国家理科基地大学数学系列教材

高等数学 上册

（第二版）

刘金舜　羿旭明　编著

科学出版社

国家理科基地大学数学系列教材

高等数学

上册

（第二版）

刘金舜　羿旭明　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是大学经济管理类（包括文科）的高等数学教材，列为武汉大学“十二五”规划教材之一.

全书分上、下两册，共十四章. 上册介绍一元函数的微积分学，包括函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分以及导数在经济学中的应用、定积分的应用等. 下册介绍空间解析几何、二元（多元）函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等.

本书在传统的经济类高等数学的基础上内容稍有拓宽，主要加强了空间解析几何和无穷级数方面的内容. 每一章都配备一套针对本章内容的综合练习题. 此外，在全书最后，还配有两套综合全书内容的综合练习题. 这些试题，既有深度，又有一定的难度. 熟练地掌握这些试题的解题思路及证明方法，对将来考研将起到很重要的作用.

本书适合经济、管理、部分理工科（非数学）、社科、人文等各专业学生使用，也可供教研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/刘金舜，羿旭明编著. —2 版. —北京：科学出版社，2017. 6

国家理科基地大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-053661-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②羿… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材

Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 129418 号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：肖 婷

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 6 月第 二 版 印张：15 1/4

2017 年 6 月第一次印刷 字数：357 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书根据教育部经济管理类数学课程教学基本要求，以提高学生数学素质、掌握数学思想方法与培养应用创新能力为目的，针对大学经济类、管理类各专业的教学实际编写而成．本书参考了国内外出版的优秀教材，充分吸收了编者们多年来教学实践经验与教学研究成果．同时，为了更好地适应教学与改革的需要，武汉大学确定并公布了“十二五”规划教材，本书是“十二五”规划教材之一．

在当前高等教育从精英化教育到大众化教育的趋势下，对数学类课程的教与学都提出了新的要求．良好的数学素养是学生进一步学习的基础，而“高等数学”教学在培养学生的分析能力、归纳能力、抽象能力、空间想象能力、演绎推理能力以及准确计算能力等方面起到重要的基础性作用，为后续的课程学习奠定基础．因此，“高等数学”成为高等学校经管类、文理科类本科专业的必修或选修课之一，也是经管类硕士研究生入学考试中的一门必考科目．

本书具有以下特色：

(1) 保持传统经典高等数学教材的编排体系，强调高等数学在经济管理中的应用，并在例题和习题中加以体现．

(2) 内容展开沿用“定义、定理、推理、例题”的形式化演绎，力求在语言准确的前提下，陈述通俗易懂，深入浅出，推理简洁直观．

(3) 适当弱化解题技巧训练的要求，强调基本方法和基本技巧的训练．

(4) 体现知识、能力、意识三者之间的关系．既要讲授知识，又要培养运用知识的能力，同时培养运用知识解决问题的意识．

(5) 考虑学生的考研需求．从教材的内容和结构上注意与考研大纲的衔接，从例题和习题上反映考研的典型题型和知识要点．

本套教材含《高等数学》上、下册，总课时 144 学时，并配有《高等数学同步习题解答》．上册内容包含函数的极限、连续、导数、不定积分与定积分、广义积分等，在介绍一元函数微积分学的同时，还介绍了导数在经济学中的应用、定积分的应用等内容．下册内容介绍了空间解析几何与向量代数、二元(多元)函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等内容．书中部分带有“*”号的章节，属于拓展部分，可视具体情况讲授．

本套教材在每一章后都配备较多的习题，此外还精心编写了一套针对本章内容的综合练习题．在全书最后还编写了两套综合全书的综合练习题．每套习题既有广度，又有一定难度．这些综合练习题对学生掌握书本知识和考研均有帮助．

本套教材第 1 章由韦光贤编写，第 2 章至第 7 章由刘金舜编写，第 8 章至第 14 章由羿旭明编写，全书的习题及综合练习题均由刘金舜编写．本套教材最后由刘金舜审核定稿．本套教材在前期编写以及后期统稿中得到了武汉大学数学与统计学院的部淑

彩、孟新焕、杨丽华、陈绍林、唐道远、李汉保等教授的帮助，在此表示感谢. 在教材编写过程中，我们参考了国内外部分院校的相关教材，在此表示感谢. 本套教材的立项、编写到出版，得到武汉大学数学与统计学院的领导及科学出版社的关心与支持，在此一并表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中有不足之处，希望广大专家、同行和读者批评指正.

刘金舜

2017 年 5 月于武汉大学

目　录

第1章 函数

德国著名数学家高斯(K. C. Gauss)曾说:任何现实生活中的问题都可以转化为数学,而任何数学都可以转化为函数.

函数,起始于人类对运动和变化的研究,是对现实世界中各种度量之间相互关系的一种抽象,是解决现实生活中各种问题必不可少的一种工具,也是微积分研究的基本对象,是高等数学中最重要的也是最基本的概念之一.

1.1 实数集

1.1.1 集合

集合是数学中的基本概念,也是集合论的主要研究对象,按集合论的创始人德国数学家康托尔(G. Cantor)的说法,凡一定范围内的可以区别的具体或抽象的事物,若作为一个整体来考虑,就称为集合,而这些事物则称为该集合的元素或成员.

一般来说,集合是具有某种共同属性的事物的全体,或者按照某种研究需要进行研究的对象的全体.集合可以简称为集.构成集合的事物或对象,称为集合的元素.

通常我们研究某些事物或对象组成的集合,如一个班的所有学生、一所大学的所有专业、一个实验室的所有计算机、所有自然数等都可以称为集合,而具体的某个学生、某个专业、某台计算机、某个自然数则分别称为上述相应集合的元素.

由有限多个元素组成的集合称为有限集,如上述提到的一个班的所有学生组成的集合,一所大学的所有专业组成的集合,一个实验室的所有计算机组成的集合就是有限集;由无穷多个元素组成的集合称为无限集,如所有自然数组成的集合就是无限集.

通常,我们用大写字母 $A,B,X,\Omega,\cdots$ 表示集合,而用小写字母 $a,b,\alpha,\beta,\cdots$ 表示集合中的元素.

若 a 是 A 中的一个元素,记做 $a\in A$,读做 a 属于 A;若 a 不是 A 中的一个元素,记做 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$),读做 a 不属于 A.

在今后的学习中,我们将用某些字母表示特定的集合,**N**:全体自然数集;**Z**:全体整数集;**Q**:全体有理数集;**R**:全体实数集.如 $2\in\mathbf{N}$;$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$;$\pi\notin\mathbf{Q}$.

笔记栏

表示一个集合,通常有两种方法.一种方法是把集合的所有元素全部列出,这种表

示方法称为列举法. 如 $A=\{a,b,c,d,e\}$,表示集合 A 由 a,b,c,d,e 五个元素组成. 另一种方法称为描述法,即用一对花括号把元素具有的共同性质 P 表示出来. 一般记为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 P}\}\text{ 或 }A=\{x:x\text{ 具有性质 P}\}$$

例如,$C=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$;$D=\{x\mid x$ 是正实数$\}$,此时集合也可以表示为 $D=\{x\mid x\in \mathbf{R}^{+}\}$;$M=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$.

我们将不含任何元素的集合称为空集,这是一个很重要的有穷集,记做$\varnothing$. 如$\{x\mid$方程 $x^2+1=0$ 的实数解$\}$就是空集.

设有两个集合 A 和 B,若 A 的每个元素都是 B 的元素,即 A 的每个元素都属于 B,则称 B 包含 A,或 A 包含在 B 中,或 A 是 B 的子集,并记做 $A\subset B$. 因此,$A\subset B$ 是指从 $a\in A$ 推知 $a\in B$.

例如,$C=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$,$D=\{x\mid x$ 是正实数$\}$,有 $C\subset D$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记做 $A=B$. 两个集合相等是指它们具有相同的元素.

在讨论某些问题时,我们常常把讨论限制在某一集合 U 的元素、它的子集的范围内,这样的集合 U 称为全集. 很显然,全集随讨论问题的变化而有所变化.

设有集合 A、B、C,下面给出集合之间的运算及运算律:

(1) 所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,简称为 A 与 B 的交,记做 $A\cap B$,用集合表示即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2) 所有至少属于 A、B 之一的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集,简称为 A 与 B 的并,记做 $A\cup B$,用集合表示即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3) 所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集,记做 $A-B$,用集合表示即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

设 A 是全集 U 的一个子集,U 中所有不属于 A 的元素所组成的集合称为 A 的补集,记做 $\overline{A}$,用集合表示即 $\overline{A}=\{x\mid x\in X$ 且 $x\notin A\}$,用差集表示即 $\overline{A}=X-A$.

集合的运算满足如下运算律:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$　(1.1.1)

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　(1.1.2)

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$　(1.1.3)

(4) 吸收律　$(A\cup B)\cap A=A, (A\cap B)\cup A=A$　(1.1.4)

(5) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$　(1.1.5)

这里,我们只给出对偶律(5)中$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$的证明,其他运算律可以类似证明. 要证明$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,则需证明$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$且$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 证明如下:

笔记栏

设 $x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,于是 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\in$

$\overline{A}\cap\overline{B}$,因此

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$$

设 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,于是 $x\notin A\cup B$,即 $x\in\overline{A\cup B}$,因此

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$$

1.1.2　实数与数轴

高等数学主要在实数范围内讨论问题,因此我们有必要简要地介绍一下实数的一些属性.

人们对实数的认识是逐步发展的.首先是自然数,由自然数构成的集合叫做自然数集,记为 **N**.在 **N** 中我们可以定义四则运算,然后发展到有理数.有理数可以表示为 $\frac{p}{q}$,其中 p 与 q 都是整数,且 $q\neq0$.我们将有理数构成的集合叫做有理数集,记为 **Q**.

在数轴上,每一个有理数都可以找到一个点来表示.如图 1.1.1 中的点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 就可以代表有理数 $-4,-1.5,-0.5,3,5$.我们将代表有理数 x 的点称为有理点.由此可知,有理数集 **Q** 除了可以在其中定义四则运算外,还具有有序性.

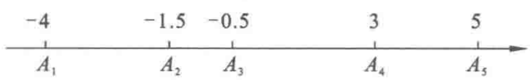

图 1.1.1

任给两个有理数 a,b $(a<b)$,则在 a,b 之间至少可以找到一个有理数 c,使得 $a<c<b$,如 $c=\frac{a+b}{2}$.同样地,在 a,c 之间至少可以找到一个有理数 d,使得 $a<d<c$.可见,无论有理数 a,b 相差多少,在 a,b 之间总可以找到无穷多个有理数,这就是有理数的稠密性.因为任何一个有理数必定与数轴上的一个有理点相对应,这也说明有理点在数轴上是处处稠密的.

尽管如此,有理点并没有充满整个数轴.事实上,如图 1.1.2 所示,在数轴上,设 OC 是单位长,作直角三角形 OCB,使 $BC=OC$,由勾股定理知 $OB=\sqrt{2}$.以 O 为圆心,OB 为半径作圆,与数轴正半轴交于一点 A,显然 $OB=OA$.容易证明 $\sqrt{2}$ 不能表示为 $\frac{p}{q}$ (p 与 q 都是整数,且 $q\neq0$)的形式,因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数.可见数轴上代表 $\sqrt{2}$ 的点 C 不是有理点.与上述同样的理由,这种点也必有无穷多个,而且在数轴上也是处处稠密的.我们称这些点为无理点,与无理点相对应的数称为无理数.无理数是无限不循环小数,如 $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi$ 等.由它们构成的集合称为无理数集,记为 **I**.有理数与无理数

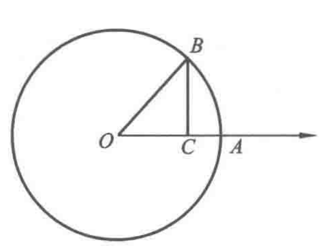

图 1.1.2

统称为实数.全体实数构成的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.

实数充满数轴且没有间隙,这就是实数的连续性.可见每一个实数必定是数轴上某一点的坐标;反之,数轴上每一个点必是一个实数,这就是说全体实数与数轴上全体点构成一一对应的关系.基于此,我们在以后的讨论中,可以把数轴上的点与实数不加区分,点 a 和实数 a 是相同的意思.

1.1.3 绝对值

定义 1.1.1 一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义表示数轴上的点 x 与原点之间的距离.在这里我们不加证明地给出如下绝对值及其运算的下列性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $|x|\geqslant 0$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(4) $|x|\leqslant a\ (a>0)$,等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$;

(5) $|x|\geqslant a\ (a>0)$,等价于 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$;

(6) $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

(7) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$,其中 $y\neq 0$.

1.1.4 区间与邻域

在实数集中,我们经常会碰到各种区间.所谓区间就是介于某两个点之间的所有点构成的集合,这两个点称为区间的端点.区间可以分为以下几种:

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a,b 为端点的开区间,记做 (a,b),即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$,如图 1.1.3 所示.

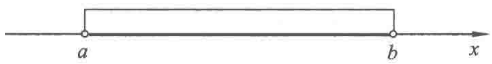

图 1.1.3

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a,b 为端点的闭区间,记做 $[a,b]$,即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,如图 1.1.4 所示.

笔记栏

图 1.1.4

类似地,可以定义如下区间:

(3) $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,并称为半开区间.

其中区间的右端点 b 与区间的左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长度,上述(1)~(3)种情况具有有限的区间长度,因此我们称为有限区间.下面给出几类无限区间:

(4) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;

(5) $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$;

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathbf{R}\}$,即全体实数的集合.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$.实数集合 $\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}$ 在数轴上表示一个以点 a 为中心,以 2δ 为区间长度的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$,并称该开区间为以 a 为中心、δ 为半径的邻域,记为 $U(a,\delta)$.根据绝对值的性质,即有

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$$

在数轴上表示,如图 1.1.5 所示.

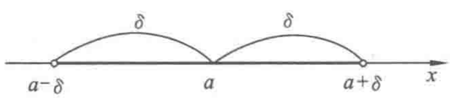

图 1.1.5

另外,我们常常还会用到如下的实数集合 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$,即上述邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心点 a 后形成的邻域,我们称该邻域为以 a 为中心、δ 为半径的去心邻域,并记为 $U_0(a,\delta)$.

1.2 函数的定义

1.2.1 函数的概念

定义 1.2.1 设 D 是一个给定的非空实数集,如果对于每一个实数 $x\in D$,按照某个对应法则 f,有唯一的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x)$ $(x\in D)$. x 称为自变量,y 称为因变量.自变量 x 的取值集合 D 称为函数的定义域,记为 $D(f)$,因变量的取值集合称为函数的值域,记为 $Z(f)$,即 $Z(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

为了以示区别,不同的函数其对应法则可以用不同的字母表示.在实际问题中,由函数的实际意义可以确定函数的定义域.当函数无实际背景时,函数的定义域是使函数的对应法则有意义的自变量 x 的取值集合.

笔记栏

函数具有定义域和对应法则两个要素.对于两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$,如果

其定义域和对应法则分别相同,则我们认为这两个函数是同一函数,否则是两个不同的函数.

例 1.2.1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 因 $1-x^2\geqslant 0$ 时,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 才有意义,故定义域为 $\{x\mid 1-x^2\geqslant 0\}$,即 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

例 1.2.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求函数 $y=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域.

解 显然,要使函数 $y=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 有意义,则

$$\begin{cases}0\leqslant x+\dfrac{1}{3}\leqslant 1\\[2ex]0\leqslant x-\dfrac{1}{3}\leqslant 1\end{cases}$$

解得

$$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$$

从而所求函数 $y=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$.

例 1.2.3 判断函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 与函数 $y=\frac{x^2}{x}\ (x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0)$ 是否为同一函数.

解 虽然这两个函数在 $x\neq 0$ 时,其函数的表达形式均为 $y=x$,即对应法则相同,但是这两个函数的定义域不同,因而不是同一函数.

例 1.2.4 判断函数 $y=2\lg|x|$ 与函数 $y=\lg x^2$ 是否为同一函数.

解 显然,所论两函数的定义域均为 $\{x\mid x\neq 0\}$,且对应法则也相同,因而为同一函数.

应该指出,根据函数的定义,一个函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 在定义域 D 内任取一个值时,函数 $y=f(x)$ 仅有一个确定的值与之对应,这种函数我们称为单值函数.如果对于定义域中的任一 x 的值,函数 $y=f(x)$ 有几个甚至无穷多个确定的值与之对应,这时我们称这种函数为多值函数.如由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数就是多值函数.本书中,若无特别说明,我们只对单值函数进行讨论.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示通常有三种表达形式:解析法、列表法和图形法.函数的对应法则用数学解析表达式表示的方法称为解析法.而列表法给出了函数在一些点上的函数值,并用表格的形式表达出来.图形法则在坐标系下,给出对应函数 $y=f(x)$ 在坐标系下的

点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

此时由点集形成的图形称为函数的图形. 根据需要,我们可以选择上述三种方法中的一种或几种形式来对函数加以表示. 下面我们给出几个函数表示的例子.

例 1.2.5 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$,其定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,函数的图形如图 1.2.1 所示.

例 1.2.6 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$,其定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,函数的图形如图 1.2.2 所示.

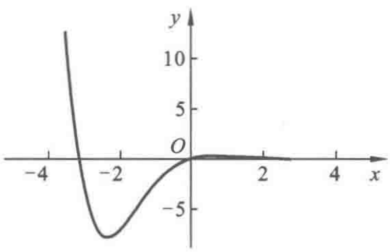

图 1.2.1

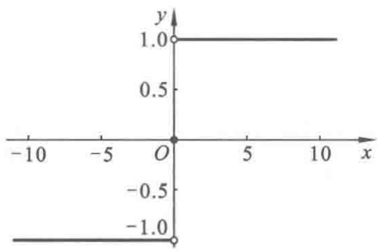

图 1.2.2

例 1.2.7 取整函数 $y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 如$[2.1]=2$,$[3]=3$,$[-1.2]=-2$. 其函数的图形如图 1.2.3 所示.

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

例 1.2.8 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$,其函数为分段函数,函数的图形如图 1.2.4 所示.

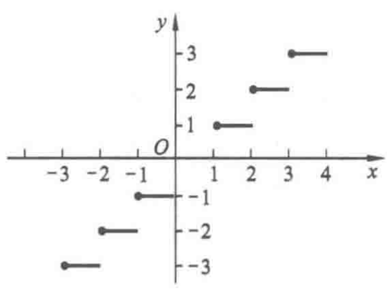

图 1.2.3

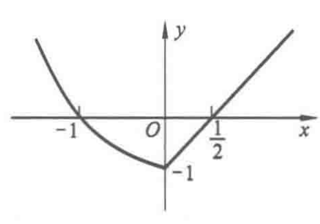

图 1.2.4

例 1.2.9 对于给定的函数 $y=f(x)$,$y=g(x)$,$x\in D$,对任意给定的 $x\in D$,取函数 $f(x)$和 $g(x)$在 x 处的最大值和最小值,分别构造了两个函数,不妨记为$y=\max\{f(x),g(x)\}$和 $y=\min\{f(x),g(x)\}$,显然函数的定义域仍为 D.