普通高等教育基础课规划教材

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计

（少学时）

赵立英 赵金玲 等编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计

（少学时）

赵立英　赵金玲　刘白羽　廖福成　王丹龄　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是为在中国大陆留学的本科生编写的概率论与数理统计教材，以“降难度、抓重点、求实效”为编写原则，内容尽量与留学生高中学习内容衔接，在分析国内外数学教育比较数据的基础上，补充了留学生学习概率论与数理统计课程中缺失的知识点。为帮助留学生克服语言上的困难，本书尽量避免大段文字叙述，增加实例，力求内容简明易懂，同时删除现行教材中过深过难，且非核心知识点的内容。

本书内容包括概率论的基础知识、随机变量、随机变量的数字特征、统计估值、假设检验等。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/赵立英等编. —北京：机械工业出版社，2017.2

普通高等教育基础课规划教材. 少学时

ISBN 978-7-111-55930-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第008672号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 陈崇昱
责任校对：刘 岚 封面设计：张 静
责任印制：李 飞
北京天时彩色印刷有限公司印刷
2017年3月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 7.25印张 · 123千字
标准书号：ISBN 978-7-111-55930-6
定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

Preface 前言

高等教育国际化是21世纪世界教育发展的趋势之一，也是我国高等教育发展的必然选择。来华留学生教育作为我国高等教育国际化的重要组成部分，其发展状况和水平既是衡量我国国民经济、科技、教育发展水平的重要指标，也是反映我国对外交往成果的重要内容。在教育部制定的《留学中国计划》中明确提出“到2020年，使我国成为亚洲最大的留学目的地国家。……在我国接受高等学历教育的留学生达到15万人。”在这股浪潮中，北京科技大学顺势而动，大力发展来华留学生教育，取得了一定的成绩。

北京市于2011年公布的《留学北京行动计划》中提出“扩大规模、优化结构、规范管理、保证质量”的工作方针，使学校深刻意识到当前来华留学生教育已经由注重数量的粗犷型发展进入了优化结构、提高质量的内涵型发展时期，也就是说，高校来华留学生教育工作在保证数量规模的前提下，需要深耕细作，狠抓培养质量。为此我校开展了课程改革试验活动，作为教学改革的具体实施者，高等数学教研组多次在师生间和教师间召开座谈会，认真听取留学生与任课教师的意见，寻找改革方向。

概率论与数理统计是师生公认的学习与讲授难度都较高的课程。这门课程要求学习者具备良好的数学基础，而很多留学生即使在自己国家完成了高中教育，仍无法达到我国高校，尤其是理工类高校的数学课程的学习水平，加上各高校目前仍采用汉语授课，使留学生的学习难度进一步加大。而对于授课教师来说，教材内容与留学生数学水平不匹配，也使老师难以在有限的教学周内有效地完成教学计划。为解决这一难题，我们教研组组织编写了本书。

本书以“降难度、抓重点、求实效”为编写原则。为使教材内容尽量与留学生高中学习内容衔接，学习时不产生断档，在编写过程中，我们参考了国外数学教材，以了解国外数学教育的难易程度与知识点的讲解情况。在分析国内外数学教育比较数据的基础上，我们补充了留学生在学习概率论与数理统计课程中缺失的知识点，以期为他们夯实基础，通过对知识点由浅入深、由易而难的讲解，减轻甚至避免留学生对课程产生畏难、厌学等情绪。为帮助留学生克服语言上的困难，教材中尽量避免了大段的文字叙述，增加实例，力求内容简明易懂，激发学生的学习兴趣，同时删除现行教材中过深过难，且非核心知识点的内容，真正做到让留学生见之思学，学之能会。

本书是北京市资助的“北京科技大学教学改革”重点立项项目，我们希望通过本书的出版，抛砖引玉，推动更多课程进行教学改革，推动更多同仁投入到留学生教材编写的工作中来。教材编写是发展来华留学生教育的基础工作，只有以留学生需求为导向，不断改革教材内容，探索适合的教育模式，才能从根本上提高来华留学生培养的质量，从而促进来华留学生教育的良性循环，实现来华留学生教育的可持续发展。

编　者

Contents

目　录

第 1 章 概率论的基础知识

1.1 预备知识

1.1.1 集合论的基本知识

1. 定义

集合是具有某种特性的研究对象的全体。这些研究对象称为集合的**元素**（element）或**成员**（member）。给定一个对象，我们总能判定它是否在一个集合中。

用大写字母 A、B、C 等来表示集合；

用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素。

若 a 是集合 A 的元素，则记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；若 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a \notin A$，读作 a 不属于 A。

2. 集合表示法

（1）如 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B=\{a,b,c,\cdots,z\}$。

（2）$A=\{x \mid P(x)\}$，其中 $P(x)$ 表示 x 所满足的条件。

（3）还可以用文氏图表示集合。

3. 例子

（1）$\mathbf{Q}=\{x \mid x=p/q, q\neq 0, p、q \text{ 为整数}\}$，这是有理数集合。

（2）$\mathbf{R}=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，这是实数集合。

（3）$S=\{x \mid ax^2+bx+c=0\}$，这是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的集合。

（4）$\Phi'=\{x \mid x^2+1=0, x\in \mathbf{R}\}$，这是方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合。

（5）$\Phi''=\{\text{身高为 100m 的人}\}$。

注：例子（4）与例子（5）所表示的“集合”实际上不含任何元素，我们称它们为**空集**（合），与空集对应的是“全集”。引入空集会给讨论带来方便。

可证，所有空集都是相同的，即空集是唯一的。今后用$\varnothing$表示空集，而全集则是所考虑的所有对象的集合。

4. 集合的关系与运算

（1）**包含** $A\subset B$：若 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记为 $A\subset B$。这时称 A 是 B 的子集。如图1-1所示。

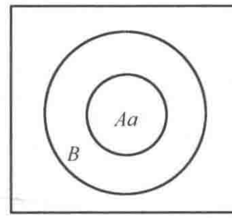


图1-1　包含

可证，空集包含于任何集合中。

（2）**相等** $A=B$：如果 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

明显地，$A\subset A$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$。

（3）**并集** $A\cup B$（或 $A+B$）：$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$。如图1-2所示。

（4）**交集** $A\cap B$（或 AB）：$AB=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$。如图1-3所示。

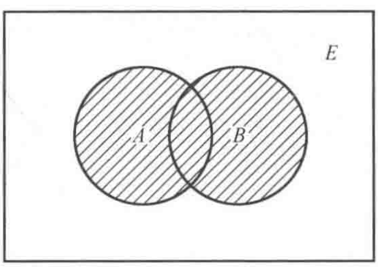


图1-2　并集

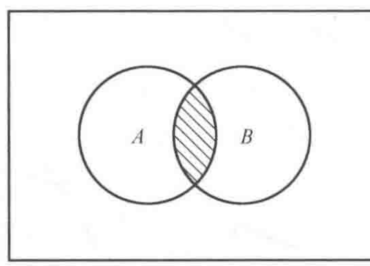


图1-3　交集

（5）**差集** $A-B$（或 $A\setminus B$）：$A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$。如图1-4所示。

（6）**余集**：设 S 为全集，则称 $S-A$ 为 A 的余集，记为$\overline{A}$。如图1-5所示。

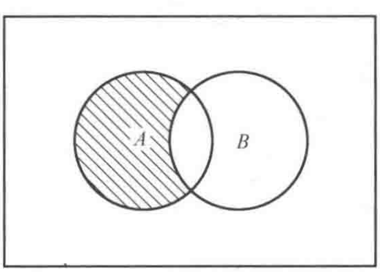


图1-4　差集

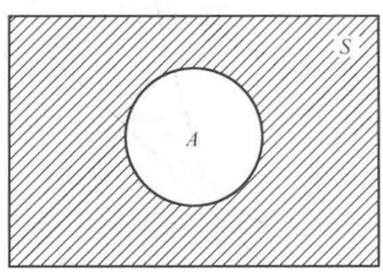


图1-5　余集

可证$\overline{\overline{A}}=A$，$A\subset B\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

（7）$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$。

(8) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$。

(9) $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(A-B)C=(AC)-(BC)$。

(10) $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$。

(11) 德 · 摩根 (de Morgan) 公式

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}。$$

5. 集合的分类

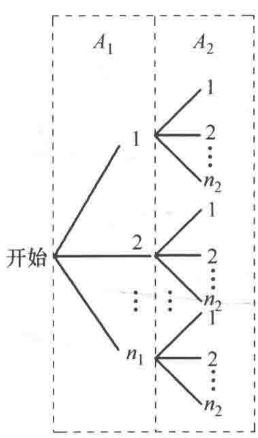
有限集、无限集（包括可数集、不可数集）。

1.1.2 排列与组合

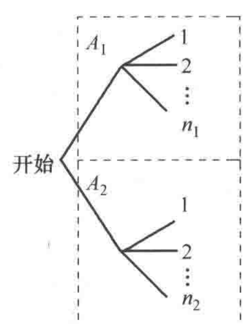
1. 乘法原理与加法原理

乘法原理：若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再进行 A_2 过程，共有 n_1n_2 种方法。

加法原理：若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程或 A_2 过程共有 n_1+n_2 种方法。



乘法原理



加法原理

以上两个原理可推广到 n 个过程的情形。

2. 排列

从 n 个不同元素中取出 r 个排列成一列，不允许其中任何元素重复出现，叫作 n 个元素的一个 ***r*-（无重）排列**。

n 个元素的 r-排列的总数用 A_n^r 表示，n 个元素的 n-排列称为全排列，全排

列的个数记为 P_n（即 $P_n = A_n^n$）。

定理 1.1 （1）$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$；

（2）$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$。

证明 只需证明（1）。

在一个排列 $a_1a_2\cdots a_r$ 中，a_1 可以取 n 个元中的任何一个，故有 n 种取法。a_1 取定后，a_2 可以取其余 $n-1$ 个元中的任何一个，有 $n-1$ 种取法。依次下去，在 a_1，a_2，…，a_{r-1} 取定后，a_r 可以取剩下的 $n-r+1$ 个元中的任何一个，故有 $n-r+1$ 种取法。由乘法原理，总的取法数为

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

证毕。

【例 1】 从 1，2，…，9 中任取 3 个数字，可以组成

$$A_9^3 = 9\times 8\times 7 = 504$$

个没有重复数字的三位数。

【例 2】 五人站成一排照相，问共有多少种不同的站法。

解 共有 $P_5 = 5!$ 种不同的站法。

注：若指定一人在中间，则排法数为 $P_4 = 4!$。

【例 3】 一共有多少个每位数字不同的 5 位数？

解 一个每位数字不同的 5 位数是数字 0，1，2，…，9 的一个 5-排列。在这些排列中，首位是 0 的 5-排列不是 5 位数。所以每位数字不同的 5 位数共有

$$A_{10}^5 - A_9^4 = 27216\ （个）。$$

3. 组合

定义 1.1 从 n 个不同元素中任意选出 r 个构成一组（不计其中元素顺序），且不允许任何元素重复出现，称为 n 个不同元素的一个 ***r*-（无重）组合**。

n 个不同元素的 r-组合的个数记为 C_n^r 或 $\dbinom{n}{r}$，可证

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}(r=1,2,\cdots,n)。$$

【例 4】 从一副 52 张的扑克牌中任意取出 5 张，有 C_{52}^5 种取法，没有 A 的取法为 C_{48}^5 种，限定 5 张中有一张是 A 的取法为 $C_4^1C_{48}^4$ 种。

【例 5】 在一个平面上给出 30 个点，其中没有三点在一条直线上。问在该平面上通过这些点可以确定多少条不相同的直线？可以构成多少个位置不同的三角形？

解　不相同的直线数为

$$C_{30}^{2}=\frac{30!}{2!\times 28!}=435,$$

位置不同的三角形数为

$$C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!\times 27!}=4060。$$

4. 可以重复的排列

定义 1.2　从 n 个不同元素中取出 r 个进行排列，允许其中元素重复出现，叫作 n 个元素的一个 ***r*-可重排列**。

n 个不同元素的 r-可重排列的总数记为 $U(n,r)$，可证

$$U(n,r)=n^{r}(r\text{ 可以大于 }n)。$$

n 个元素如果可以分成 k 组，每组分别有 m_1，m_2，…，m_k 个相同元素，而组间元素不同$\left(\sum_{i=1}^{k}m_i=n\right)$，则这 n 个元素的全排列总数为

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}。$$

证明　如设这组元素为

$$\underbrace{a\cdots a}_{m_1\text{个}}\underbrace{b\cdots b}_{m_2\text{个}}\cdots\underbrace{k\cdots k}_{m_k\text{个}} \tag{1}$$

设这些元素的排列总数为 x，我们把 m_1 个 a，m_2 个 b，…，m_k 个 k 区别开来，比如说，我们给它们编上号

$$a_1\cdots a_{m_1}b_1\cdots b_{m_2}\cdots k_1\cdots k_{m_k} \tag{2}$$

固定式（1）中 x 个排列的一个，则这个排列对应于式（2）中的 $m_1!m_2!\cdots m_k!$ 种不同排法，而式（2）的排列总数为 $n!$，从而有

$$m_1!m_2!\cdots m_k!x=n!,$$

因而有

$$x=\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}。$$

我们规定：$C_n^0=1$，$A_n^0=1$，$0!=1$。

5. 关于排列组合的初等性质

（1）$A_n^r=nA_{n-1}^{r-1}(n\geqslant r\geqslant 2)$；

（2）$A_n^r=rA_{n-1}^{r-1}+A_{n-1}^{r}(n\geqslant r\geqslant 2)$；

（3）$C_n^r=C_{n-1}^{r}+C_{n-1}^{r-1}(n\geqslant r\geqslant 2)$；

（4）$C_n^r=C_n^{n-r}$；

(5) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$；

(6) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$。

证明　性质（1）的证明：在 n 个元素中，任何一个均可居于无重排列的首位，故共有 n 种取法，当首元取定后，其他位置上的元素只能从其余 $n-1$ 个中取，从而有 A_{n-1}^{r-1} 种取法，由乘法原理知 $A_n^r = nA_{n-1}^{r-1}$。

性质（2）的证明：当 $r \geqslant 2$ 时，把 n 个元素的 r-无重排列分成两类，一类含有某元素 a，一类不含元素 a。对前一类中的排列，a 有 r 个位置可供占取，去掉 a 后，剩下的就是 $n-1$ 个元素的 $(r-1)$-无重排列，故排列数为 rA_{n-1}^{r-1}。后一类排列就是 $n-1$ 个元素的 r-无重排列，故排列数为 A_{n-1}^r。因此有

$$A_n^r = rA_{n-1}^{r-1} + A_{n-1}^r。$$

性质（2）的另一种证明：

$$\begin{aligned}A_n^r &= n(n-1)\cdots(n-r+1) = nA_{n-1}^{r-1} = [r+(n-r)]A_{n-1}^{r-1} = rA_{n-1}^{r-1} + (n-r)A_{n-1}^{r-1}\\ &= rA_{n-1}^{r-1} + (n-r)(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(r-1)+1]\\ &= rA_{n-1}^{r-1} + (n-r)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\ &= rA_{n-1}^{r-1} + (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\\ &= rA_{n-1}^{r-1} + A_{n-1}^r。\end{aligned}$$

性质（3）的证明：

当 $r \geqslant 2$ 时，把 n 个元素的 r-无重组合分成两类，一类含有某固定元素 a，一类不含元素 a。在第一类组合中去掉 a 后，就是 $n-1$ 个元素的 $(r-1)$-无重组合，添上 a 后，就是包含 a 的 r-无重组合，故二者之间有一一对应关系。而 $n-1$ 个元素的 $(r-1)$-无重组合数为 C_{n-1}^{r-1}，故第一类组合数为 C_{n-1}^{r-1}。第二类组合就是 $n-1$ 个元素的 r-无重组合，其个数为 C_{n-1}^r，所以

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}。$$

性质（3）的另一种证明：

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{rA_{n-1}^{r-1}}{r!} + \frac{A_{n-1}^r}{r!} = \frac{A_{n-1}^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{A_{n-1}^r}{r!} = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}。$$

其余公式的证明略。

6. 可以重复的组合

如果从 n 个元素中选出 r 个进行组合，允许元素重复出现，称为 n 个元素的一个 ***r*-可重组合**，其组合数总数记为 $F(n, r)$。可证：

$$F(n,r) = \binom{n+r-1}{r}。$$

1.2　随机试验

确定性现象：在一定条件下必然发生的现象。

随机现象：在个别试验中其结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象。

研究随机现象，首先要对现象进行观察或试验。在概率论中把具备以下特点的试验称为**随机试验**：

（ⅰ）在相同条件下重复进行；

（ⅱ）每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有结果；

（ⅲ）进行一次试验之前不知道哪个结果会出现。

我们把随机试验简称为**试验**。

下面几个是试验的例子。

E_1：抛一枚硬币，观察正反面出现的情况；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：在一批灯泡中抽取一只，观察其寿命。

1.3　样本空间和随机事件

1.3.1　样本空间

由随机试验 E 的所有可能结果构成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S，样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**。

【例 1】　抛一枚硬币，观察正反面出现的情况，$S=\{$正面，反面$\}$。

【例 2】　掷一颗骰子，观察出现的点数，$S=\{1,2,3,4,5,6\}$。

1.3.2　随机事件

随机事件：样本空间 S 的子集称为试验 E 的**随机事件**，简称**事件**。用大写字母表示事件。事件 A 发生，当且仅当 A 的一个样本点出现。

基本事件：由一个样本点组成的单点集，因而样本空间又称为基本事件空间。

必然事件 S：在一定的条件下重复进行试验时，有的事件在每次试验中必然会发生，这样的事件叫必然发生的事件，简称**必然事件**。

不可能事件∅：把在一定条件下不可能发生的事件叫**不可能事件**。

【例 3】 为了检验一批产品的合格率，取出一件进行检查，$S=\{$合格，不合格$\}$。

1.3.3 事件的关系和运算

1. 事件的关系

（1）包含：若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，指事件 A 发生必导致事件 B 发生，这时称 A 是 B 的子事件。

（2）相等：若 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$，它表示 A 与 B 要么同时出现，要么同时不出现。

（3）$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和**，它表示 A 与 B 至少有一个发生，推广 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（4）$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积**，它表示 A 与 B 同时发生，推广 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（5）$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差**，它表示 A 发生但 B 不发生。

（6）若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互不相容的或互斥的**，它表示 A 与 B 不能同时发生。

（7）若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与 B 互为**逆事件**或互为**对立事件**，它表示每次试验中 A 与 B 必有一个发生且只有一个发生。A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$。

2. 事件的运算

事件的运算满足以下运算律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$。

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$。

（3）分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

（4）德·摩根公式

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}。$$

一些明显结果：

$$A\cup A=A,\ A\cap A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,$$
$$A\cup S=S,\ A\cap S=A,\ A-\varnothing=A,\ S-A=\overline{A},$$
$$A-B=A\overline{B}。$$

【例 4】 若 A、B、C 是三个事件，则

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C} \text{ 或 } A-B-C \text{ 或 } A-(B\cup C)。$$

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可表示为

$$AB\overline{C} \text{ 或 } AB-C \text{ 或 } AB-ABC \text{ 或 } AB-AC \text{ 或 } AB-BC。$$

(3) A、B、C 都发生可表示为 ABC。

(4) A、B、C 恰有一个发生可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$。

(5) A、B、C 恰有两个发生可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$。

(6) A、B、C 至少发生一个可表示为 $A\cup B\cup C$ 或

$$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC。$$

【例 5】 从一批产品中每次取出一个进行检验（取出的产品不放回），A_i 表示第 i 次取到合格品（$i=1,2,3$），试用事件的运算符号表示下列事件：

(1) 三次都取到合格品；

(2) 三次中至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；

(4) 三次中至多有一次取到合格品。

解 (1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；

(4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

或

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

或

$$\overline{A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3}。$$

1.4 频率与概率

1.4.1 频率的定义和性质

定义 1.3 设 A 为一事件，在相同条件下，把相应的试验进行 n 次，设 A

发生了 n_A 次，则称 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**。

频率的性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k 两两互斥，则 $f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$。

1.4.2 概率的定义和性质

定义 1.4 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 对每个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 对于必然事件 S，$P(S)=1$；

(3) 设 A_1，A_2，…两两互斥，则 $P(A_1+A_2+\cdots)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$ （可列可加性）。

概率的性质：

(ⅰ) $P(\varnothing)=0$。

(ⅱ) 若 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$。

(ⅲ) $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$，

$P(A)\leqslant P(B)$。

一般地，$P(B-A)=P(B)-P(AB)$。

(ⅳ) $P(A)\leqslant 1$。

(ⅴ) $P(\overline{A})=1-P(A)$。

(ⅵ) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

(ⅶ) $P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$。

【例 1】 求证：$P[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)]=P(A)+P(B)-2P(AB)$。

证明 $P[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)]=P[(A\cup B)-AB]=P(A\cup B)-P(AB)$

$=[P(A)+P(B)-P(AB)]-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(AB)$。

【例 2】 求证：$P(AB)\geqslant 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$

证明 $P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})]$