ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

常微分方程

何希勤 屠良平 武力兵 卢飞龙 编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

高等学校教材

常微分方程

何希勤　屠良平
武力兵　卢飞龙　编著

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程 / 何希勤等编著. —沈阳：东北大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5517-1640-6

Ⅰ. ①常…　Ⅱ. ①何…　Ⅲ. ①常微分方程　Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 187295 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路三号巷 11 号

邮编：110819

电话：024-83687331（市场部）　83680267（社务部）

传真：024-83680180（市场部）　83687332（社务部）

网址：http：//www.neupress.com

E-mail：neuph@neupress.com

印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：170mm×240mm

印　　张：11.5

字　　数：213 千字

出版时间：2017 年 8 月第 1 版

印刷时间：2017 年 8 月第 1 次印刷

组稿编辑：周晓天

责任编辑：刘乃义

责任校对：叶　子

封面设计：潘正一

责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1640-6　　　　定　价：34.80 元

前言

作为一门经典的高等数学类基础课程，常微分方程理论是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的具有几百年悠久历史的学科。其生命力如此之强，主要原因是它在自然科学与工程技术领域中具有广泛应用。众所周知，数学巨匠牛顿（Newton）首先借助于微分方程这个有力的数学工具计算出地球围绕太阳的运动轨道是椭圆，海王星也是通过对微分方程的近似计算而发现的。进一步，19世纪的伟大数学家拉格朗日（Lagrange）利用线性微分方程方面的重要成果在天体力学上取得了卓越成就。19世纪末，庞加莱（Poincare）和李雅普诺夫（Lyapunov）分别创立了微分方程的定性理论和稳定性理论，构成了控制领域工程师设计稳定闭环控制器的标准分析框架。近几十年来，混沌（Chaos）、孤立子（Soliton）及分形（Fractal）等非线性新现象的重大发现，都是以微分方程为基础来进行研究的。

正是因为微分方程这门学科深厚的应用背景，并且经过众多数学家的共同努力，常微分方程的应用范围已渗入到当代机械、电子、化工、生物、材料、金融及其他社会学科的各个领域中。特别地，常微分方程是高校本科数学类专业的一门数学基础课程，内容涉及数学分析、高等代数课程中的知识点。另外，现代控制理论、泛函微分方程理论、物理学、流体力学等许多近代学科中的大量问题都可以利用微分方程来进行分析和处理。当然，我们不能将上面提到的方方面面都写入到这样一本基础课数学教材中，只能介绍微分方程中的常用理论和求解方法。本书以培养理论基础扎实、实际动手能力强、具有创造性思维的应用创新型人才为目的，内容与以往的同类教材有明显不同，具有以下特色：

（1）在每一章的开头部分，我们都就全章的主题及其背景资料进行了概括性介绍。同时，命题阐述和定理证明的过程简明严谨、思路清晰，并且多处给

出提示性或思考式的注记，以扩展读者思路，力求对所研究问题的认识更加透彻，增强本教材的可读性。

（2）重要章节的求解方法灵活多样、覆盖面广，易于学生接受和掌握。例如，第4章第4.4节中针对常系数线性微分方程组的求解问题，我们分别给出了直接定义法、Laplace变换法、Jordan标准形法和Sylvester方法等多种求解方法，既扩充了学生的知识面，同时也在一定程度上提升了他们的创新思维能力。

（3）数学建模可以培养学生利用高等数学知识解决实际应用问题的创新实践能力。在全国大学生数学建模竞赛中，有许多竞赛题目涉及微分方程的知识，如最优捕鱼策略、SRAS的传播、中国人口增长预测，以及嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略等。为此，我们在教材中选择的实际应用建模例子具有很强的代表性和实用性，尤其在第7章分别针对几类典型的实际微分方程模型（教育问题模型、卫星发射模型等），详细地给出了建模、求解和生成系统动态曲线的过程。

（4）教材中以突出应用、实用为目的，以“必需够用”为原则，兼顾知识的完整性与可持续性。在习题选择上，分为基础性习题和补充性习题，其中，前者面向的是没有考研意向的学生，后者针对的是学习能力强并且想在学业上继续深造的学生，且收集的题目均出自名校研究生入学考试题目。同时，本教材配有相应的习题解答参考书，以减轻授课教师留课后作业和讲解习题的负担。

（5）教材前7章没有涉及利用软件求解方程的应用方法，而在最后一章中重点介绍了MATLAB这种功能强大的计算机数学语言，并给出了应用于常微分方程典型例子的语言程序代码供学生参考和学习。

本书共分为8章。第1章介绍了常微分方程及其解的基本概念，并且概述了微分方程的发展简史。第2章详细介绍了一阶常微分方程的初等解法，主要的方法有分离变量法、变量替换法、常数变易法、积分因子法及引入参数法等。线性微分方程理论和常系数线性微分方程的解法分别放在第3章和第4章，鉴于常系数线性微分方程在理论和实际中的重要性，我们给出了算子解法、比较系数法和Laplace变化法等多种求解方法。第5章介绍了解的存在性、唯一性定理，Peano定理以及解的延拓等微分方程中的重要基本理论。现

代定性理论在第6章介绍，通过对奇点、周期解、极限环等微分方程具有特殊性质的特解加以分析、研究，进而对常微分方程所确定的解的总体大范围性态做出合理的判断。第7章给出了一些微分建模的经典例子，它们来自众多的实际问题和学科领域。第8章重点介绍了如何利用计算机数学软件MATLAB来求解微分方程（组），以及生成绘图曲线。

编著本教材的目的是为理工类本科学生提供一本基础内容全面、理论框架清晰、应用特色突出的微分方程教材。本书第1章和第2章由卢飞龙编著，第3章和第4章由武力兵编著，第5章和第6章由何希勤编著，第7章和第8章由屠良平编著。此外，各章节习题的编写和解答由丁桂艳和洪丽莉负责，特此致谢。

在编著过程中，我们得到了辽宁科技大学译著出版基金的资助，在此一并致谢。

由于作者的学识水平有限，教材中的欠缺和疏漏在所难免，诚请读者对本书提出宝贵意见和建议。

编著者

2017年2月于辽宁科技大学理学院数学系

目 录

第1章 绪 论

方程对于我们来说并不陌生，代数方程、函数方程、矩阵方程等都是以前学过的方程类型，这些方程都是要把所研究问题中的已知量和未知量之间的关系找出来，列出包含一个或多个未知量的一个或多个方程式，然后求方程的解。但在许多实际问题中，常常出现一些和上述方程完全不同的情形。比如，在应用数学方法研究物体运动的规律时，往往不能直接写出反映运动规律的量与量之间的关系，但比较容易建立这些变量和它们的导数之间的关系。凡是表示自变量、未知函数及其导数之间的关系的方程，都称为微分方程。如果未知函数是一元函数，则该微分方程称为**常微分方程**。而如果未知函数是多元函数，则该微分方程称为偏微分方程。微分方程源于实践，是人们解决各种实际问题的有效工具，它在自然科学和社会科学的许多领域，如物理学、化学、生物学、自动控制、电子技术、航空航天、生命科学、经济等都有着广泛的应用。微分方程作为现代数学的一个重要分支，与数学的其他分支存在密切的联系，也是数学联系实际的主要桥梁之一。

本章先给出生产实践与社会生活中几个常见的常微分方程模型，接着介绍常微分方程的一些基本概念及简单叙述一下常微分方程的发展历史。

1.1 微分方程与数学模型

应用数学方法研究自然现象和社会现象的问题，一般先要建立数学模型，再对模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论。微分方程就是常用的一种数学工具。下面，通过几个常见的基本问题来扼要说明这个过程，同时也可以看到微分方程的广泛应用，第7章中将详细讨论利用常微分方程来建立数学模型。

例1 人口模型[1]。

1798年，英国人口统计学家马尔萨斯（Malthus）出版了《人口原理》一书，其中提出了闻名于世的Malthus人口模型：单位时间内人口的增长量与人口成正比。在此假设下，试推导人口随时间变化的数学模型。

设 t 时刻的人口数量为 $N(t)$，比例系数为 r，根据Malthus的理论，在 t 到 $t+\Delta t$ 的时间段内，人口增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=N(t)\Delta t,$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=N(t).$$

两边取极限，令 $\Delta t\to 0$ 得

$$\frac{dN}{dt}=rN.$$

若假设 $t=t_0$ 时的人口数为 N_0，于是得

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN,\\ N(t_0)=N_0\end{cases}\tag{1.1.1}$$

这就是著名的Malthus人口模型。实际上，式（1.1.1）就是一个微分方程的定解问题，如果能求出满足该方程的函数 $N(t)$，则就了解了人口随时间的增长规律。

例2 L-R-C电路模型。

如图1.1所示，L-R-C电路是由电源（S）、电阻（R）、电感线圈（L）、电容（C）和开关（K）组成的电路。

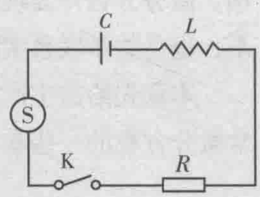

图1.1 L-R-C电路

设电源的电动势为 $\varepsilon(t)$，电阻大小为 R，电容大小为 C，电感系数为 L。

当开关K关闭时，就形成了L-R-C电路。

根据基尔霍夫第二定律，闭合回路的电压降为零，得

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}-\varepsilon(t)=0.$$

其中，Q，I，$\varepsilon(t)$ 都是时间 t 的函数。上式两边对 t 求导，得

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=\varepsilon'(t).\tag{1.1.2}$$

式（1.1.2）就是所谓的电路方程，实际上就是一个常微分方程。

例3 悬链线。

如图1.2所示，一均匀、柔软的绳子，两端固定，绳子仅受重力的作用而下垂，试求该绳子在平衡状态下是什么样的曲线。

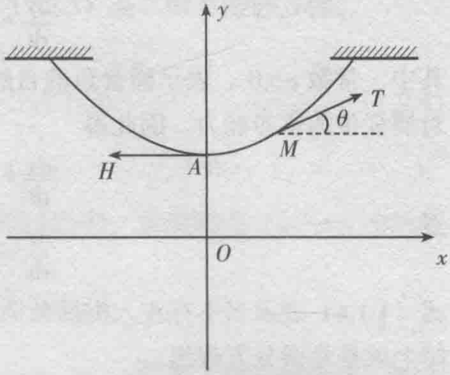

图1.2 悬链线

根据力学原理，得

$$T\sin\theta=\rho gs,\quad T\cos\theta=H.$$

其中，T 为在点 M 处的张力，θ 为其倾角，H 为在点 A 处的张力，ρ 为绳子的线密度，g 为重力加速度，s 为 AM 的弧长。

将上两式相除，得

$$\tan\theta=\frac{1}{a}s\qquad\left(a=\frac{H}{\rho g}\right).$$

记绳子曲线的方程为 $y=y(x)$, 于是

$$\tan\theta=y',s=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

代入上式得

$$y'=\frac{1}{a}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

将上式两端对 x 求导，得绳子曲线所满足的方程为

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}.\tag{1.1.3}$$

式（1.1.3）其实就是一个二阶常微分方程。

例4 两生物种群生态模型[2]。

意大利生物学家棣安考纳（D'Ancona）发现，某海港在第一次世界大战期间捕鱼量减少，而捕获到的捕食鱼占的百分比却急剧增加。为解释该现象，意大利数学家沃特拉（Volterra）建立了一个关于捕食鱼与被食鱼生长情形的数学模型。

沃特拉把所有的鱼分成两类：被食鱼与捕食鱼。设 t 时刻被食鱼的总数为 $x(t)$, 而捕食鱼的总数为 $y(t)$，捕食鱼的存在，致使被食鱼的增长率降低，设单位时间内它们相遇的次数为 bxy （常数 $b>0$ ），于是有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy.$$

其中，常数 $a>0$ ，表示被食鱼的自然净相对增长率。

类似地，捕食鱼的数量亦满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-cy+dxy.$$

其中，常数 $c>0$ ，表示捕食鱼的自然净相对减少率；常数 $d>0$ ，表示被食鱼对捕食鱼的供养能力。因此得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=ax-bxy,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=-cy+dxy.\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

式（1.1.4）表示当不存在人类捕鱼活动时，捕食鱼与被食鱼应遵循的规律，实际上就是常微分方程组。

通过常微分方程建立数学模型来解决实际问题的例子举不胜举。以上4个问题仅仅是沧海一粟，但也能大致说明常微分方程应用的广泛性及如何从实际问题导出微分方程（组）。但一般来说，建立准确描述实际问题的微分方程（组）的过程是比较复杂和困难的，需要具备相关学科的丰富知识及扎实的数学基础知识。

1.2 基本概念和常微分方程的发展简史

在本书中只讨论实值常微分方程，即自变量、未知函数均为实数的常微分方程。

1.2.1 常微分方程的基本概念

我们已经知道常微分方程是只有一个自变量的微分方程。以后，在不致发生混淆的情况下，可简称为“微分方程”或“方程”。

例如，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sin y-x=0,\tag{1.2.1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^y-1=0,\tag{1.2.2}$$

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=0\tag{1.2.3}$$

都是具体的常微分方程，其中， x 是自变量， y 是未知函数（因变量）。微分

方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶数**。如方程（1.2.1）与方程（1.2.2）都是一阶常微分方程，方程（1.2.3）是二阶常微分方程。

一般的 n 阶常微分方程具有如下形式：

$$F\left(x, y, y, \cdots, y^{(n)}\right)=0. \tag{1.2.4}$$

其中，x 是自变量；y 是未知函数；$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right)$ 是 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的已知函数，并且必须含有 $y^{(n)}$。在一般的讨论中，常假设式（1.2.4）中的最高阶导数可以被解出，即下面的形式：

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.2.5}$$

在式（1.2.4）中，如果函数 F 关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 是一次有理整式，则称式（1.2.4）为**线性微分方程**。n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x).$$

其中，$a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数。

例如，方程（1.2.3）是二阶线性微分方程。

不是线性微分方程的方程称为**非线性微分方程**。

例如，方程（1.2.1）和方程（1.2.2）都是非线性微分方程。

如果将函数 $y=y(x)$ 代入方程（1.2.4）后，能使之成为恒等式，则称函数 $y=y(x)$ 为方程（1.2.4）的**解**。

由于微分方程的解是函数，而函数的表达式通常有显式 $y=y(x)$、隐式 $\Phi(x, y)=0$ 及参数形式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$（$t$ 为参数），故其解就有相应的多种表示形式。

例如，考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}, \tag{1.2.6}$$

容易验证由等式 $x^2+y^2=1$ 所确定的函数满足方程（1.2.6）。同样容易验证参数方程 $\begin{cases}x=\cos t,\\y=\sin t\end{cases}$ 所确定的函数也满足方程（1.2.6）。

如果由关系式 $\Phi(x, y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 是方程（1.2.4）的解，则称 $\Phi(x, y)=0$ 为方程（1.2.4）的**隐式解**。如果由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$（$t$ 为参数），所确定的函数是方程（1.2.4）的解，则称其为方程（1.2.4）的**参数式解**。简单起见，以后把解、隐式解及参数式解统称为方程的解，不加以区别。

在常微分方程的解中，可能含有一个或几个任意常数，并且它们的个数恰好与方程的阶数相同。含有 n 个相互独立的任意常数 c_1，c_2，…，c_n 的解 $y=y(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为方程（1.2.4）的通解。解对常数的独立性是指：函数 y，y'，…，$y^{(n-1)}$ 关于 n 个常数 c_1，c_2，…，c_n 的雅可比（Jacobi）行列式不为零，即

$$\frac{D\left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)}{D(c_1, c_2, \cdots, c_n)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

类似地，可以定义方程（1.2.4）的隐式通解和参数式通解。

为了确定常微分方程一个特定的解，通常要知道这个解所必须满足的条件，这就是所谓的**定解条件**。常见的定解条件有初值条件和边值条件。本书重点讨论初值条件。所谓方程（1.2.4）的初值条件，是指如下的 n 个条件：

当 $x=x_0$ 时，$y=y_0, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}$，

其中，x_0，y_0，$y_0^{(1)}$，…，$y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数。有时可写为

$$y(x_0)=y_0, \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(x_0)}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)}.$$

求微分方程满足定解条件的解，称为定解问题。当定解条件是初值条件时，相应的定解问题，称为**初值问题或柯西问题**。当定解条件是边值条件时，相应的定解问题，称为**边值问题**。

把满足初值条件的解称为微分方程的特解。初值条件不同，对应的特解也不同。一般来说，特解可以通过初值条件，从通解中确定任意常数而得到。

初值问题的解都是唯一的，这是不是普遍的规律呢？答案是否定的。事实上，可以构造出无穷多个分段解。

思考题1：在什么条件下，初值问题的解唯一？

思考题2：通解与全部解是否一样？

为了便于研究方程的解的性质，常常可以借助于解的几何图形，一阶微分方程的解 $y=y(x)$，在 xOy 平面上的图形为一条平面曲线，称它为方程的**积分曲线**；通解则表示 xOy 平面上的一族曲线，称为方程的**积分曲线族**。

可以用 $f(x, y)$ 在 xOy 平面某区域 D 上定义过各点小线段的斜率方向，

这样的区域 D 称为方程所定义的**方向场**或**向量场**。方向场中方向相同的曲线 $f(x, y)=k$ 称为**等倾斜线**或**等斜线**。可以利用取不同 k 值的等斜线来判别积分曲线的分布性态、走向。向量场是研究常微分方程的一种重要方法。

由两个及两个以上的关系式表示的常微分方程称为**常微分方程组**。

1.2.2 常微分方程的发展简史

常微分方程是由人类生产实践的需要而伴随着微积分的发明而产生的。1676年，莱布尼兹（Leibnitz）在给牛顿（Newton）的信中第一次提出"微分方程"这个名词，1693年，惠更斯（Huygens）在《教师学报》中明确提到了微分方程。

对常微分方程的研究按时间可分为如下几个阶段：

（1）18世纪及其以前

17—18世纪是常微分方程的发展初期，主要研究内容为：对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解，属于"求通解"时代，是常微分方程发展的经典阶段。这期间，很多数学前辈做了大量的工作，取得了丰富的成果。1691年，莱布尼兹（Leibniz）首先提出了分离变量法，解决了形如 $\frac{dx}{dy}=f(x)g(y)$ 的方程。同年，他用变量变换的方法解决了齐次方程 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$。1693年，他又给出了线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ 的求解方法。1694年，瑞士数学家约翰·伯努利（Bernoulli John）在《教师学报》上对分离变量法与齐次方程的求解做了更加完整的说明。1695年，约翰·伯努利提出了方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n$。莱布尼兹于1696年证明了：只要做变量代换 $z=y^{1-n}$，即可将此化为线性微分方程。1712年，黎卡提（Riccati）在研究曲线的曲率半径时得到了方程 $y'=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2$。1760年，欧拉（Euler）发现，若已知方程的一个特解 y^*，即可用代换 $y=z+y^*$ 将其化为线性微分方程。1841年，刘维尔（Liouville）证明了该方程没有一般的初等解法。黎卡提方程至今仍然在研究常微分方程的振动等性质时起着十分重要的作用。欧拉和克莱罗（Clairaut）分别于1734年和1739年给出了 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 为全微分方程的充要条件是：$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$。当上述条件不满足时，往往可以将方程乘上一个量即积分因子，使之成为全微分方程。欧拉还证明了：凡是可分离变量的

方程，均可用积分因子方法求解。于是，他曾试图用积分因子的方法来统一处理一阶常微分方程。对于二阶及高阶微分方程，黎卡提、欧拉、达朗贝尔（Dalembert）、拉格朗日（Lagrange）等都做了大量的工作，给出了一些至今我们都还学习的方法和结论。大约到17世纪80年代，常微分方程的初等解法已基本告一段落。此后约100年没有发现新的重要解法，直到19世纪末才引入了拉普拉斯（Laplace）变换法和算子法。伯努利方程、黎卡提微分方程都是在这一时期被提出并且被后人以他们的名字命名的方程。1694年，莱布尼兹还发现了方程解族的包络，1718年，泰勒（Taylor）提出了奇解的概念，欧拉、拉格朗日、凯莱（Cayley）、达布（Darboux）等数学家都对奇解进行了研究。

图1.3

戈特弗里德·威廉·莱布尼兹（1646—1716），德国哲学家、数学家，历史上少见的通才，被誉为17世纪的亚里士多德。

图1.4

莱昂哈德·欧拉（1704—1783），瑞士数学家和物理学家，数学史上最多产的数学家之一，研究著作几乎涉及数学的所有分支。

（2）19世纪初期和中期

早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔在1841年证明了黎卡提方程不存在一般的初等解而中断。加上柯西问题的提出，常微分方程从“求通解”转向“求定解”时代，主要研究定解问题的适定性理论。

19世纪20年代，柯西（Cauchy）用欧拉折线法证明了初值问题$y'=f(x,\ y)$，$y(x_0)=y_0$的解的存在性定理。随后，在假定右端函数是解析函数时，他进一步给出了解存在唯一性的严密证明。1876年，德国数学家李普希兹（Lipschitz）提出了著名的“李普希兹条件”，对柯西给出的解的存在唯一性定理做了改进。在适定性的研究中，与柯西、李普希兹同一时期，还有皮亚诺（Peano）和皮卡（Picard），他们先后于1875年和1876年给出了常微分方程的逐次逼近法，进一步研究了常微分方程的基础理论，包括解的存在性及唯一性、解的延拓、解对初值和参数的连续依赖性和可微性、奇解等。

另一方面，1836年，斯图姆（Sturm）研究热传导时，证明了二阶齐次线性方程两个线性无关的解的零点是互相交错的以及两个二阶齐次线性方程解的零点位置的比较定理。这种不需要求出解而去探求解的性质的研究方法，是关于微分方程定性理论的开创性的工作。同时，针对线性微分方程，特别是二阶线性微分方程，可以通过定义一些特殊函数以求特殊方程，如贝塞尔（Bessel）函数、勒让德（Legendre）多项式等，这些问题的研究又产生发展了微分方程的解析理论。

图1.5

刘维尔（1809—1882），法国数学家。证明了黎卡提方程不存在一般解。

（3）19世纪末期及20世纪初期

19世纪末，天体力学中的太阳系稳定性问题需研究常微分方程解的大范围性态，从而使常微分方程的研究从“求定解问题”转向“求所有解”的新时代。

1881年，庞加莱（Poincare）创立了常微分方程的定性理论。此后，为了寻求只通过考察常微分方程本身就可以回答关于平衡解稳定性等问题的方法，他从非线性方程出发，发现微分方程的奇点起关键作用，并把奇点分为四类，讨论了解在各种奇点附近的性态。同时还发现了一些与描述满足微分方程的解曲线有关的重要的闭曲线，如极限环等。希尔伯特（Hilbert）提出了20世纪23个数学问题中关于极限环个数的第16问题，大大促进了定性理论的发展。

图1.6

亨利·庞加莱（1854—1912），法国数学家、天体力学家、数学物理学家、科学哲学家，被公认为19世纪后期和20世纪初期的领袖数学家，是对于数学和其应用具有全面知识的最后一个人。

常微分方程定性理论中另一个重要领域是李雅普诺夫（Lyapunov）提出的运动稳定性理论。1892年，李雅普诺夫的博士论文《论运动稳定性的一般问题》给出了判定运动稳定性的普遍的数学方法与理论基础，用于解决方程解的初值扰动不影响解的趋向问题，在天文、物理及工程技术中得到了广泛的应用。

同时，常微分方程定性理论的一系列课题，成为动力系统理论的开端，为动力系统开辟了一个新的领域。

除定性、稳定性和动力系统理论外，非线性振动理论、摄动与奇异摄动理论及变换群理论在20世纪也得到了迅速发展。