

数学命题的特征教学论

Shuxue Mingti de Tezheng Jiaoxuelun

郑庆全 著

山东大学出版社

数学命题的特征教学论

郑庆全 著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学命题的特征教学论/郑庆全著. —济南:山东大学出版社, 2017. 10
ISBN 978-7-5607-5823-7

I. ①数… II. ①郑… III. ①数学教学—教学研究
IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 206411 号

责任编辑:王文珺 李昭辉

封面设计:张 荔

出版发行:山东大学出版社

社 址 山东省济南市山大南路 20 号

邮 编 250100

电 话 市场部(0531)88364466

经 销:山东省新华书店

印 刷:济南景升印业有限公司

规 格:720 毫米×1000 毫米 1/16

19 印张 350 千字

版 次:2017 年 10 月第 1 版

印 次:2017 年 10 月第 1 次印刷

定 价:65.00 元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

序

《数学命题的特征教学论》是一部重点研究数学命题学习和教学的专著,是我在自己博士学位论文的基础上撰写而成的。

原博士论文的选题源于我学习数学、从事中学数学教育和进行数学教育研究的多年积淀。我从小就酷爱数学,也从别人学习数学的经验中得到了许多关于数学教学的启示,同时也观察到了许多学生学习数学时的困难。在中学任教近10年后,我考取了西北师范大学数学课程与教学论硕士研究生,师从孙名符教授和吕世虎教授,开始了数学教育教学研究之旅,期间聆听了许多数学教育专家学者的报告,研读了许多数学教育大家的著作。硕士研究生毕业1年后,我又有幸考取了南京师范大学数学课程与教学论博士研究生,师从单墀教授和涂荣豹教授。在这期间,受南师大数学教育研究团队的鼓舞、启发和指导,我产生了许多新思考和新灵感,从而有了本书的酝酿和撰写,也圆了个人多年来要进行一项数学教育研究的梦。

本书首先进行了文献研究,主要是对已有的相关文献进行综述;在此基础上阐述了数学命题的内涵、结构和分类,接着从多角度对数学命题进行了认识论方面的透析,提出了数学命题的四个特征:语义性特征、真理性特征、应用性特征和关联性特征;最后对基于特征的数学命题教学的某些理论领域进行了一些研究,包括基于特征的数学命题学习过程和学习本质。基于特征的数学命题学习过程指的是在各特征的学习情境中,学习者从其头脑里的数学认知结构(知识结构和认识结构)中提取相应认知成分组成外部学习环境中的数学认知系统,然后在组成这个系统的两个亚系统(数学知识系统和数学认识系统)之间以及两个亚系统组成的整体之间适当匹配和相互作用的过程。基于特征的数学命题学习本质解析主要是从多种视角对学习过程中数学命题的各种动态变化进行的细致分析,在相应的学习情境中,各特征被学习者的认知结构重组,最终在学习者的头脑里形成了更强的新的数学认知结构。

在基于特征的数学命题学习过程解析和学习本质解析的基础上,我又进一步提出了基于特征的数学命题教学目标,构建了教学原则和教学策略。从长远来看,基于特征的数学命题教学目标侧重于通过数学命题的教学发展数学思维能力,教会学生数学思考,以发展学生的认识力,全面提高学生的基本素质。基于特征的数学命题教学原则主要有三组:倾向于促进学生头脑里的数学知识结构建构的特征中心原则和特征联系原则;倾向于促进学生头脑里的数学认识结构建构的智力动作运演水平的层次性原则、渐进性原则和有利于发展学生认识力原则;倾向于促进学生头脑里的整体数学认知结构建构的引发认知系统整体活动原则、特征教学对应学习过程原则和以特征为线索的多次组织化原则。基于特征的数学命题教学策略主要有:语义性特征的同化、形成和变式教学策略;真理性特征的起疑、元认知提示语定向和设验教学策略;应用性特征的结构化、例题化和情境化教学策略;关联性特征的体系化、问题化和联系化教学策略。

结合基于特征的数学命题教学理论研究成果,我还对典型数学命题教学案例进行了研究,发现基于特征的数学命题教学理论在教学实践中具有一定的可行性,能够发挥教学理论的先进性,改进教学中的不足,提高教学的效率;同时在最后一章对基于特征的数学命题教学研究的一些课题进行了展望。

总之,本书围绕数学命题的学习与教学,基于特征的视角,首先从对数学命题的认识、学习过程到教的设计的多个方面,以在认识数学命题复杂性的前提下抓住其特征为突破口,然后主要是在皮亚杰发生认识论和建构主义的基础上进行的分析,其中也重视了案例研究及后续研究设计。整本书不仅使读者对数学命题的有关概念有了一个整体性的了解,更有助于读者对数学命题的学习与教学形成清晰认知。当然,受个人水平、时间和条件所限,在研究方法等方面的不当之处请读者批评指正。

郑庆全

2017年6月18日

目 录

第一章 数学命题研究概述	(1)
第一节 研究背景	(1)
第二节 研究目的	(2)
第三节 研究方法	(3)
第四节 研究过程	(4)
第五节 研究架构	(4)
第六节 研究结论	(6)
第二章 文献综述与课题的提出	(9)
第一节 国外数学命题教学研究综述	(9)
第二节 国内数学命题教学研究综述	(16)
第三节 文献述评与课题的提出	(23)
第四节 数学命题概述	(36)
第五节 数学命题的特征	(53)
第三章 基于特征的数学命题学习过程解析	(68)
第一节 基于特征的数学命题学习解析理论的建构	(68)
第二节 语义性特征的学习过程解析	(92)
第三节 真理性特征的学习过程解析	(97)
第四节 应用性特征的学习过程解析	(102)
第五节 关联性特征的学习过程解析	(106)

第四章 基于特征的数学命题学习本质解析	(110)
第一节 基于特征的数学命题学习本质解析的视角和出发点	(110)
第二节 数学命题各特征的学习本质解析	(116)
第五章 基于特征的数学命题教学目标阐释与教学原则构建	(124)
第一节 基于特征的数学命题教学目标阐释	(124)
第二节 基于特征的数学命题教学原则研究概述	(143)
第三节 倾向于促进学生头脑里数学知识结构建构的教学原则	(147)
第四节 倾向于促进学生头脑里数学认识结构建构的教学原则	(151)
第五节 倾向于促进学生头脑里整体数学认知结构建构的教学原则	(156)
第六节 基于特征的数学命题教学原则的贯彻	(159)
第六章 基于特征的数学命题教学策略研究	(161)
第一节 基于特征的数学命题教学策略概述	(161)
第二节 语义性特征的数学命题教学策略研究	(164)
第三节 真理性特征的数学命题教学策略研究	(170)
第四节 应用性特征的数学命题教学策略研究	(179)
第五节 关联性特征的数学命题教学策略研究	(185)
第六节 基于特征的数学命题教学策略的运用	(190)
第七章 基于特征的数学命题教学案例研究	(191)
第一节 案例研究概述	(191)
第二节 一则程序性数学命题教学案例分析与评点	(192)
第三节 一则推理性数学命题教学案例的分析与评点	(209)
第四节 一则典型数学命题教学案例的分析与评点	(231)
第五节 案例研究的小结与理性思考	(247)
第八章 研究展望	(254)
第一节 理论研究	(254)

第二节 教学实验研究与推广	(255)
第三节 进一步推广到大学数学命题教学研究中去	(255)
附录一 一节典型数学命题教学实验课例——对数运算性质课堂教学实录	(257)
附录二 同一数学命题发现式教学和讲授式教学案例——两条直线位置关 系课堂教学实录	(265)
第一节 两条直线的位置关系的发现式教学案例	(265)
第二节 两条直线的位置关系的讲授式教学案例	(271)
主要参考文献	(284)
后 记	(294)

第一章 数学命题研究概述

第一节 研究背景

数学教学主要就是基础内容的教学,不管按哪一种方式来划分,不管是课程改革也好、教学改革也好,总有一些相对固定不变的方面。数学教育研究就应该围绕这些方面来研究,选择本课题来研究就体现了这种思路。在选择和研究本课题的过程中也重点受到了来自理论和实践方面的影响。

(一)理论背景

1. 基础教育问题引起了极大的关注

进入 21 世纪,世界各国的综合国力竞争越来越激烈,而制约各国综合国力的重要因素是人才。因此,随着社会的发展和科技的进步,人的发展越来越受到高度的关注,而在世界上通用的促进人发展的一种方式就是教育。教育问题首要关注的就是基础教育问题,在世界范围内的教育研究也正逐步向深层推进,由此可以看出基础教育问题越来越受到人们的重视。

2. 数学教育研究取得了较大的进展

从 20 世纪 80 年代至今,数学教育的理论研究取得了重大进展。这些进展主要表现为数学教育研究的领域越来越广,相关的理论专著层出不穷,数学教育杂志的数目空前增加,各类教育刊物中经常可以读到关于数学教育的文章,从事数学教育的群体越来越壮大等。

3. 数学命题教学研究具有迫切性

目前,数学教育的研究百家争鸣,各层次、各视角、各方面的研究交互出现。在所有的研究中,都孕育着数学教育的基础性问题。从这个意义上讲,数学教育中的各类研究都离不开对基础性问题的研究。数学命题的教学研究无疑属于基础性教学方面的研究,然而与数学概念教学研究和数学解题教学研究相比,在数学教育理论研究领域它却成了“冷门”,已有的相关研究也已经不能适应新的教育理论的发展和指导教学实践的需要了。新的

数学命题教学理论应该打破这种单纯强化知识教学的现状,逐步转向不仅强调知识的载体作用,而且强调人的可持续发展和提高人的认识力方面,并力图达到二者的均衡。

(二)实践背景

当前国内正在推进的第八次基础教育数学课程改革是最大的数学教学实践问题,在整个过程中都渗透着数学命题教学的问题,而且人们的科学理论意识越来越强,许多问题都可以通过数学教育科学的研究来解决。因此,作为数学课程教学内容重要组成部分的数学命题,其教学受到专门的关注也是大势所趋。

在这次课程改革中还有一个大的变化,就是把培养人的各种能力作为一个重要的目标。能力的培养是离不开知识的,仅有知识而缺乏能力也是无用的。因为随着科技的发展,知识更新的速度将越来越快,而只有具备了较高的能力,才能迅速地掌握新的知识。因此,通过数学命题这一数学课程的主要内容载体,发挥其最大的价值就成为一个重大的理论问题。

在数学教学实践中,“高分低能”现象也普遍存在。从本理论的视角来看,存在这种现象的主要原因是学生仅关注数学知识结构本身的建构,而没有关注数学认识结构的建构和包括知识结构与认识结构的数学认知结构整体本身的协调建构。

第二节 研究目的

1. 对以往的数学命题的教学研究做一个简单的总结和归纳

数学命题的教学研究属于数学教育研究的基础性问题,有许多研究者在数学命题教学方面作了一些研究。总结和归纳了前人的工作,不仅可以避免重复进行已有的研究,而且可以从前人的研究中获得宝贵的“营养”。同时,这种归纳和总结是深入推进数学命题教学研究的重要前提。

2. 在选定研究思路的基础上,构建一个基于特征的数学命题教学理论体系

在本研究中,针对数学命题及其教学是一个复杂的研究对象的事实,笔者选定了“特征”作为本研究的独特视角,在对“特征”进行研究的前提下,结合数学命题与数学概念、数学解题的密切关系,在对数学命题的学习过程与本质进行解析的基础上,构建了一个包括数学命题教学目标、教学原则和教学策略的理论体系。

3. 通过理论体系的构建,丰富发展数学命题教学的理论研究

本研究属于数学教学中的基础性问题研究,这里构建的基于特征的数

学命题教学理论体系无疑为数学命题的教学理论研究拓展了一个新的视角,为数学命题教学理论进一步的研究提供了启发性的途径和手段。

4. 利用研究的理论成果,发现在数学命题教学实践中存在的问题,从而更好地指导数学命题的教学实践

由于各种因素的影响,在数学命题教学实践中可能存在许多问题,这些问题的本质只有在一定的理论指导下才能看清楚。本研究意在提供这样一种理论或者为产生这样的一种理论提供一种启发性的思考。有了理论或启发性的思考作指导或参考,就能为有效地解决数学命题教学实践中出现的各种各样的问题打下良好的基础。

第三节 研究方法

(一)文献法

文献法是本研究采用的一种重要方法,它表现在对已有数学命题教学研究的归纳与概括以及对数学命题学习过程与本质解析的理论研究中,也表现在对数学命题教学的目标阐释、原则构建和教学策略寻求中。使用文献法的意图主要是在大量占有资料的基础上,挖掘与提炼一些主要结论,概括与总结一些重要观点。在此基础上,通过深入的思考,围绕数学命题的教学这一研究主题提出自己的观点,并借助搜集到的事实论据和理论论据进行论证。

(二)案例分析法

在研究的过程中,笔者收集和积累了有关数学命题教学的丰富文本资料(课例实录)和影像资料(课堂录像),从教学视角着眼,对教学案例进行了深入的分析与评价,从正、反两方面为论证自己的观点提供了充足的事实论据。案例分析法是本研究采用的一种重要的研究方法。

(三)教学观察法

教学观察法主要是通过到中学去观摩数学命题的课堂教学和观看有关的课堂教学录像,对这些课堂教学状况作出一些必要的判断,为研究提供思考的平台和实践支撑。

(四)思辨法

这种研究方法与文献法有密切的关系,是一种综合的方法,其中渗透着对观察得到的信息以及从文献中获得的信息进行的归纳、演绎、类比、概括、抽象、分析、综合等处理,其本身的过程比较复杂。

(五)比较法

在本研究的进行过程中,渗透着与数学概念教学、数学解题教学研究的比较。这种比较的思路发挥着重要的作用,为基于特征的数学命题教学理论研究搭建了理论平台。

第四节 研究过程

本研究的流程如图 1-1 所示。

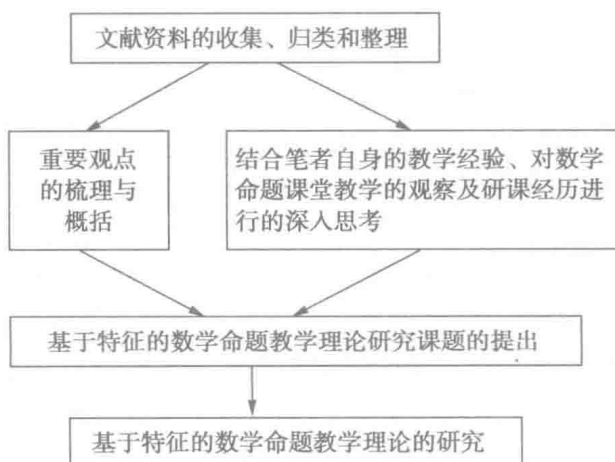


图 1-1 数学命题教学研究流程

第五节 研究架构

本书的研究架构如图 1-2 所示。

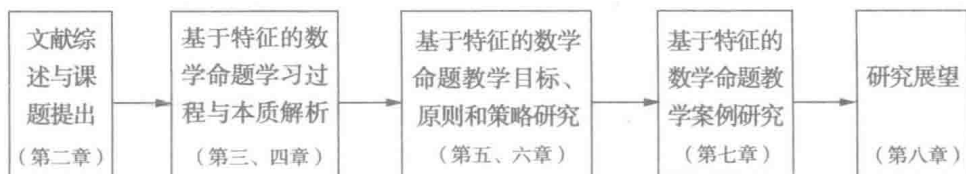


图 1-2 数学命题教学研究的架构

结合以上的框架,以下分别从研究思路和各部分的逻辑联系两个方面来分析各部分之间的关系。

1. 研究思路分析

本课题分别从理论和实践两个角度来研究基于特征的数学命题教学理论,其中第一至五章和第七章涉及理论部分,另外第一章、第六章和第七章也涉及实践部分。

从另一个角度来讲,本研究的思路遵循涂荣豹教授提出的数学教育研究的规范性,即遵循教与学对应和教与数学对应的二重原理。这里的教与学对应反映在基于特征的数学命题“教”的理论建立在对学生学习的内容(数学命题)、学习的过程和学习本质以及对课堂教学(案例研究)进行研究的基础上;教与数学对应则反映在基于特征的数学命题“教”的理论建立在对学生学习数学课程内容(数学命题)进行研究的基础上,而且对这一内容的研究(数学命题)贯穿本研究的各个环节。

同时本研究还贯穿了这样一种思想:研究发源于数学课程内容(数学命题)和课堂教学(数学命题课堂教学),研究的成果最终又会接受课堂教学实践的检验。

2. 各部分的逻辑联系分析

文献综述与课题提出在本研究中居于最基础的地位,不仅总结了前人的研究,而且在此基础上提出了本课题,同时也对数学命题及其特征进行了研究。笔者对本书其他部分之间的逻辑联系分析如下:

(1)第一层面的逻辑联系分析。这一层面的逻辑联系主要表现在两个方面:基于特征的数学命题学习过程解析与本质解析之间的联系、基于特征的数学命题教学原则和教学策略之间的联系。学习过程解析与本质解析相同的方面是关注数学命题的学习状况,不同之处则在于学习过程强调学习的连续性,而学习本质侧重于学习的间断性。教学策略是在遵循教学原则的前提下提出来的,教学策略应该反映教学原则的内容,二者都是构成基于特征的数学命题教学理论的重要部分。

(2)第二层面的逻辑联系分析。第二层面的逻辑联系主要表现在教学目标是联系基于特征的数学命题学习过程本质和基于特征的数学命题教学原则策略的桥梁和中介。教学目标的提出是在研究学习过程和学习本质的基础上确定的,同时它又是构建教学原则和确定教学策略的重要依据。教学目标的阐释与学习过程解析都是将数学命题的教学分为初始阶段和后继阶段,而且二者具有一定的联系。

(3)第三层面的逻辑联系分析。第三层面的逻辑联系主要表现在基于特征的数学命题教学理论体系与基于特征的数学命题课堂教学实践(案例研究)的联系方面。这一联系也贯穿于本研究的各部分之中。

本书的第七章是对本研究的展望,是对基于特征的数学命题教学理论研究的补充与完善,同时又表现出了本研究的开放性。

总之,本书各部分之间具有步步为营、环环相扣和层层递进的密切联系。这种联系可以更为简单地概括为:数学命题的特征研究是建立在对数学命题内涵、结构和分类以及教学哲学层面认识的基础之上;学习过程解析和学习本质解析主要是建立在发生认识论、数学认知结构建构和强调数学认识系统各成分活动等的基础之上;教学目标则是建立在对基于特征的数学命题的学习过程与本质的解析、数学认知结构的建构和发展学生的认知能力(知识水平和认识能力)的基础之上;教学原则主要是建立在促进数学认识系统各成分活动和实现教学目标的基础之上;教学策略主要是建立在贯彻教学原则和促进数学认识系统各成分活动的基础之上;案例研究则是建立在对基于特征的数学命题教学理论的整体运用的基础之上。

第六节 研究结论

综合本书中进行的研究,可以得出如下结论:

1. 数学命题及其特征的研究

在对数学命题的内涵、结构和分类进行研究的基础上,笔者从多角度对数学命题进行了透彻的分析,最后提出了数学命题的四个特征:数学命题的语义性特征指的是在用更为具体的方式阐述数学命题的过程中所表现出来的特征;数学命题的真理性特征指的是在真理的内容方面和确定逻辑真值过程的方法方面所体现出来的特征;数学命题的应用性特征是在数学命题的功能及其发挥方面所表现出来的特征;数学命题的关联性特征是数学命题与其他相关数学知识联系方面所表现出来的特征。这些特征的提出具有学习和教学研究的理论意义,为数学命题的学习和教学理论研究搭建了平台。

2. 基于特征的数学命题学习过程解析

基于特征的数学命题学习过程是在数学命题各特征的学习情境中,学习者从头脑里的数学认知(数学知识和数学认识)结构中提取相应的成分,组成外部学习环境中的数学认知系统,然后在组成这个系统的两个亚系统内部(数学知识系统和数学认识系统)各成分之间以及系统整体之间进行有效匹配和相互作用的过程。解析的过程涉及学习阶段、学习环节和相互作用的方式。

3. 基于特征的数学命题学习本质解析

基于特征的数学命题学习的本质解析主要是从多种视角对学习过程中数学命题的各种动态变化进行的细致分析。在相应的学习情境中,各特征被学习者的认知(数学知识和数学认识)结构重组,最终在学习者的头脑里建构了更强的新的数学认知结构。

4. 基于特征的数学命题教学目标 and 教学原则

在基于特征的数学命题学习过程解析和学习本质研究的基础上,笔者阐述了基于特征的数学命题教学目标。这一教学目标从长远来看侧重于通过数学命题的教学发展学生的数学思维能力,教会学生数学思考,以发展学生的认识力,全面提高学生的基本素质;从短期来看,主要是促使学生在头脑里建构起更强的数学认知结构。其特点表现在近期目标注重数学知识的掌握,长期目标注重学生认识力的发展。

在基于特征的数学命题教学目标的基础上,笔者构建了如下三组基于特征的数学命题教学原则:倾向于促进学生头脑里的数学知识结构建构的特征中心原则和特征联系原则;倾向于促进学生头脑里的数学认识结构建构的智力动作运演水平层次性原则、智力动作运演水平渐进性原则和有利于发展学生认识力的原则;倾向于促进学生头脑里的整体数学认知结构建构的引发系统整体活动性原则、特征教学对应学习过程原则和以特征为线索的多次组织化原则。

5. 基于特征的数学命题教学策略

以基于特征的数学命题学习过程解析和学习本质研究为基础,在基于特征的数学命题教学原则指导下,笔者提出了基于特征的数学命题教学策略:语义性特征教学的同化、形成和变式策略;真理性特征教学的起疑、元认知提示语定向和设验策略;应用性特征教学的结构化、例题化和情境化策略;关联性特征教学的体系化、问题化和联系化策略。

6. 基于特征的数学命题教学案例研究

结合基于特征的数学命题教学理论研究的结果,笔者对典型数学命题教学案例进行了研究,得到的结论是:数学命题教学的实践中存在一些问题,利用基于特征的数学命题教学理论可以对其给予一定的理论指导,从而提高数学命题教学的质量;同时在构建的理论中也有一些问题需要加以改进。

7. 研究展望

如今,基于特征的数学命题教学理论研究课题非常丰富,还需要有更多

的理论和实践方面的研究。另外,还可以将该课题的研究推广至大学中的数学命题教学的理论研究中。

总之,基于特征的数学命题教学理论通过强调与数学命题有关知识的教学促进学习者头脑里知识结构的建构,通过强调与数学命题有关知识的教学过程促进学习者头脑里认识结构的建构,通过学习者头脑里良好的、更加结构化的数学认知结构的建构来实现“既重视数学基础知识的教学,又要在教学中培养学生的创新精神和实践能力”的数学教育目标。

第二章 文献综述与课题的提出

第一节 国外数学命题教学研究综述

(一)关于数学命题学习的研究

“命题”一词作为教育学、心理学专业术语,与“原理”“规则”的表述差不多,其差异只在强调的侧重点不同。“……这些公式、法则、原理、定律都叫‘规则’。”^①“命题学习也称规则学习。”^②由此可见,“命题”“原理”“规则”在教育中的应用基本上是相同的,因此在进行资料整理时几乎不做区分。

关于数学命题学习的研究最容易想到的就是直接把心理学中命题学习的研究结论借鉴过来,因此这里是在对一般心理学中命题学习的一些研究成果进行综述的基础上,再对数学命题学习的研究进行综述。前者的综述意在探求研究的一些基本思路,后者的综述则是对数学命题学习研究的观点进行梳理。

1. 一般心理学中关于命题学习的研究

国外关于命题学习的研究主要以奥苏伯尔(D. P. Ausubel)和加涅(Robert. M. Gagne)的成果为代表。奥苏伯尔对命题学习的研究主要是从有意义学习的视角出发的,这一视角强调了命题的整体意义,把命题学习作为有意义学习的最高形式;而加涅的研究则主要是从规则的角度出发的,这一视角强调了命题的结构,把命题学习作为规则学习和高级规则学习的混合物。“……规则学习是通过法则、原理的理解,使学习者有能力去识别其中规则或原理在特殊情况下的应用,或者有能力应用原理去解决具体问题。高级规则的学习指学生会在不同条件下运用原理或规则解决问题,以获得更高级的原理或规则。显然,命题学习包含在规则学习和高级规则学习之中。”^③

① 邵瑞珍:《教育心理学》,上海教育出版社1997年版,第103~110页。

② 喻平:《数学教育心理学》广西教育出版社2004年版,第213页。

③ 喻平:《论数学命题学习》,《数学教育学报》1999年第4期。