图的理论算法和应用

（第一册）

王介生

中国科学院计算技术服务社讲习班

一九八一年十月

目　　录

（一）

第一章 [illegible]子图

1。1 图和简单图

图在直观上可以表示作一个由点和连接这些点的线段组成的几何图形。点称作顶点，线段称作边，从最一般的意义上说，点数或边数可以是无限的，任意两个顶点间可以有多于一条的边（称作有多重边），一条边的两个端点也允许是同一个点（这样的边称作自回路）。

顶点数或边数只要有一个是无限的，这样的图就称作无限图，否则，称作有限图。在运筹学和技术科学中遇到的几乎全是有限图。对无限图，我们将不予讨论。在有限图中，我们把允许有多重边或自回路的图称作一般图，把没有多重边和自回路的图称作简单图。

每个边的两个端点可以是有序的，也可以是无序的，前者称作有向图，或箭头图。后者称作线图，或简称为图，有向图我们将在第九章予以讨论，其它章以讨论线图为主。

我们将对[illegible]给出较为严格的定义，在此之前，我们先介绍一些和集合有关的符号。

一个集合可以用两种方式给定，例如：

$V = \{v_1, v_2, \cdots\cdots v_n\}$ ； V是由v_1，v_2，……U_n等元素组成的集合；

$V = \{v \mid d(v)$ 为偶数$\}$： V是由$d(v)$为偶数的那些v组成的集合；

元素与集合间的关系可如下表示：

$v \in V$： v是V的元素，$v \bar{\in} V$，v不是V的元素；

集合……有如下关系：

$V_1=V_2$：集合V_1和V_2相等，即V_1的元素都是V_2的元素，反之亦然；

$V_1\subseteq V$：V_1是V的子集合（可能等于V）；

$V_1\subset V$：V_1是V的真子集，即至少有一个元素v，$v\in V$而$v\bar{\in} V_1$，如$\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$；

集合与集合间主要有如下运算，每个运算的结果都是个新的集合：

$V_1\cup V_2$：V_1与V_2的并，即由V_1中的元素以及V_2中的不同于V_1中的元素的元素组成的集合；

$V_1\cap V_2$：V_1与V_2的交，即由V_1、V_2中的公共元素组成的集合。

V_1-V_2：由V_1中不属于V_2的元素组成的集合（$V_2\subseteq V_1$）；

例：$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$；

$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$；

$\{1,2,3\}-\{1,2\}=\{3\}$。

此外，我们还常用$|V|$来表示集合V中元素的个数。$|V|=0$的集合称作空集，记作Φ。

定义1.1　　简单图。

设V是一个非空的有限点集，E是一个有限集合，其元素为V中不同元素的无序对，则称由V和E组成的有序二元组……为简单图G，即$G=(V,E)$或记作$G(V,E)$。

在上述定义中，E可以是空集。当$E=\Phi$时，G称作零图；定义

中的V是顶点集合，E是边集合，两个顶点u、v间的无序对uv或vu称作边，它对应于图的几何表示中u、v两点间的连线，$uv \in E$，即说明u、v间有边相连。如v是G的一个顶点，uv是G的边，也可分别记作$v \in G$或$uv \in G$（而不记作$v \in V$或$uv \in E$）。

$|V|$是图G的顶点数，$|E|$是G的边数。今后如无特别说明，总是用n、m分别表示它们。

在所讨论的图不只一个时，我们往往用V（G），E（G）来表示图G的顶点集合和边集合。这一约定也适用于今后将引进的其它概念。

在用几何图形表示一个图时，顶点的相对位置和边的长短曲直都是无关紧要的。一个图G可以通过给出V、E来给出，也可以用几何图形给出。G中的顶点可标以不同的数字或名字，称作标号。这时G称作是标定的。标定图中的边作为顶点的无序对当然也被赋给了名字，但有时为方便起见，还可以不用其端点的名字来表示而给出另外的名字。

例1、图G可以如下给定：

$$G=(V, E)$$

$$V=\{u、v、x、y\},$$

$$E=\{uv、ux、vx、xy\}。$$

例2、图G可给定如下：

$$G=(V, E),$$

$$V=\{u、v、x、y\},$$

$E = \{a, b, c, d\}$,

其中，$a = uv$，$b = ux$，$c = ux$，$d = xy$，

例3、图G可用几何图形给出。Fig1·1(a)，(b)给出的标定图，(c)是非标定图。

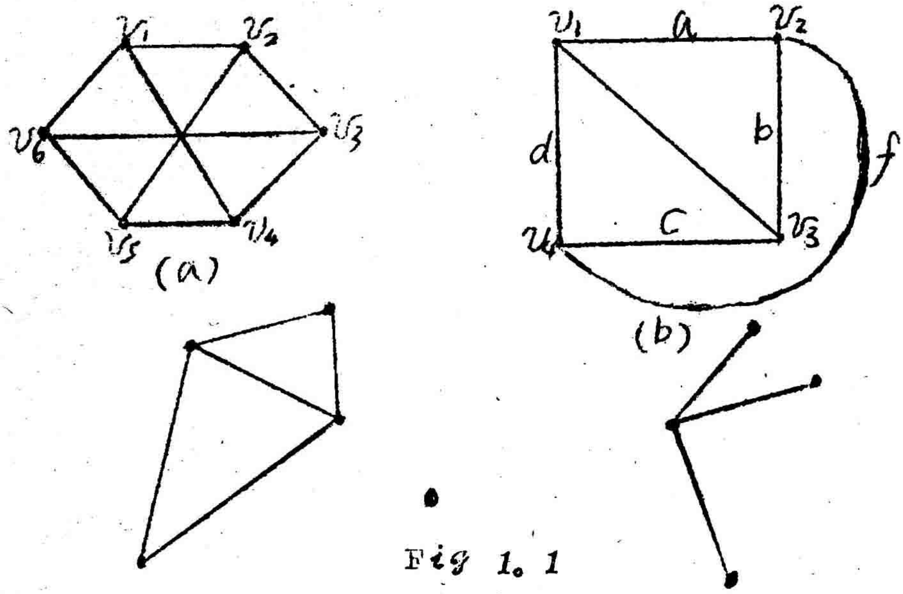


Fig 1。1

注意，按照集合的定义，其所有元素都不允许重复。故定义1.1给出的图中没有多重边。如果E(G)是族(即其[illegible]可以重复)，且每个点对不一定由V中相异元素组成，则可以得到一个允许有多重边和自回路的图，即一般图。今后如果不会引起混淆，我们把简单图和一般图都简称为图。只是在必要时才明确地加以区别。Fig1。2给出了一般图的一个例子。

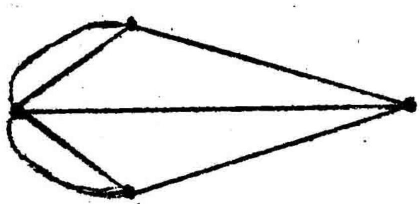


Fig 1。2

1-2、顶点的度数

设u、v是顶点而e是边。如果$e=uv$，则称u或v与e相关联。如果两个边（不是多重边）都与同一个顶点相关联，或两个顶点间有一条边，则称这两个边或这两个顶点相邻接

定义1。2　　度数

与任意顶点相关联的边的个数（如果自回路按两条边计算）称作v_i的度数，记作$d(v_i)$。

我们把图G中度数为奇数的顶点称作奇顶点，度数为偶数的顶点称作偶顶点。度数为k的顶点可称作k度点（$k=0,1,2\cdots\cdots$），零度点也称为孤立顶点。顶点度数的最小值称作最小度数，记作δ，最大值称作最大度数，记作ρ，所有顶点的度数之和称作总度数。

关于顶点的度数，有以下基本事实：

引理1。1（握手引理）图G的总度数等于边数的两倍　即：

$$\sum_{v\in V} d(v)=2m。$$

这一引理之所以成立，是因为在计算总度数时，每个边（包括自回路）都刚好被计算了两次。正如在握手时，每握一次都关联到两只手。

定理1。2　　任一图G，其奇顶点的个数为偶数。

证明　　可把V分作两个不相交的子集V_1，V_2，分别是奇顶点和偶顶点的集合。则：

$$\sum_{v\in V} d(v)=\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)。$$

显然，$\sum_{v\in V_2} d(v)$ 是偶数，由握手引理，知 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 也是偶数。

对所有 $v\in V_1$，有 $d(v)$ 为奇数，故仅当 $|V_1|$ 为偶数时，$\sum_{v\in V_1} d(v)$ 为偶数，即奇顶点的个数是偶数。证完

根据图G中顶点度数的不同情况，可定义以下两类重要的图：

定义 *1*。3　　正则图

若图G中的所有顶点都有相同的度数，则称G为正则图。如这一公共度数是k，则称之为k－正则图。

定义 *1*。4　　完全图

如简单图G是（n－*1*）－正则图，则称G为完全图，记作 K_n（n为顶点个数）

显然，完全图也可以这样给出：完全图是任意两个顶点都有边连接的简单图。

F*ig 1*。3给出了一个3－正则图和K_5

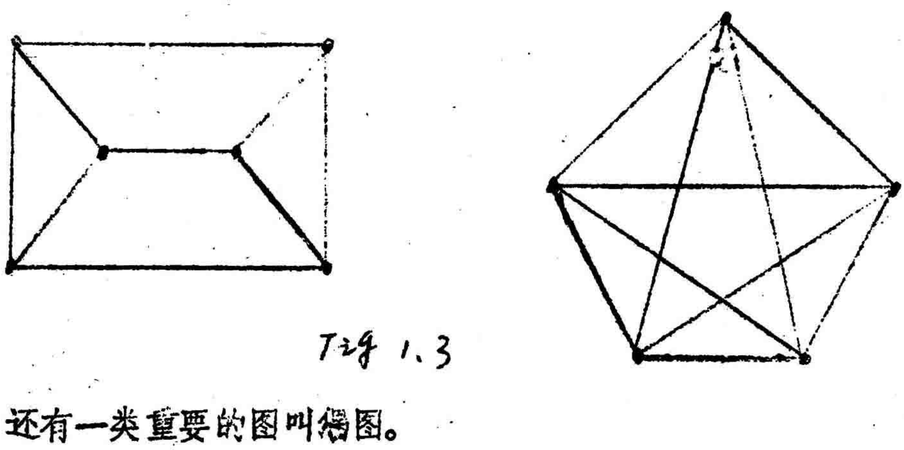


Fig 1.3

还有一类重要的图叫偶图。

定义 *1*。5　　偶图，　完全偶图。

如果可把一个图的顶点集合分成两个不相交的子集X和Y，使每

个边都有一个端点属于X，另一个端点属于Y，则称此图为偶图，记作G（X、Y），顶点集合的这样一个分划（X、Y）也称作图的偶分划。

如果简单偶图有如下性质：X的每一顶点与Y中的每一顶点间都有一条边，则称此图为完全偶图。如 $|X| = m$，$|Y| = n$，则记作 $K_{m, n}$。

Fig1。2中给出的图就是完全偶图 $K_{3, 3}$。

定义1。6　边图。

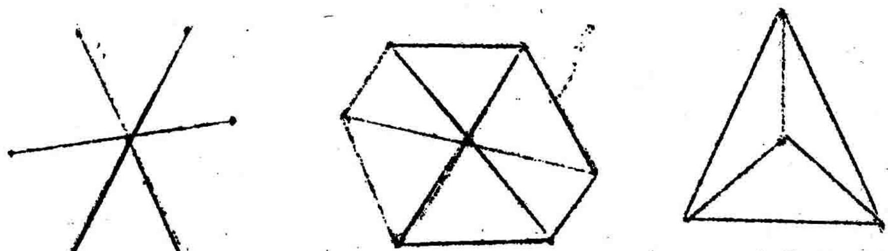
G的边图是这样一个图：它的顶点与G的边一一对应，当且仅当G中的两个边邻接时，对应的顶点在边图中邻接。

下面，我们再介绍几种常见的或有趣的图。

(1)　星形图：　完全偶图 $K_{1, s}$ 也称为星形图。如Fig1。4，(a)

(2)　轮形图：　Fig1。4(b)中的那种图称作轮形图，有n个顶点的轮形图记作 W_n。

(3)　三次图：　3－正则图也叫三次图。如Fig1。4(c)。



(a)　(b)　(C)

Fig1.4

(4)　K－立方图（Q_k）：顶点对应于向量（a_1，a_2，……a_k），其中 a_i ＝ 0或1。当且仅当两个向量只有一个分量不同时，对应顶

点间有一条边。Fig 1。5 绘出了3－立方。

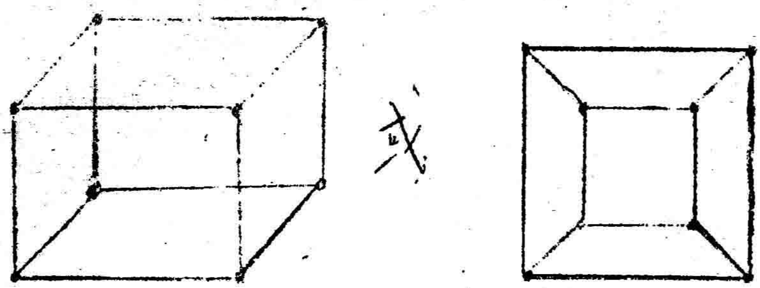


Fig 1。5

(5) 彼得森（Petersen）图：Fig1。6 中的图称为彼得森图。

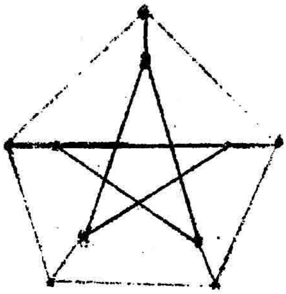


Fig 1。6

(6) 柏拉图（Platonic）图：Fig 1。7 中的图称为柏拉图图。

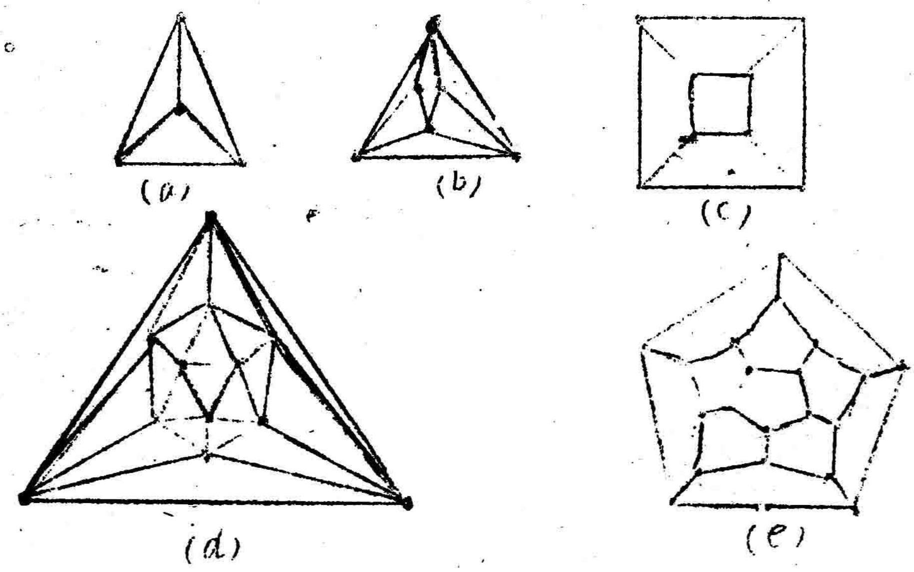


Fig 1。7

显然，其中（a）是K_4，（c）是3－立方图。它们也都是3次图。

1-3 同构，图的运算

定义 1.7 同构图

设G，G′是两个给定的图，如果在两个图的顶点集合间存在某种1－1对应，使得G中任意两个顶点间的边数与G′中对应顶点间的边数相等，则称G与G′同构，或互为同构图。记作G＝G′。

显然，同构关系是图的一个等价关系。

对于边和顶点都没有标号的图，同构图不过是同一个图的不同的画法（如Fig 1.8）。对于有标号的图，除了画法可能不同外，顶点和边的标号（也就是名字）也可能不同（如Fig 1.9）

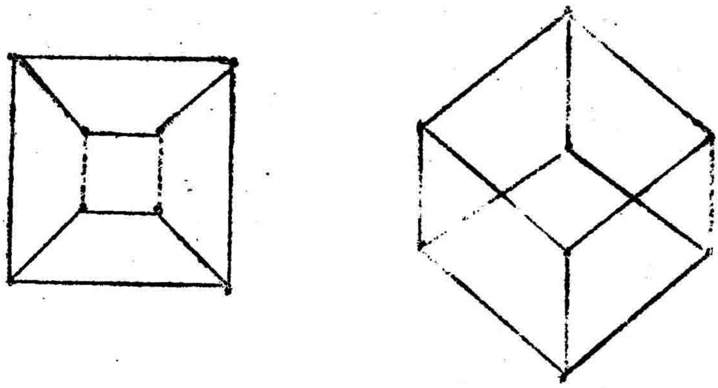


Fig 1.8

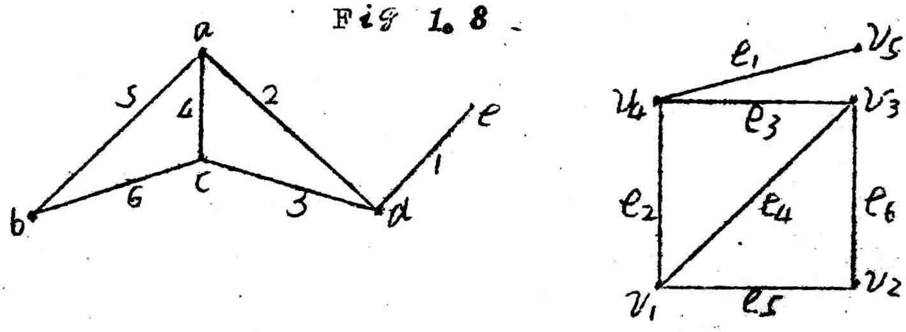
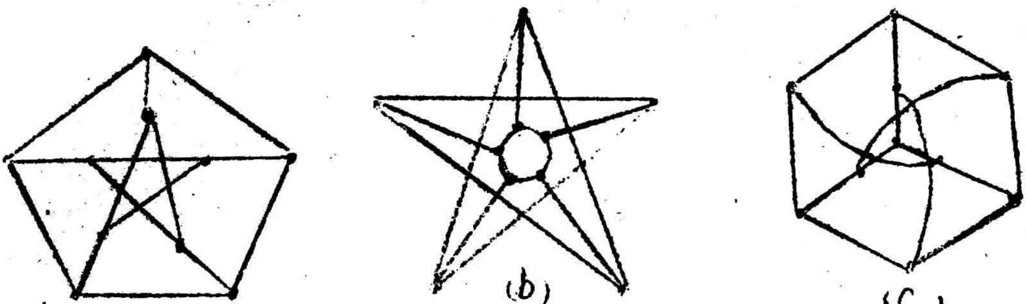


Fig 1.9

Fig 1.10 中给出的三个图也是同构的。这可以通过把图重画并加上标号来验证，我们把它作为习题留给读者。



(a) (b) (c)

Fig 1.10

由定义立即看出，两个图同构有以下必要条件：

(1) 顶点个数相同

(2) 边数相同

(3) 度数为给定值的顶点数相同

但是，这些条件并非充分条件。例如，Fig 1.11 中的两个图虽然满足这三个条件，但仍不同构，因为在图G中，u、v两个顶点间有一条边，而在G′中，u，[illegible]顶点u'与v'间却没有边连接

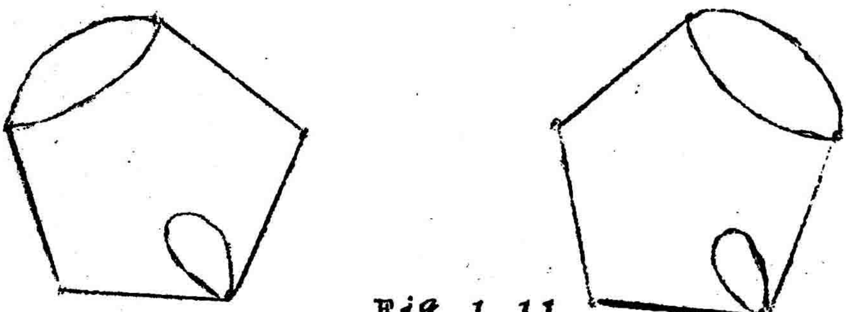


Fig 1.11

判明任意给定的图是否同构是图论中的一个难题，现在，人们正致力于寻求检验性同构图的简单而有效的法则。

在图论研究中，有时需要把一个大型的图考虑作许多较小的图的：

组合，用比较小的图的性质来推导较大的图的性质，这就需要 引进图与图的运算。我们先介绍其中最基本的三个，其它运算我们将在需要时陆续引进。

定义1．8　　图的并

两个图G_1（V_1 E_1）和G_2（V_2，E_2）的并是另外一个图G_3，记作$G_3=G_1\cup G_2$，其顶点集合$V_3=V_1\cup V_2$，边的集合$E_3=E_1\cup E_2$。

定义1．9　　图的交

G_1 G_2 的交$G_3=G_1\cap G_2$ 是这样一个图，它的顶点集合$V_3=V_1\cap V_2$ 边集合$E_3=E_1\cap E_2$

Fig 1．12给出了两个图的并和交。

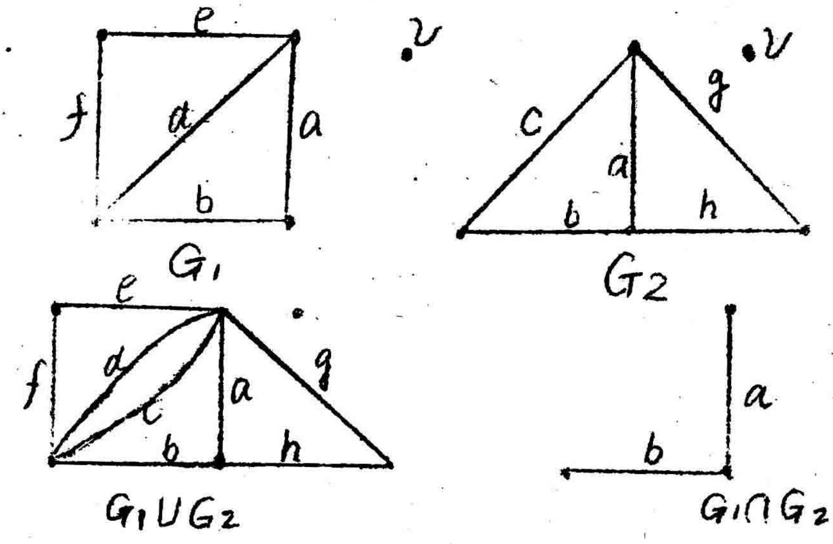


Fig 1．12

根据定义，并与交显然可以推广到任意有限个图的情况，且满足交换律和结合律。

定义1．10　　简单图的补

…G（…）的补也是一个简单图。它的顶点集合为V，任意两个顶点当且仅当在G中不连接时才是连接的（G的补往往记作$\bar{G}$）

显然，K_n的补是零图，正则图的补仍然是正则图。且G与$\bar{G}$是互补的。

Fig 1.13（a）、（b）就是互补的两个图。

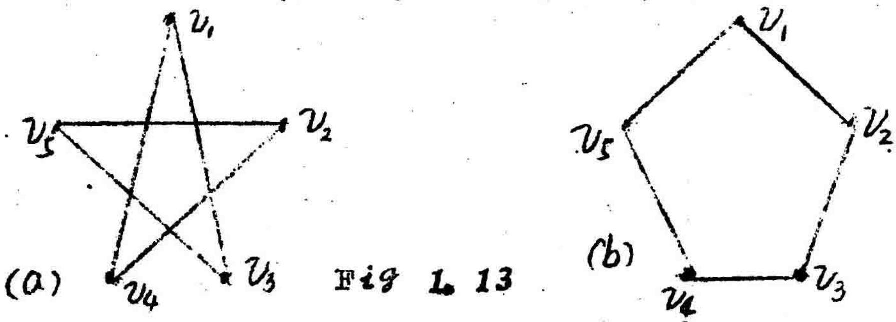


Fig 1.13

1.4 子图

定义1.11 子图与超图

G、H为两个图。如$V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，则称H为G的一个子图，记作H G、G称作H的超图。如$H \subseteq G$而$H \neq G$，则称H的为G的真子图。

定义1.12 生成子图和诱导子图

如H是G的子图，且H包含了G的所有顶点，则称H是G的生成子图。

如V'是$V(G)$的一个非空子集，$G[V']$是G的以V作为顶点集合的最大子图，即它的边集合是由G中两个端点都属于V'的所有边组成的集合，则称$G[V']$是G的由V'导出的诱导子图。

在Fig 1.14中，G_1、G_2都是G的子图。其中，G_1是个诱导子图，而G_2不是；G_2是个生成子图，G_1则不是。

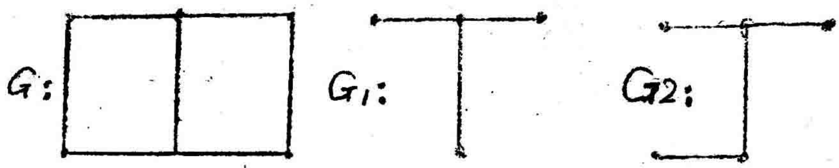


Fig 1. 14

一个图可以除去一个顶点或一条边而得到一个相应的子图，还可以加上一条边而得到一个相应的超图。这里，我们需要明确地给出"除去"和"加上"的含义。G 除去顶点 v 是指去掉 v 以及与 v 相关联的所有边，这样得到的子图记作 $G-v$。G 除去边 e 则是去掉这条边而保留它的两个端点，所得的子图记作 $G-e$。G 加上边 e 是指在 G 中原来不邻接的两个顶点间增加一条边，即 e 的两个端点是 G 中原来不邻接的两个顶点，这样得到的超图记作 $G+e$。通过逐次除去或加上一个边或顶点，还可以把上述概念推广到除去一个边集合或顶点集合以及加上一个边集合的情况。

我们用 Fig 1. 15 来说明上述概念。

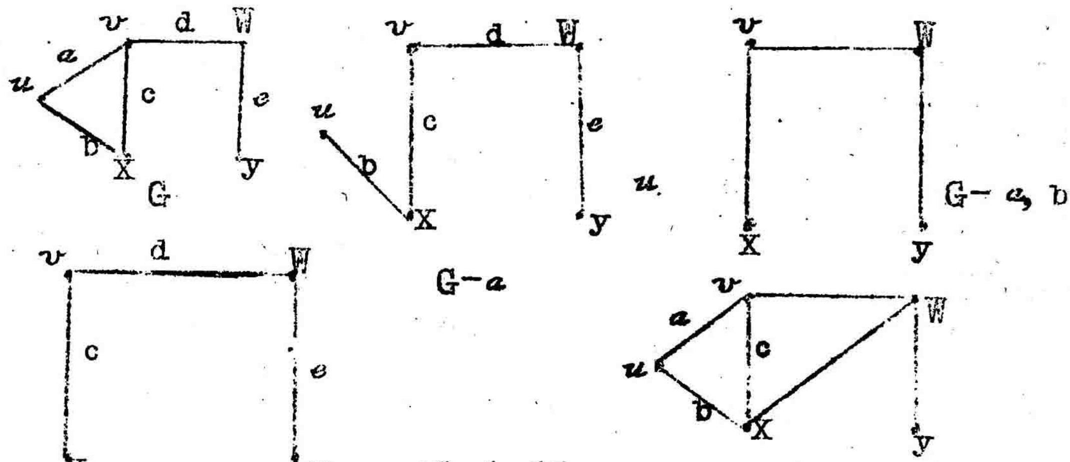


Fig 1. 15