新世纪高等学校公共课重点建设教材

微积分(下)
习题全解指南

(修订版)

王海敏　主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分(下)
习题全解指南

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下)习题全解指南 / 王海敏主编. — 杭州：浙江工商大学出版社，2017.9

ISBN 978-7-5178-2322-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… Ⅲ.①微积分—高等学校—题解 Ⅳ.①O172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 194614 号

微积分(下)习题全解指南

王海敏 主编

责任编辑 吴岳婷 刘 韵

封面设计 鲍 涵

责任印制 包建辉

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail:zjgsupress@163.com)

(网址:http://www.zjgsupress.com)

电话:0571-88904980,88831806(传真)

排 版 杭州朝曦图文设计有限公司

印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 23.5

字 数 486 千

版 印 次 2017 年 9 月第 1 版 2017 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5178-2322-3

定 价 47.00 元

前　言

本书是王海敏主编的《微积分》(浙江工商大学出版社 2015 年版)的配套用书。

本书按教材各章节顺序编排,每章内容由两部分组成:第一部分内容概要,主要是系统归纳总结这一章的基本概念、基本定理和基本方法,梳理知识结构;第二部分习题全解,与教材的习题一一对应进行详细解答,方便读者检查对所学内容的掌握程度,巩固学习效果。附录Ⅰ汇编了 2003 年至 2015 年全国研究生入学统一考试数学试题中微积分部分的全部试题,按照函数与极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数微积分,无穷级数,微分方程与差分方程初步的顺序。每道试题的前面都注明了试题的年份、卷种和分值,如 03304 表示 2003 年、数学三、分值 4 分。附录Ⅱ给出了附录Ⅰ中每道试题的详细解答,有些在解答前分析了解题思路,使读者不仅能学到这个题的具体求解方法,而且能学到如何来分析这个题的求解过程。还有些题的详细解答之后给出了评注,主要针对这类题型的解题方法作归纳总结,或指出其技巧点所在。

在这里我们建议,做题时,先自己想想,动手算一算,写出完整的解答过程,然后将自己所得出结果与书中的结果作比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么做错。如果还有不清楚的地方,可以与你的同学、老师研讨。如果用这样的态度和方法来阅读本书,不仅能提高你的解题能力,而且能使你更深刻地理解、掌握微积分的基本概念、基本理论和基本方法,习惯微积分的思维方式。

本书的第 2、4、5、8 章,附录Ⅰ,附录Ⅱ由王海敏执笔;第 1、7 章由袁中扬执笔;第 3、6 章由韩兆秀执笔。全书由王海敏统稿、定稿。

由于时间比较仓促,书中难免存在差错和欠缺,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2015 年 6 月于浙江工商大学

目　录

Contents

第 5 章　定积分及其应用

内容概要

一、定积分的概念

1. 定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，并作出和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a, b]$ 怎样划分，也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样选取，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 叫作被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫作被积表达式，x 叫作积分变量，a 叫作积分下限，b 叫作积分上限，$[a, b]$ 叫作积分区间.

和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在，那么就说 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

注 (ⅰ)定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(ⅱ)规定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，特别地，有 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. 可积的充分条件

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

3. 可积的必要条件

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

注 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界推不出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

4. 定积分的几何意义

在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y = f(x)$，两条直线 $x = a$，$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y = f(x)$，两条直线 $x = a$，$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值；在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形减去 x 轴下方图形面积所得之差.

二、定积分的性质

1. $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，其中 α，β 是常数.

2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. $\int_a^b 1\mathrm{d}x = b - a$.

4. 如果在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，特别地，有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注 若在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x) \neq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

5. 估值定理

设 M 及 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

6. 定积分中值定理

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

注 （ⅰ）定积分中值定理的 ξ 具有内点性，即若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

（ⅱ）称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的平均值.

三、微积分基本公式

1. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, b]$ 上连续.

2. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), a \leqslant x \leqslant b$.

注 （ⅰ）当积分上限是自变量的函数时，求导应使用复合函数的求导法则，例如：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

（ⅱ）若被积表达式含有自变量时，应设法将其移出积分号或转移至积分限，然后再求导.

3. 原函数存在定理

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

4. 微积分基本公式（牛顿－莱布尼茨公式）

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

四、定积分的换元法和分部积分法

1. 定积分的换元公式

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足

(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)上具有连续导数,且其值域为 $[a,b]$.

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 定积分的分部积分公式

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]\Big|_a^b-\int_a^b vu'\mathrm{d}x \text{ 或 } \int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

3. 几个常用结论

(1) $$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数}\end{cases}$$

(2)若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续周期函数,则

$$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbf{N}.$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x.$$

(4) $$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(5) $$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(6) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数}\end{cases}$$

五、反常积分

1. 无穷限的反常积分

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,取 $t>a$,称极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分,记作 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

如果上述极限存在,称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,如果上述极限不存在,称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续,取 $t<b$, 定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3)设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,定义 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内的反常积分为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to -\infty}\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t' \to +\infty}\int_0^{t'} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注　反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ $(a>0)$当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant 1$ 时发散.

2.无界函数的反常积分

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续,点 a 为 $f(x)$ 的瑕点.取 $t>a$, 称极限

$$\lim_{t \to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分,仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果上述极限存在,称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,如果上述极限不存在,称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续,点 b 为 $f(x)$ 的瑕点.定义 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

(3)设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 c $(a<c<b)$外连续,点 c 为 $f(x)$ 的瑕点,定义 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的反常积分为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t \to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t' \to c^+}\int_{t'}^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注 反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛,当 $q \geqslant 1$ 时发散.

六、定积分的应用

1. 平面图形的面积

(1)连续曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$ 与直线 $x=a$,$x=b(a<b)$ 所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)| dx.$$

(2)连续曲线 $x=\varphi(y)$,$x=\psi(y)$ 与直线 $y=c$,$y=d(c<d)$ 所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_c^d |\varphi(y)-\psi(y)| dy.$$

2. 旋转体的体积

(1)连续曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$,$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b \pi y^2 dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

(2)连续曲线 $x=g(y)$,直线 $y=c$,$y=d(c<d)$ 与 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y=\int_c^d \pi x^2 dy=\pi\int_c^d g^2(y)dy.$$

(3)连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$,$x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b x |f(x)| dx.$$

3. 简单经济应用

(1)若已知边际成本为 $C'(Q)$,则总成本为

$$C(Q)=\int_0^Q C'(t)dt+C(0),$$

其中 $C(0)$ 为固定成本.

(2)若已知边际收益为 $R'(Q)$,则总收益为

$$R(Q)=\int_0^Q R'(t)dt+R(0),$$

其中 $R(0)=0$.

习题全解

习题 5.1 定积分的概念与性质

1. 利用定积分的定义计算下列积分：

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间[0, 1]上连续，而连续函数是可积的，所以积分区间[0, 1]的分法及点 ξ_i 的取法无关. 因此，为了便于计算，不妨把区间[0, 1]分成 n 等份，分点为 $x_i=\frac{i}{n}, i=1, 2, \cdots, n-1$；这样，每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}, i=1, 2, \cdots, n$；取 $\xi_i=x_{i-1}, i=1, 2, \cdots, n$. 于是，得和式

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1-0}{n}\\&=\frac{1}{n}\times 0+\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].\end{aligned}$$

利用数学归纳法可以证明

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1).$$

于是

$$\sigma=\frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1).$$

按定积分的定义，即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解 因为被积函数 e^x 在积分区间[0, 1]上连续，所以定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 存在，并且定积分的值与区间[0, 1]的分法及点 ξ_i 的取法无关. 不妨把区间[0, 1]分成 n 等份，分点 $x_i=\frac{i}{n}, i=0, 1, 2, \cdots, n$；$\xi_i=\frac{i}{n}$，$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，则有

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-(e^{\frac{1}{n}})^n]}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{-\frac{1}{n}} = e-1.$$

2. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1.$

解 根据定积分的几何意义,定积分 $\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y = 2x, x = 1$ 及 x 轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为 1,高为 2,因此面积为 1,即 $\int_0^1 2x dx = 1.$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$

解 根据定积分的几何意义,定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ 表示由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第Ⅰ象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形面积,因此有 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$

解 由于函数 $y = \sin x$ 在$[0, \pi]$上非负,在$[-\pi, 0]$非正. 根据定积分的几何意义,定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$ 表示曲线 $y = \sin x (x \in [0, \pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去 $y = \sin x (x \in [-\pi, 0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积. 显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的,因此有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = D_1 - D_2 = 0.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

解 由于函数 $y = \cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上非负. 根据定积分的几何意义,定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 表示曲线 $y = \cos x\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y = \cos x\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right.$ 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积,而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等,因此有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = D_1 + D_2 = 2D_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x.$$

3. 估计下列各积分的值：

(1) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x \mathrm{d}x$.

解 设 $f(x) = x\arctan x, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$，则

$$f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} > 0, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right],$$

故 $f(x) = x\arctan x$ 在 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ 上单调增加，其最大值与最小值分别为 $M = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi, m = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. 故有

$$\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x \mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

解 令 $F(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$，则

$$F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

所以 $F(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内单调减少，从而 $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\frac{2}{\pi} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant F(x) \leqslant F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

故有

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

解 考察 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

令 $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ 得 $x = 0$. 比较函数值 $f(0) = 1, f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 知 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 的最大值为 1，最小值为 $= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 故有

$$e^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}\,dx\leqslant 1\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

即

$$\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}\,dx\leqslant\sqrt{2}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)\not\equiv 0$，证明：$\int_a^b f(x)\,dx>0$.

证 根据条件必定存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$. 由函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续可知，存在 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，使得当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时 $f(x)\geqslant\frac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^b f(x)\,dx.$$

由定积分的性质得到：

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx\geqslant 0,$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}\,dx=\frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0)>0,$$

$$\int_\beta^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

故有 $\int_a^b f(x)\,dx>0$.

5. 根据定积分的性质及第 4 题的结论，说明下列各对积分哪一个的值较大：

(1) $\int_0^1 x^2\,dx$ 还是 $\int_0^1 x^3\,dx$?

解 由于在$[0,1]$上 $x^2\geqslant x^3$，且 $x^2\not\equiv x^3$，所以 $\int_0^1 x^2\,dx>\int_0^1 x^3\,dx$.

(2) $\int_1^2 x^2\,dx$ 还是 $\int_1^2 x^3\,dx$?

解 由于在$[1,2]$上 $x^2\leqslant x^3$，且 $x^2\not\equiv x^3$，所以 $\int_1^2 x^2\,dx<\int_1^2 x^3\,dx$.

(3) $\int_1^2 \ln x\,dx$ 还是 $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$?

解 由于在$[1,2]$上，由 $0\leqslant\ln x\leqslant 1$ 得 $\ln x\geqslant\ln^2 x$，且 $\ln x\not\equiv\ln^2 x$，所以 $\int_1^2\ln x\,dx>\int_1^2\ln^2 x\,dx$.

(4) $\int_0^1 x\,dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$?