工科类大学数学公共课程系列教学丛书

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步学习辅导（下册）

曹殿立　苏克勤　主编

科学出版社

工科类大学数学公共课程系列教学丛书
普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步学习辅导

（下册）

曹殿立　苏克勤　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《高等数学(下册)》(曹殿立、马巧云主编,科学出版社)的配套学习教材,内容依照主教材的章节顺序依次编排,按章编写.各章内容包括知识总览、典型例题、习题详解、综合练习题详解等部分.

本书注重课程内容的系统归纳与总结,突出典型例题的示范讲解.为便于读者的学习,给出了主教材全部习题及综合练习题的详尽解答.在例题和习题的解答中,注重思路分析和方法归纳,并且对于部分题目给出多种解法.本书的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试大纲,例题、习题数量多且题型丰富.

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导.下册/曹殿立,苏克勤主编.—北京:科学出版社,2017.8

工科类大学数学公共课程系列教学丛书

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-03-053852-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… ②苏… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 146532 号

责任编辑:张中兴 梁 清 / 责任校对:邹慧卿

责任印制:白 洋 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017 年 8 月第一次印刷 印张:14 1/4

字数:287 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学同步学习辅导（下册）》

编委会

主　编　曹殿立　苏克勤

副主编　温　建　王亚伟

编　者　尹君毅　刘卫华　周建杰

前　言

本书是《高等数学(下册)》(曹殿立，马巧云主编，科学出版社)的配套学习教材.

本书以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为宗旨. 内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写. 每章内容如下：

1. **知识总览**　对教学内容系统地进行归纳总结，使读者能够全面把握知识体系与学习重点；

2. **典型例题**　对重点例题进行分类解析，对各类题型的解题思路和方法进行归纳总结，选题广泛，题型丰富；

3. **习题详解**　对教材的全部习题进行了详细解答；

4. **综合练习题详解.**

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、苏克勤、温建、王亚伟、尹君毅、刘卫华、周建杰，最后由曹殿立统一定稿.

华北水利水电大学的张愿章教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的谢意!

对科学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢!

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免存在疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2017 年 3 月 1 日

目　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

知识总览

一、学习重点

1. 向量的线性运算、数量积、向量积的概念及坐标运算；
2. 向量垂直及平行的条件；
3. 平面方程和直线方程；
4. 平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系的判定条件；
5. 点到直线以及点到平面的距离；
6. 常用二次曲面的方程及其图形；
7. 旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程；
8. 空间曲线的参数方程和一般方程；
9. 空间曲线在坐标面上的投影.

二、知识体系

- 向量代数
  - 向量的概念
    - 向量的定义、直观表示与坐标表达式
    - 向量的模、方向角、方向余弦，向量的投影
  - 向量的运算
    - 向量的线性运算、数量积、向量积、混合积
    - 向量的夹角、向量的平行与垂直的条件
- 空间解析几何
  - 平面、直线
    - 平面
      - 方程（点法式、一般式、截距式）
      - 位置关系（夹角、平行、垂直、点到平面的距离）
    - 直线
      - 方程（点向式、一般式、参数式）
      - 位置关系（夹角、平行、垂直、点到直线的距离）
    - 平面与直线的位置关系（夹角、平行、垂直），平面束
  - 曲面、曲线
    - 曲面方程（一般式、旋转曲面、柱面、二次曲面）
    - 曲线方程（一般式、参数式），投影曲线

典 型 例 题

一、向量的计算

例 1 已知两点 $P_1(0,-1,2)$ 和 $P_2(1,2,4)$，向量 $-2\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表达式为__________，与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向相同的单位向量为__________.

解 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\{1,2,4\}-\{0,-1,2\}=\{1,3,2\}$，$-2\overrightarrow{P_1P_2}=\{-2,-6,-4\}$.

因 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$，则与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向相同的单位向量为

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}=\frac{\{1,3,2\}}{\sqrt{14}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$__________，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$__________.

解 因 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=\{1,-2,-3\}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=\{2,1,-1\}$，故

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{1,-2,-3\}\cdot\{2,1,-1\}=1\times2+(-2)\times1+(-3)\times(-1)=3$；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,-2,-3\}\times\{2,1,-1\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-3\\2&1&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k};$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$； (3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

解 (1) 因 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\1&-2&-3\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-5\times1+5\times2-5\times0=5.$$

(2) 因 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$，故

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\2&0&-3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

(3) 因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-11$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-7$，故

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=-11\boldsymbol{c}-7\boldsymbol{b}=-11(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})-7(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=-18\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}.$$

例 4 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$__________.

解　因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2.$$

例 5　已知 $\boldsymbol{a}=\{1,4,5\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,2\}$，

(1) 若 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$，求 λ；

(2) 若 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$，求 λ.

解　由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=0$，得 $\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0$，故 $\lambda^2=\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2}=7$，于是 $\lambda=\pm\sqrt{7}$.

由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，得 $2\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 而 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda=0$.

例 6　求与向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,2\}$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

解　因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{x}$. 由向量平行的充要条件，存在 $\lambda\neq0$，使得

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=\{2\lambda,-\lambda,2\lambda\}.$$

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$，得 $4\lambda+\lambda+4\lambda=-18$，于是 $\lambda=-2$. 故 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=\{-4,2,-4\}$.

二、曲面与曲线

例 7　xOy 平面上的圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为__________.

解　变量 y 保持不变，则 $x^2+(y-2)^2=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$(\sqrt{x^2+z^2})^2+(y-2)^2=1,\quad 即\ x^2+(y-2)^2+z^2=1.$$

例 8　曲面 $4x^2+9y^2+z^2=1$ 与 yOz 平面的交线为__________.

解　yOz 平面方程是 $x=0$，与曲面 $4x^2+9y^2+z^2=1$ 联立，消去 x，则曲面 $9y^2+z^2=1$ 与 yOz 平面的交线为

$$\begin{cases}9y^2+z^2=1,\\ x=0.\end{cases}$$

例 9　将曲线 $\begin{cases}x^2+2y^2+(z+2)^2=8,\\ z=x\end{cases}$ 化为参数方程.

解　将 $z=x$ 代入 $x^2+2y^2+(z+2)^2=8$，得 $(x+1)^2+y^2=3$. 令 $x+1=\sqrt{3}\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，得原曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta-1, \\ y=\sqrt{3}\sin\theta, \\ z=\sqrt{3}\cos\theta-1 \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

例 10 求曲线$\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x+2z=1 \end{cases}$在 xOy 平面上的投影曲线的方程.

解 由所给方程组消去 z,得 $x=y^2+\frac{1}{4}(1-x)^2$,即$(x-3)^2+4y^2=8$,所以原曲线在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} (x-3)^2+4y^2=8, \\ z=0. \end{cases}$$

例 11 求曲面 $z=2x^2+y^2$ 与 $z=x^2+2x-4y+4$ 所围成的立体在 xOy 平面上的投影区域.

解 两曲面的交线为 C:$\begin{cases} z=2x^2+y^2, \\ z=x^2+2x-4y+4. \end{cases}$

从方程中消去 z,得$(x-1)^2+(y+2)^2=9$,则曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=9, \\ z=0. \end{cases}$$

显然,投影曲线是一个圆,所以所求立体在 xOy 平面上的投影区域就是该圆在 xOy 面上所围成的部分:

$$(x-1)^2+(y+2)^2\leqslant 9.$$

三、平面与直线

例 12 直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{3}$与平面 $x-y-2z+3=0$( ).

(A) 平行; (B) 垂直; (C) 斜交; (D) 直线在平面上.

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{2,-4,3\}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,-2\}$,且

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=2\times 1-4\times(-1)+3\times(-2)=0,$$

即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$,而直线上的点$(-1,-2,3)$不在平面上,故直线与平面平行.

例 13 平面 π 过 z 轴,且与平面 π_0:$y-z=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求平面 π 的方程.

解 由于平面 π 过 z 轴,故设所求平面方程为 $Ax+By=0$. 由平面的夹角公式,得

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|0\cdot A+1\cdot B+(-1)\cdot 0|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{A^2+B^2+0^2}}=\frac{|B|}{\sqrt{2}\sqrt{A^2+B^2}},$$

解得 $A=\pm B$. 故设所求平面方程为 $x+y=0$ 或 $x-y=0$.

例 14　求过点$(1,2,-3)$且同时平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{2,-1,2\}$ 的平面方程.

解　由于所求平面同时平行于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,则平面的法向量同时垂直于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,所以可以取它们的向量积为平面的法向量 $\boldsymbol{n}$,即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{1,2,0\}.$$

故所求的点法式方程为

$$(x-1)+2(y-2)=0,\quad 即\ x+2y-5=0.$$

例 15　求过点$(3,-2,1)$且与两平面 $3x+y-2z-1=0$ 和 $x+2y-3z+6=0$ 都平行的直线方程.

解　由于所求直线与两平面 $3x+y-2z-1=0$ 和 $x+2y-3z+6=0$ 平行,故所求直线的与两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 都垂直,故可取方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\{1,7,5\},$$

又所求直线通过点$(3,-2,1)$,故所求直线的对称式方程为

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-1}{5}.$$

例 16　求直线$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$与平面 $x+y+2z-4=0$ 的交点和夹角.

解　直线的参数方程为$\begin{cases}x=1-2t,\\ y=-2+t,\\ z=3t.\end{cases}$代入平面方程得

$$1-2t+(-2+t)+2(3t)-4=0,$$

解得 $t=1$. 把 $t=1$ 代入直线的参数方程,即得所求交点的坐标为$(-1,-1,3)$.

因直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{-2,1,3\}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,2\}$,故两者的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$
$$=\frac{|-2\times1+1\times1+3\times2|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{5}{2\sqrt{21}},$$

故直线与平面夹角为 $\varphi=\arcsin\dfrac{5}{2\sqrt{21}}$.

例 17 求点 $M_0(1,-1,0)$到直线 L:$\begin{cases}2y-3z-3=0,\\x-y=0\end{cases}$ 的距离.

解 方法一 (1) 求过点 M_0 且垂直于直线 L 的平面 π.

直线 L 的参数方程与对称式方程分别为

$$\begin{cases}x=3t,\\y=3t,\\z=2t-1,\end{cases}\qquad \frac{x}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2},$$

故过点 M_0 且垂直于直线 L 的平面 π 为

$$3(x-1)+3(y+1)+2z=0.$$

(2) 求出直线 L 与平面 π 的交点 M_1.

将直线 L 的参数方程代入平面 π,得 $t=\dfrac{1}{11}$. 回代入参数方程得 L 与 π 的交点为 $M_1\left(\dfrac{3}{11},\dfrac{3}{11},-\dfrac{9}{11}\right)$.

(3) 求距离 $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$.

由两点间距离公式,点到直线的距离为

$$d=|\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{\left(\frac{3}{11}-1\right)^2+\left(\frac{3}{11}+1\right)^2+\left(-\frac{9}{11}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{341}}{11}.$$

方法二 利用公式 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$ 计算.

方法三 直线 L 的参数方程为$\begin{cases}x=3t,\\y=3t,\\z=2t-1.\end{cases}$ 直线上任一 $M(x,y,z)$与 $M_0(1,-1,0)$的距离的平方和为

$$\begin{aligned}d^2&=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2\\&=(3t-1)^2+(3t+1)^2+(2t-1)^2=22\left(t-\frac{1}{11}\right)^2+\frac{31}{11},\end{aligned}$$

其最小值为$\dfrac{31}{11}$,故点 $M_0(1,-1,0)$到直线 L 的距离为$\sqrt{\dfrac{31}{11}}=\dfrac{\sqrt{341}}{11}$.

习 题 详 解

习题 7.1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$$=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}.$$

2. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

解　如图 7.1 所示，设菱形对角线的交点为 O，则利用向量加法的三角形法则，得到

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

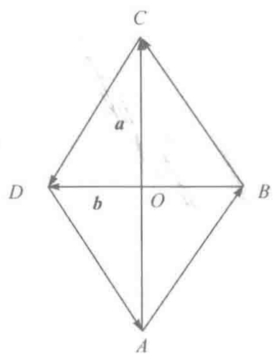

图 7.1

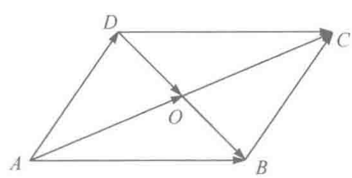

图 7.2

3. 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　如图 7.2 所示，设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，则依题意有 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. 故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 同理$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. 于是,由向量的定义有

$$AB /\!/ CD \text{ 且 } |AB|=|CD|, \quad AD /\!/ BC \text{ 且 } |AD|=|BC|,$$

即四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

习题 7.2

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$$A(-3,1,5),\quad B(1,-2,3),\quad C(-2,-3,6),\quad D(1,-2,-4).$$

解 点 A 在第Ⅱ卦限,点 B 在第Ⅳ卦限,点 C 在第Ⅲ卦限,点 D 在第Ⅷ卦限.

2. 在空间直角坐标系中,在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$$A(2,4,0),\quad B(0,-2,3),\quad C(2,0,0),\quad D(0,-2,0).$$

解 在空间直角坐标系中,若点 $M(a,b,c)$的三个坐标 a,b,c 中至少有一个为 0,则点 M 必在坐标面上;特别地,恰有一个为 0,则点 M 只在坐标面上;恰有两个为 0,则点 M 必在坐标轴上;恰有三个为零,则为坐标原点.

点 A 在 xOy 坐标面上,点 B 在 yOz 坐标面上,点 C 在 x 轴上,点 D 在 y 轴上.

3. 求点 $P(a,b,c)$关于各坐标面、各坐标轴以及坐标原点的对称点的坐标.

解 点 $P(a,b,c)$关于 xOy 坐标面,yOz 坐标面,xOz 坐标面的对称点分别为$(a,b,-c)$,$(-a,b,c)$,$(a,-b,c)$;关于 x 轴,y 轴,z 轴的对称点分别为$(a,-b,-c)$,$(-a,b,-c)$,$(-a,-b,c)$;关于坐标原点的对称点的坐标为$(-a,-b,-c)$.

4. 过点 $P(a,b,c)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 过点 $P(a,b,c)$且平行于 z 轴的直线上点的坐标为(a,b,z);过点 $P(a,b,c)$且平行于 xOy 的平面上的点的坐标为(x,y,c).

5. 求点 $M_1(6,3,1)$和点 $M_2(7,1,2)$之间的距离.

解 由两点间距离公式,有

$$|M_1M_2|=\sqrt{(7-6)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{6}.$$

6. 证明:以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$

所以$|AB|=|AC|$,故$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

7. 在 z 轴上求与点 $A(2,3,4)$ 和 $B(-2,4,1)$ 等距离的点.

解　因所求点在 z 轴上,故设所求点为 $(0,0,z)$,根据两点间距离公式,得

$$(2-0)^2+(3-0)^2+(4-z)^2=(-2-0)^2+(4-0)^2+(1-z)^2$$

解上式得 $z=\frac{4}{3}$. 故所求点为 $\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$.

8. 求点 $P(5,-3,4)$ 到各坐标轴的距离.

解　由点的坐标的定义,过点 $P(5,-3,4)$ 分别作垂直于 x,y,z 坐标轴的平面,则这三个平面与 x,y,z 轴交点分别为 $A(5,0,0)$,$B(0,-3,0)$,$C(0,0,4)$. 于是

$P(5,-3,4)$ 到 x 轴的距离为 $|PA|=\sqrt{(5-5)^2+(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$;

$P(5,-3,4)$ 到 y 轴的距离为 $|PB|=\sqrt{(5-0)^2+(-3+3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{41}$;

$P(5,-3,4)$ 到 z 轴的距离为 $|PC|=\sqrt{(5-0)^2+(-3-0)^2+(4-4)^2}=\sqrt{34}$.

9. 已知两点 $P_1(0,1,2)$ 和 $P_2(1,-1,0)$,试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 和 $-2\overrightarrow{P_1P_2}$.

解　因向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标等于点 P_2 的坐标减去点 P_1 相应的坐标,故

$\overrightarrow{P_1P_2}=\{1,-1,0\}-\{0,1,2\}=\{1,-2,-2\}$,　$-2\overrightarrow{P_1P_2}=\{-2,4,4\}$.

10. 已知点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,0,1)$,求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量.

解　因 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3,0,1\}-\{2,-1,3\}=\{1,1,-2\}$; $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$,则与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量为

$$\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{\{1,1,-2\}}{\sqrt{6}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}.$$

11. 求与向量 $\boldsymbol{a}=\{16,-15,12\}$ 平行,方向相反,且模为 75 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解　与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\{16,-15,12\}}{\sqrt{16^2+(-15)^2+12^2}}=\frac{1}{25}\{16,-15,12\},$$

根据题意知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|(-\boldsymbol{e}_a)=75\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)\{16,-15,12\}\\&=-3\{16,-15,12\}=\{-48,45,-36\}.\end{aligned}$$

12. 已知两点 $P_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $P_2(3,0,2)$,求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　因 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{3-4,0-\sqrt{2},2-1\}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$,故

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$