})\}\in P(Y\times Z)$，

则 $R_1\circ R_2=\{(1,\text{甲}),(3,\text{甲}),(2,\text{乙}),(3,\text{乙})\}\in P(X\times Z)$。

## 1.2.4 特征关系

关系的特征函数称为特征关系。

**定义 1.9** 设 $R\in P(X\times Y)$，则 $R$ 的特征函数

$$\forall(x,y)\in X\times Y,\ f_R(x,y)=\begin{cases}1 & xRy\\0 & xR^cy\end{cases} \tag{1.2}$$

称为 $R$ 的特征关系。$f_R(x,y)$可理解为 $x$，$y$ 具有 $R$ 的程度。

若从特征关系的角度看关系的运算，则有

（ⅰ）$\forall(x,y)\in X\times Y$，

$f_{R_1\cup R_2}(x,y)=\max(f_{R_1}(x,y),f_{R_2}(x,y))$；

(ⅱ) $\forall(x,y)\in X\times Y$,

$f_{R_1\cap R_2}(x,y)=\min(f_{R_1}(x,y),f_{R_2}(x,y))$;

(ⅲ) $\forall(x,y)\in X\times Y$, $f_{R^c}(x,y)=1-f_R(x,y)$;

(ⅳ) $\forall(x,y)\in X\times Y$, $f_{R^{-1}}(y,x)=f_R(x,y)$;

(ⅴ) $R_1\in P(X\times Y)$, $R_2\in P(Y\times Z)$,则 $\forall(x,z)\in X\times Z$,

$f_{R_1\circ R_2}(x,z)=\max\limits_{y\in Y}\{\min(f_{R_1}(x,y),f_{R_2}(y,z))\}$;

(ⅵ) $R_1\subseteq R_2\Leftrightarrow\forall(x,y)\in X\times Y$, $f_{R_1}(x,y)\leqslant f_{R_2}(x,y)$;

(ⅶ) $R_1=R_2\Leftrightarrow\forall(x,y)\in X\times Y$, $f_{R_1}(x,y)=f_{R_2}(x,y)$。

### 1.2.5 关系的矩阵表示

关系的表示方法很多，除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为方便。有限集之间的关系可用矩阵表示。设

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\},R\in P(X\times Y)\tag{1.3}$$

令

$$r_{ij}=f_R(x_i,y_j)(i=1,2,\cdots,n;y=1,2,\cdots,m),\text{则 } r_{ij}=\begin{cases}1 & x_iRy_j\\ 0 & x_i\overline{R}y_j\end{cases}\tag{1.4}$$

将 $R$ 写成矩阵，有 $\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ & \cdots & \cdots & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{pmatrix}$，矩阵的行数 $n$ 为 $X$ 中元素的个数，列数 $m$ 为 $Y$ 中元素的个数，$r_{ij}=1\Leftrightarrow x_iRy_j$。关系矩阵中的元素或是 0 或是 1，在数学上把诸元素只是 0 或 1 的矩阵称为布尔（Boole）矩阵。因此，任何普通二元关系的矩阵都是布尔矩阵。

**例 1.6** $X=\{2,3\}$，$Y=\{1,2,3,4\}$，从 $X$ 到 $Y$ 的小于关系为

$$R=\{(x,y)\mid x<y,x\in X,y\in Y\}=\{(2,3),(3,4),(2,4)\}\tag{1.5}$$

则 $R$ 可写成矩阵形式 $R=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

关系的各种运算可在矩阵中进行。

若 $R_1=(r_{ij})_{n\times m}$，$R_2=(s_{ij})_{n\times m}$，则

$R_1\cup R_2=(\max(r_{ij},s_{ij}))_{n\times m}$，$R_1\cap R_2=(\min(r_{ij},s_{ij}))_{n\times m}$，$R_1^c=(1-r_{ij})_{n\times m}$，$R^{-1}$ 是 $R$ 的转置。

**例 1.7** $R_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$R_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $R_1\cup R_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，

$$R_1\cap R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ R_1^c=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ R_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

如果两关系均用矩阵表示，则复合关系可用类似于矩阵乘法的方法得到，“乘”换成“取小”，“加”换成“取大”。

**例 1.8** 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$Z=\{z_1,z_2,z_3\}$，从 $X$ 到 $Y$ 的关系

$R=\{(x_2,y_3),(x_3,y_1),(x_4,y_3)\}$，$Y$ 到 $Z$ 的关系 $Q=\{(y_2,z_3),(y_3,z_1)\}$，求 $R\circ Q$。

**解：**

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ R\circ Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

从而，$R\circ Q=\{(x_2,z_1),(x_4,z_1)\}$。与定义式直接运算的结果一致。

## 1.2.6 等价关系与划分

**定义 1.10** 设 $R$ 是 $X$ 上的关系，若 $\forall x\in X$，有 $xRx$，即 $\chi_R(x,x)=1$，则称 $R$ 是自反的。

$\forall x,y\in X$，若 $xRy\Rightarrow yRx$，即 $\chi_R(x,y)=\chi_R(y,x)$，则称 R 是对称的。

$\forall x,y,z\in X$，若 $xRy$，$yRz\Rightarrow xRz$，即 $\chi_R(x,y)=1$，$\chi_R(y,z)=1$，$\chi_R(x,z)=1$，则称 $R$ 是传递的。

设 N 为自然数集，N 上的关系“$<$”具有传递性，但不具有自反性和对称性。

设 $P(X)$ 为 $X$ 的幂集，$P(X)$ 上的关系“$\subseteq$”具有自反性和传递性，但不具有对称性。

为了将集合的元素进行分类，下面引进一个重要的关系——等价关系。

**定义 1.11** 设集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 具有自反性、对称性和传递性，则称 $R$ 是 $X$ 上的等价关系，此时 $xRy$ 又称为 $x$ 等价于 $y$，记为 $x\cong y$。

比如，“同龄关系”，数学上的“$=$”都是等价关系，而朋友关系不是等价关系，因为它不具有传递性。

集合 $X$ 上的等价关系的重要性在于可以将集合 $X$ 分成适当的子集（实际上就是将集合 $X$ 进行分类），为此又引进下面的定义。

**定义 1.12** 设 $X$ 是非空集，$X_i$ 是 $X$ 的一些非空子集，若 $\cup X_i=X$，且 $X_i\cap X_j=\varnothing(i\neq j)$，则称集合族 $\{\cdots,X_i\cdots\}$ 为 $X$ 的一个划分，称集 $X_i$ 为这个划分的一个类（$i\in I,I$ 为指标集），以 $\Pi$ 表示划分，即为

$\Pi=\{X_i\mid X_i\subseteq X$，且 $\forall x\in X$ 恰属于 $X_i\}$。

划分 $\Pi$ 的每一个元素称为一个块，也称为划分的一个类。

当划分的块数为有限时，划分 $\Pi$ 也可表示为

$\Pi=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$n$ 为块数。

显然，对有限集而言，它的划分块数一定是有限的。

**例 1.9** 设 $X=\{1,2,3,4\}$，则 $\Pi_1=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$，$\Pi_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$，$\Pi_3=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$，$\Pi_4=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$，$\Pi_5=\{\{1,2,3,4\}\}$等都是 $X$ 的划分，但 $\Pi'=\{\{1\},\{2,3\}\}$，$\Pi''=\{\{1\},\{2,3\},\{2,4\}\}$等不是 $X$ 的划分。

下面的定理说明了集合 $X$ 上的等价关系与划分（即分类）之间的联系。

**定理** 集合 $X$ 上的任一等价关系可以确定 $X$ 的一个划分（即分类）；反过来，集合 $X$ 的任一划分（即分类）可以确定 $X$ 上的一个等价关系。

**例 1.10** 设论域 $X=$ {某高校全体本科生(四年制)}，在 $X$ 上定义了 $R_1=$“同年级关

系”，显然“同年级关系”是一个等价关系。因此，关系 $R_1$ 把 $X$ 划分为四个不同的年级：$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$，其中 $X_i$ 表示 $i$ 年级，$i=1,2,3,4$。这就表明，论域 $X$ 上的等价关系 $R_1$（同年级关系）可以确定一个划分（分类）：$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$。

**例 1.11** 设论域 $X=$ {某高校学生}，在论域 $X$ 上有一个划分(分类)：$X=$ {男生，女生} $=\{Y_1,Y_2\}$，因为这个划分是按性别划的，所以这个划分可以确定 $X$ 上的一个关系 $R_2=$ “同性别关系”。显然，“同性别关系” $=R_2$ 是一个等价关系。

**定义 1.13** 设 $R$ 是集合 $X$ 上的关系，若关系 $R$ 是自反的、对称的，则称 $R$ 是相似关系。

例如朋友关系、同学关系都是相似关系。

与等价关系一样，相似关系的应用也是非常广泛的。

## 习题 1

1. 证明集合的运算律：

(1) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$；

(2) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

2. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，求直积 $A\times B\times C$。

3. 设 $X=\{1,4,7,8\}$，$Y=\{2,3,6\}$，求 $X$ 到 $Y$ 的“$>$”关系。

4. 利用集合运算性质证明下列等式：

(1) $(A\cap((B\cap C)\cup(A^c\cap C^c)))\cup C^c=(A\cap B\cap C)\cup C^c$；

(2) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$。

5. 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{2,3,4\}$，$Z=\{1,2,3\}$，$R_1$ 是 $X$ 到 $Y$ 的关系，$R_2$ 是 $Y$ 到 $Z$ 的关系，$R_1=\{(x,y)\mid x+y=6\}$，$R_2=\{(x,y)\mid y-z=1\}$，求 $R_1\circ R_2$。

## 参 考 文 献


[1] 李安贵，张志宏，孟艳，顾春. 模糊数学及其应用. 第二版. 北京：冶金工业出版社，2005.

[2] 杨纶标，高英仪. 模糊数学原理及应用. 第四版. 广州：华南理工大学出版社，2006.

[3] A. Shen，N. K. Vereshchagin 著. 集合论基础. 陈光还译. 北京：高等教育出版社，2013.

# 第 2 章 模糊集合

模糊（Fuzzy）数学是运用数学方法研究和处理模糊性现象的一门新的数学分支。它以“模糊集合论”为基础。模糊数学提供了一种处理不确定性和不精确性问题的新方法，是描述人脑思维处理模糊信息的有力工具。它既可用于“硬”科学方面，又可用于“软”科学方面。作为一门新兴学科，它已初步应用于模糊控制、模糊识别、模糊聚类分析、模糊决策、模糊评判、系统理论、信息检索、医学、生物学等各个方面。在气象、结构力学、控制、心理学等方面已有具体的研究成果。本章主要阐述模糊集与模糊关系的基本概念，模糊集的分解定理，模糊等价关系与模糊相似关系等内容。希望通过本章的学习，能使读者初步掌握模糊数学的基础理论知识。

## §2.1 模糊集

模糊数学是研究和处理模糊性现象的一种数学理论和方法。模糊集是模糊数学的理论基础。此处所谓的模糊性，主要是指客观事物的差异在中间过渡过程中的不分明性，如某一生态条件对某种害虫、某种作物的存活或适应性可以评价为“有利、比较有利、不那么有利、不利”等状态；人从身高的角度可以分为“很高、高、中等、矮、很矮”等。这些通常是本来就属于模糊的概念，为借助计算机模拟人类处理分析这些“模糊”概念的数据，便产生了模糊集合论。

### 2.1.1 模糊集的定义

模糊数学将经典数学的应用范围从清晰、精确的传统领域拓展到了模糊领域，相应的将经典集合理论也扩展为模糊集合理论。

**定义 2.1** 已知论域 $U$，在其上做映射 $A$，有

$$A: U\to[0,1],\ u\in U$$
$$u\to A(u),\ A(u)\in[0,1]$$

则称映射 $A$ 是 $U$ 上的一个模糊集，记作 $A$，$A(u)$ 称为 $F$ 集 $A$ 的隶属函数（或称 $u$ 对 $A$ 的隶属度）。

**约定**：为方便，本书将模糊简记为 $F$，论域 $U$ 上的模糊集记为 $F$ 集。论域 $U$ 上的 $F$ 集

合的全体用$F(U)$来表示，本书中称其为模糊幂集，易知空集$\Phi$与论域$U$都属于$F(U)$。

由上述定义不难看出，普通经典集合与$F$集合的差别主要就在于特征函数的值域取值范围，前者是离散集合$\{0,1\}$，后者是连续闭区间$[0,1]$。因此可以认为$F$集是普通集的推广，而普通集是$F$集的一种特殊情况。

通常情况下，根据论域$U$中元素的个数不同分为有限论域与无限论域。有限论域$U$上的一个$F$集合$A$有如下几种表示方法：

(1) Zadeh表示法

$$A=\sum A(u_i)/u_i=\frac{A(u_1)}{u_1}+\cdots+\frac{A(u_n)}{u_n} \tag{2.1}$$

(2) 向量表示法

$$A=(A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n)) \tag{2.2}$$

(3) 序偶表示法

$$A=\{(u,A(u))\mid u\in U,0\leqslant A(u)\leqslant 1\} \tag{2.3}$$

如果$U$是无限论域，$F$集合$A$可表示为

$$A=\int A(u)/u \tag{2.4}$$

**注意：** 式中"/"不是通常的分数线，只是一种记号，它表示论域$U$上的元素$u$与隶属度$A(u)$之间的对应关系；符号"$\Sigma$"及"$\int$"也不是通常意义下的求和与积分符号，都只是表示$U$上的元素$u$与其隶属度$A(u)$的对应关系的一种体现。

**例 2.1** 设某学习小组共5人，用论域$U=\{1,2,3,4,5\}$表示，现在对每个同学的性格稳重程度打分，按百分制打分再都除以100，则给定一个$U$到区间$[0,1]$间的映射，按照$F$集的定义可把"性格稳重程度"看作一个$F$集合$A\in F(U)$，各值属于$A$的程度与其隶属度$A(u_i)$如表2.1所示：

**表 2.1 性格稳重程度**

| $u$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(u)$ | 0.85 | 0.75 | 0.98 | 0.34 | 1 |

请用$F$集的表示方式表示$F$集合$A$。

**解：**

$A$可用不同的方式表示为

(1) $A=\dfrac{0.85}{1}+\dfrac{0.75}{2}+\dfrac{0.98}{3}+\dfrac{0.34}{4}+\dfrac{1}{5}$

(2) $A=\{(0.85,1),(0.75,2),(0.98,3),(0.34,4),(1,5)\}$

(3) $A=(0.85,0.75,0.98,0.34,1)$

**例 2.2** 在标志年龄$[0,150]$的实数轴上，标记出"老年人"和"青年人"的区间。故取论域$U=[0,150]$，$F$集合$A$与$B$分别表示"老年人"和"青年人"。给出他们的隶属函数（图2.1）分别为

$$A(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 150\end{cases}$$