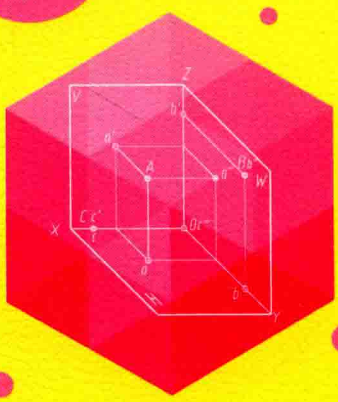
高等数学

（上）



刘鹏飞　李仲庆　主　编
滕　飞　付　军　副主编

清华大学出版社

高等数学

（上）

刘鹏飞　李仲庆　主　编
滕　飞　付　军　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。本书参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合作者多年的教学实践和经验精心编写而成，并配有对应的《高等数学习题解析(上)》(ISBN:978-7-302-47810-2)。

本书共6章。第1章介绍了函数及其运算，数列极限、函数极限的定义与性质，无穷小量与无穷大量的概念与比较，函数的连续性与间断点；第2章介绍了导数的概念和求导法则，隐函数、参变量函数的导数，函数微分的概念和求微公式；第3章介绍了微分中值定理，洛必达法则，函数单调性、极值与最值问题，曲线的凹凸性与拐点；第4章介绍了不定积分的概念与性质，换元积分法和分部积分法；第5章介绍了定积分的概念、性质与应用，微积分基本公式，换元积分法和分部积分法，广义积分的概念与应用；第6章介绍了微分方程的基本概念，一阶微分方程、二阶微分方程。此外，根据章节的知识点内容，本书设置了节习题和总习题模块，便于学生巩固加深对知识点的认知与理解。

本书结构严谨、逻辑清晰、要点突出，既可作为普通高等院校各专业数学课程的教材，也可作为数学教育工作者的参考资料。

本书课件可能过网站 http://www.tupwk.com.cn/downpage 免费下载

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 刘鹏飞，李仲庆　主编. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-47529-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140344 号

责任编辑： 王　定　程　琪
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 曹　阳
责任印制： 李红英

出版发行： 清华大学出版社
　网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
　社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
　投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市金元印装有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 13.25　　**字　　数：** 288 千字
版　　次： 2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 45.00 元

产品编号：071017-01

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。

本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00 元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00 元

本书为《高等数学（上）》，共有 6 章。第 1 章介绍了函数及其运算，数列极限、函数极限的定义与性质，无穷小量与无穷大量的概念与比较，函数的连续性与间断点；第 2 章介绍了导数的概念和求导法则，隐函数、参变量函数的导数，函数微分的概念和求微公式；第 3 章介绍了微分中值定理，洛必达法则，函数单调性、极值与最值问题，曲线的凹凸性与拐点；第 4 章介绍了不定积分的概念与性质，换元积分法和分部积分法；第 5 章介绍了定积分的概念、性质与应用，微积分基本公式，换元积分法和分部积分法，广义积分的概念与应用；第 6 章介绍了微分方程的基本概念，一阶微分方程、二阶微分方程。此外，根据章节的知识点内容，本书设置了节习题和总习题模块，便于读者巩固加深对知识点的认知与理解。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课教材，以及其他数学教育工作者的参考资料。

在编写本书过程中，我们参阅并应用了国内外学者的有关著作和论述，并从中受到了启迪，特向他们表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编者著

2017 年 8 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续 ………… 1

1.1　函数 ………………………… 1

1.1.1　函数及其运算 …………… 1

1.1.2　具有某些特性的函数 …… 3

习题 1.1 ………………………… 5

1.2　数列极限 …………………… 7

1.2.1　数列极限的 ε-N 语言 …… 7

1.2.2　收敛数列的性质 ………… 8

习题 1.2 ………………………… 10

1.3　函数的极限 ………………… 12

1.3.1　函数极限的定义 ………… 12

1.3.2　函数极限的性质 ………… 14

习题 1.3 ………………………… 17

1.4　两个重要极限 ……………… 18

1.4.1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ………… 18

1.4.2　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ ……… 19

习题 1.4 ………………………… 22

1.5　无穷小量与无穷大量 ……… 23

1.5.1　无穷小量 ………………… 23

1.5.2　无穷大量 ………………… 23

习题 1.5 ………………………… 24

1.6　无穷小量的比较 …………… 26

习题 1.6 ………………………… 27

1.7　函数的连续性与间断点 …… 30

1.7.1　连续函数的概念 ………… 30

1.7.2　函数的间断点 …………… 31

习题 1.7 ………………………… 32

1.8　连续函数的运算、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质 ………………………… 34

1.8.1　连续函数的和、差、积及商的连续性 ………………… 34

1.8.2　反函数与复合函数的连续性 ………………………… 34

1.8.3　初等函数的连续性 ……… 34

1.8.4　闭区间上连续函数的性质 ………………………… 36

习题 1.8 ………………………… 37

1.9　总习题 ……………………… 39

第 2 章　导数与微分 ……………… 41

2.1　导数的概念 ………………… 41

2.1.1　问题的提出 ……………… 41

2.1.2　函数在一点处的导数与导函数 ………………………… 41

2.1.3　单侧导数 ………………… 44

2.1.4　导数的几何意义 ………… 45

2.1.5　函数的可导性与连续性的关系 ………………………… 46

习题 2.1 ………………………… 46

2.2　求导法则 …………………… 48

2.2.1　导数的四则运算 ………… 48

2.2.2　反函数的导数 …………… 49

2.2.3　复合函数的导数 ………… 51

2.2.4　总结 ……………………… 52

习题 2.2 ………………………… 53

2.3　高阶导数 …………………… 54

习题 2.3 ………………………… 55

2.4　隐函数的导数、对数求导法、参变量函数的导数 ……………… 56

2.4.1 隐函数的导数 …………… 56
2.4.2 对数求导法 …………… 57
2.4.3 参变量函数的导数 …… 58
习题 2.4 …………………… 59
2.5 函数的微分 ……………… 61
2.5.1 微分的概念 …………… 61
2.5.2 函数可微的条件 ……… 61
2.5.3 求微分 ………………… 62
习题 2.5 …………………… 63
2.6 总习题 ………………… 64
第 3 章 微分中值定理和导数的应用 … 67
3.1 微分中值定理 …………… 67
3.1.1 罗尔定理 ……………… 67
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 68
3.1.3 柯西中值定理 ………… 70
习题 3.1 …………………… 71
3.2 洛必达法则 ……………… 72
3.2.1 $\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限 … 72
3.2.2 其他类型的不定式极限 …… 74
习题 3.2 …………………… 75
3.3 函数单调性、曲线的凹凸性与拐点 …… 77
3.3.1 函数单调性 …………… 77
3.3.2 曲线的凹凸性与拐点 … 78
习题 3.3 …………………… 80
3.4 函数的极值与最值 ……… 82
3.4.1 函数的极值及其判别 … 82
3.4.2 最大值、最小值问题 …… 84
习题 3.4 …………………… 85
3.5 总习题 ………………… 87
第 4 章 不定积分 …………… 89
4.1 不定积分的概念与性质 ……… 89
4.1.1 原函数与不定积分的概念及性质 …… 89
4.1.2 不定积分的基本积分表 …… 91
习题 4.1 …………………… 93
4.2 换元积分法 ……………… 95
4.2.1 第一类换元积分法 …… 95
4.2.2 第二类换元积分法 …… 102
习题 4.2 …………………… 107
4.3 分部积分法 ……………… 110
习题 4.3 …………………… 114
4.4 函数的积分 ……………… 116
4.4.1 有理函数的积分 ……… 116
4.4.2 三角函数有理式的积分 …… 119
4.4.3 简单无理函数的积分 …… 120
习题 4.4 …………………… 121
4.5 总习题 ………………… 123
第 5 章 定积分 ……………… 125
5.1 定积分的概念与性质 …… 125
5.1.1 定积分问题引例 ……… 125
5.1.2 定积分的定义 ………… 128
5.1.3 定积分的几何意义 …… 128
5.1.4 定积分的性质 ………… 130
习题 5.1 …………………… 132
5.2 微积分基本公式 ………… 135
5.2.1 积分上限函数及其导数 …… 135
5.2.2 牛顿—莱布尼茨公式 …… 137
习题 5.2 …………………… 139
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法 …… 141

5.3.1　换元积分法 …………… 141
5.3.2　分部积分法 …………… 144
习题 5.3 ………………………… 145
5.4　广义积分 ……………………… 148
5.4.1　无穷限的广义积分 …… 148
5.4.2　无界函数的广义积分……………………… 150
5.4.3　Γ 函数 …………………… 152
习题 5.4 ………………………… 153
5.5　定积分的应用 ………………… 155
5.5.1　定积分的元素法 ……… 155
5.5.2　平面图形的面积 ……… 156
5.5.3　体积……………………… 159
5.5.4　平面曲线的弧长 ……… 162
习题 5.5 ………………………… 164
5.6　总习题 ………………………… 166
第 6 章　微分方程初步 ………………… 169
6.1　微分方程的基本概念 ……… 169
习题 6.1 ………………………… 172
6.2　一阶微分方程 ………………… 174
6.2.1　可分离变量的微分方程……………………… 174
6.2.2　齐次方程 ……………… 176
6.2.3　一阶线性微分方程 …… 179
6.2.4　全微分方程 …………… 184
习题 6.2 ………………………… 187
6.3　二阶微分方程 ………………… 189
6.3.1　可降阶的二阶微分方程……………………… 189
6.3.2　二阶线性微分方程解的结构……………………… 191
6.3.3　二阶常系数线性微分方程……………………… 194
习题 6.3 ………………………… 201
6.4　总习题 ………………………… 204

第1章　函数、极限与连续

高等数学研究的主要对象是定义在实数集上的函数．函数关系是指变量之间的依赖关系．极限是研究高等数学的基本工具．函数与极限几乎贯穿于整个高等数学始终．本章着重介绍函数、极限、连续等微积分的基本概念.

1.1　函　　数

1.1.1　函数及其运算

1. 函数的概念

定义 1.1.1　设数集 $D\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为这个函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$；函数值 $f(x)$ 的全体组成的集合称为 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y: y=f(x), x\in D\}$.

例 1.1.1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0, +\infty)$.

例 1.1.2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$.

符号函数与绝对值函数有如下关系：

$$|x|=x(\operatorname{sgn}x),\ x=|x|\operatorname{sgn}x.$$

例 1.1.3 设 $x\in\mathbf{R}$，称不超过 x 的最大整数为 x 的整数部分，记为 $[x]$.

例如，

$$\left[\frac{6}{7}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ [-3.4]=-4$$

注 1.1.1 若 $x>0$，则称 $x-[x]$ 为 x 的小数部分．容易证明

$$0\leqslant x-[x]<1 \text{ 或 } x-1<[x]\leqslant x.$$

注 1.1.2 若把 x 看作变量，则 $y=[x]$ 称为取整函数.

2. 反函数与复合函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，在 D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

注 1.1.3 反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的．f 与 f^{-1} 互为反函数，并且有

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D,$$
$$f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(D).$$

定义 1.1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则由

$$y=f[g(x)],\ x\in D_g$$

确定的函数，称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 所构成的复合函数，记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须包含于 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则不能构成复合函数.

例 1.1.4 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=[-1,1]$ 上有定义，且 $g(D)=[0,1]\subset[-1,1]$，则 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\arcsin\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1].$$

3. 函数的运算

给定两个函数 $f(x)$，$x\in D_f$ 和 $g(x)$，$x\in D_g$. 记 $D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，我们定义这两个函数的下列运算：

和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D-\{x:g(x)=0,\ x\in D\}$.

4. 初等函数

在中学数学中，读者已经熟悉下面六类函数.

(1) 常值函数：$y=C$，C 为常数.

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$，$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数.

(3) 指数函数：$y=a^{x}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$.

(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$. 特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这六类函数称为基本初等函数.

定义 1.1.4　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{10-x^{3}}$，$y=\cos 2x$，$y=\ln(1+x^{2})+\sin^{2}x$ 等都是初等函数. 又如，

双曲正弦函数：$\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$；双曲余弦函数：$\operatorname{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切函数：$\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$；双曲余切函数：$\operatorname{coth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$.

这些双曲函数也是初等函数.

1.1.2　具有某些特性的函数

1. 有界函数

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

若存在数 M_1，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有上界函数，称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在数 M_2，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有下界函数，称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

若存在 $M>0$，使得对任一 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1.1.1}$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，$f(x)$ 是 D 上的有界函数. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，此时也就是说对任何 $G>0$，总存在 $x\in D$，使得 $|f(x)|>G$.

注 1.1.4　$f(x)$ 在 D 上有界等价于 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

式(1.1.1)的几何意义：如果 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，那么其图像介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例 1.1.5　函数 $f(x)=\cos 2017x$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的有界函数. 这是因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\cos 2017x|\leqslant 1$.

2. 单调函数

定义 1.1.6 设函数 $f(x)$定义在区间 D 上. 如果对任意的 x_1, $x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

那么称 $f(x)$是 D 上的增函数. 如果对任意的 x_1, $x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2),$$

那么称 $f(x)$是 D 上的减函数. 增函数与减函数统称为单调函数.

注 1.1.5 特别地, 在增函数的定义中, 当成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$时, 我们称 $f(x)$是区间 D 上的严格增函数. 严格减函数的定义类似可写出.

注 1.1.6 函数的单调性与区间有关. 例如, 函数 $y=-x^2$ 在区间$(-\infty, 0]$上是单调增加的, 在区间$[0, +\infty)$上是单调减少的, 但是它在$(-\infty, +\infty)$上不是单调的.

3. 奇函数与偶函数

定义 1.1.7 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为 D 上的奇函数. 奇函数的图形关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$, 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为 D 上的偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 1.1.6 $y=|x|$, $y=\cos x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

$y=x$, $y=\sin x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$y=\sin x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. 周期函数

定义 1.1.8 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T, 使得对于任一 $x\in D$, 有 $x\pm T\in D$, 并且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为周期函数, T 称为 $f(x)$的一个周期. 通常我们说的周期是指最小正周期.

注 1.1.7 并不是每个周期函数都有最小正周期. 例如, 常值函数 $f(x)=C$ 是以任何正数为周期的函数. 狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

是周期函数, 但是它没有最小正周期.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2018x-1}$；

(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(5) $y=\cos\sqrt{x}$；

(6) $y=\tan(x-1)$；

(7) $y=\arcsin(x-1)$；

(8) $y=\sqrt{1-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(1+x^2)$；

(10) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{\lg(5-x)}$；

(12) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；

(13) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arccos\ln\sqrt{1-x}$；

(14) $y=\begin{cases} x^2+3, & x<0, \\ \lg x, & x>0; \end{cases}$

(15) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$；

(16) 已知 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求下列函数的定义域：

① $f(x-4)$；

② $f(\lg x)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 求下列函数的解析式：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x+1)$与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(2) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(x-1)$；

(3) 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$；

(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}+\tan x$；

(3) $f(x)=x(1-x)$；　　(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

5. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

7. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\ln\sin^2 x$；　　(2) $y=5^{\cos\sqrt{x}}$；

(3) $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=\cos^2(\ln x)$.

8. 求下列复合函数：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

9. 分别就 $a=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$是不是复合函数. 如果是，求其定义域.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

11. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

12. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$.

1.2　数列极限

我国古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，其含义是：一根长为一尺的木棒，每天截取一半，这样的过程可以无限地进行下去．它包含了朴素的极限思想．在整个高等数学中，极限占据着重要地位．本节和下面的1.3节，我们分别关注数列的极限和函数的极限.

1.2.1　数列极限的 ε-N 语言

1. 数列的定义

若函数 f 的定义域为全体正整数集合 $\mathbf{N}_+$，则称函数

$$f(n),\ n\in\mathbf{N}_+$$

为数列．因 $\mathbf{N}_+$ 的元素可按从小到大的顺序排列，故数列 $f(n)$ 也可写作

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

或者简记为 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为该数列的一般项或通项.

例如，

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}:\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \cdots$$

$$\{3^n\}:\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots,\ 3^n,\ \cdots$$

$$\left\{\frac{1}{3^n}\right\}:\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \cdots,\ \frac{1}{3^n},\ \cdots$$

它们的一般项依次为 $\frac{1}{n}$，$\frac{(-1)^n}{n}$，3^n，$\frac{1}{3^n}$.

2. 数列极限的通俗定义(不精确)

对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

3. 数列极限的精确定义(ε-N 语言)

定义 1.2.1　设 $\{x_n\}$ 为一数列，a 为定值．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，定值 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

上述数列极限的 **ε-N** 语言可以简写为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbf{N}_+,\text{ 当 } n>N \text{ 时，有 } |x_n-a|<\varepsilon.$$

其中，记号 $\forall$ 表示“对任意的”“对每一个”，$\exists$ 表示“总存在”.

如果数列$\{x_n\}$没有极限，就说数列$\{x_n\}$不收敛，或称$\{x_n\}$是发散数列.

例 1.2.1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

分析 $|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$. $\forall\,\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$，需要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证明 $\forall\,\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N}_+$，则当 $n>N$ 时，便有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

这样就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

例 1.2.2 设 $0<|q|<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

分析 要使

$$|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon,$$

只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon+1$ 就可以了，故可取 $N=[\log_{|q|}\varepsilon+1]$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=[\log_{|q|}\varepsilon+1]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

这样就有$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

1.2.2 收敛数列的性质

定理 1.2.1(唯一性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

证明(反证法) 假设同时有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，且 $a<b$，按数列极限的定义，对于 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，存在充分大的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}$$

及

$$|x_n-b|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}.$$

因此同时有

$$x_n<\frac{a+b}{2} \text{ 及 } x_n>\frac{a+b}{2}.$$

这是不可能的．所以只能有 $a=b$.

对于数列$\{x_n\}$，如果存在$M>0$，使得对一切正整数n都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

则称数列$\{x_n\}$是有界的．如果这样的正数M不存在，就说数列$\{x_n\}$是无界的.

例如，数列$\{(-1)^n\}$是有界的．因为可取$M=1$，则对一切正整数n都有

$$|(-1)^n|\leqslant 1.$$

定理 1.2.2(有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

证明 设$x_n\to a(n\to\infty)$. 根据数列极限的定义，对于$\varepsilon=1$，存在正整数N，对一切$n>N$，有

$$|x_n-a|<\varepsilon=1,$$

于是当$n>N$时有

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|,$$

记

$$M=\max\{1+|a|,\ |x_1|,\ |x_2|,\ \cdots,\ |x_N|\},$$

则对一切正整数n都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

这就证明了数列$\{x_n\}$是有界的.

注 1.2.1 若数列$\{x_n\}$无界，则$\{x_n\}$必发散．这是定理 1.2.2 的逆否命题.

定理 1.2.3(保号性) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数$N$，使得当$n>N$时有$x_n>0$(或$x_n<0$).

证明 设$a>0$（$a<0$的情形可类似证明），由数列极限的定义，对于$\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，存在正整数$N$，使得当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

推论 1.2.1 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$)，且数列$\{x_n\}$收敛于a，那么$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

证明 设$x_n\geqslant 0$($x_n\leqslant 0$的情形可类似证明)，数列$\{x_n\}$从N_1项起，即当$n>N_1$时，有$x_n\geqslant 0$，现在用反证法证明．倘若$a<0$，则由定理 1.2.3 知，存在正整数N_2，当$n>N_2$时，有$x_n<0$，取$N=\max\{N_1,\ N_2\}$，当$n>N$时，按假定有$x_n\geqslant 0$，但是按定理 1.2.3 有$x_n<0$，这引起矛盾．所以必有$a\geqslant 0$.

接下来我们给出一个数列极限的存在准则.

定理 1.2.4(夹挤原理) 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) 从某项起，即 $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的**子数列**.

定理 1.2.5(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

证明 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列．因为数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，取 $K=N$，则当 $k>K$ 时，$n_k>n_K=n_N\geqslant N$. 于是 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.

注 1.2.2 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列 $\{x_n\}$ 发散.

注 1.2.3 有界的数列不一定收敛．例如，$\{(-1)^n\}$ 是有界的但却是发散的．这是因为它的奇数子列收敛于 -1，但是其偶数子列收敛于 1.

注 1.2.4 若数列 $\{x_n\}$ 的奇数子列和偶数子列均收敛于 a，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

最后我们给出数列极限的四则运算法则.

定理 1.2.6(四则运算法则) 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\ \lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

那么 $\{x_n\pm y_n\}$，$\{x_n\cdot y_n\}$ 也都是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n=A\pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n=A\cdot B.$$

当 $y_n\neq0(n=1,2,\cdots)$ 且 $B\neq0$ 时，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}.$$

习题 1.2

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$；

(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n}$；　　(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=n\cdot(-1)^n$.