线性代数

主编　李莹

科学出版社

线 性 代 数

主　编　李　莹
副主编　张凤霞　孔　旭　郭文彬
主　审　赵建立

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是为普通高等院校各理工类、经管类专业开设的线性代数课程编写的教材，全书共 6 章，分别是行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性与向量空间、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换，每章均配有练习题(带*者为近几年考研真题).

本教材可作为普通高等院校理工类、经管类专业学生的教材，也可作为农学、医学类学生的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 李莹主编. —北京：科学出版社，2017.6

ISBN 978-7-03-053162-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 李… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O152.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 128148 号

责任编辑：任俊红　李淑丽　张茂发 / 责任校对：桂伟利

责任印制：赵　博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000　B5

2017 年 6 月第一次印刷　印张：9 1/2

字数：202 000

定价：29.00 元

前　言

随着数学的发展和人类文明的进步，数学不仅渗透到了几乎所有技术和科学领域，而且人文社会科学数学化的趋势也在不断增强. 与此同时，数学在提高国民素质、培养各级各类人才方面也显现出特殊的不可替代的教育功能. 数学在社会生活中有许多出人意料的应用，在许多场合，它已经不再单纯是一种辅助性的工具，已经成为解决许多重大问题的关键性思想、方法与技术，由此产生的许多成果遍布生活方方面面，并极大地改变着我们的生活方式. 运用数学思维理解问题将对人类的思想领域产生巨大的影响，数学在人类文明的发展中的作用也将日趋重要.

线性代数是整个数学大厦的基石之一，是理工类、经管类专业学生的数学基础课. 无论对于学生能力的培养、良好数学素养的养成，还是铸就未来学习的坚实基础，它都具有举足轻重的作用. 线性代数的理论与方法已被广泛地应用于自然科学、人文社会科学、经济社会、工程技术等领域.

线性代数的主要内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换，其中矩阵是联系所有内容的纽带和桥梁. 抽象是线性代数的最大特点，学生普遍感觉难学，学习没兴趣. 为了调动学生的学习积极性，解决因抽象给学习带来的困难，本书将体现如下特色：

(1) 凸显背景与应用. 尽量从概念的起源与学生熟悉的实际问题引入概念和定理，让学生学习抽象的知识时顺畅自然；注重线性代数与现代科技、社会生活的密切联系，在书的部分章节增加一些应用的实例，彰显线性代数应用的广泛性，提高学生的学习兴趣.

(2) 强化人文主义教育. 书中增加了数学家小传——人物聚焦. 让学生了解数学家在数学发展史上的卓越贡献.

(3) 重视思维培养. 注重介绍基本概念、原理产生的过程，培养学生观察、思考、提出问题的能力，不断提高学生的数学素养.

(4) 删繁就简，体现主线. 根据大量的教学经验，对一些理论较强、学生感觉特别难学的内容，或通过具体例子把思想讲透，或仅用低阶说明问题的本质. 整本书体现矩阵的主线作用，解决问题时强化矩阵秩的作用.

(5) 重视现代化教学手段的应用. 因社会的高度信息化，学生获取知识的方式可以不受时间、地点的限制，我们在每一章都录制了一些微课，有兴趣的读者

可随时随地地观看.

(6) 强化计算工具的作用. “高科技本质上是一种数学技术”已成为社会的共识. 数学能成为一种技术的关键是因为与计算机的有机结合. 这种结合的关键是科学计算, 而且线性代数的计算是整个科学计算的基础. 为此, 本书附录中附有线性代数中常见问题用 MATLAB 解决的相关命令和程序, 通过该部分内容的学习, 使学生能在理解、掌握数学理论知识的同时, 简单、迅速地计算出繁杂的数学运算结果, 增强学生利用计算机解决数学问题的意识; 同时让他们体会理论, 体会不同理论的作用与局限.

(7) 例题、习题配置丰富. 教材中配置了典型的例题, 尽可能不局限于孤立地求解某种特例, 而是注重剖析思想、开拓思路, 从中寻求一类题型的一般规律和思想方法, 以期举一反三. 例题、习题中选取了近几年的一些全国硕士研究生入学考试统一试题, 这些题目非常典型, 在习题中我们都加注了*号.

在本书的撰写及出版过程中, 得到山东省应用型特色名校建设资金及山东省高水平应用型重点立项建设专业项目的资助, 得到山东省教学改革立项课题的资助, 得到科学出版社领导及编辑的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢!

由于作者水平有限, 书中难免有疏漏之处, 诚请读者批评指正.

编　者

2017 年 3 月于聊城大学

目　　录

第1章 行 列 式

行列式最早是于十七世纪末在求解线性方程组的过程中提出的，其作为一个独立的数学概念的理论研究始于十八世纪. 自从该概念提出以来，在许多数学分支中发挥了巨大的作用. 目前行列式已经成为一个重要的数学工具，广泛应用于科学技术的众多领域. 本章首先介绍二阶、三阶行列式的概念，再将其推广到一般的 n 阶行列式，然后讨论它的基本性质和常见的计算方法，最后介绍将其用于线性方程组求解的克拉默法则.

1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 x_i 为未知数，a_{ij} 为 x_i 的系数，b_i 为常数项 $(i, j = 1, 2)$.用消元法分别消去未知数 x_2 和 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)中的分子、分母具有相同的形式: 都是四个数分两对相乘再相减而得.为了便于叙述和记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**. 数 a_{ij}, $i, j = 1, 2$ 称为行列式 D 的元素或元，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式 D 的

(i, j)元.

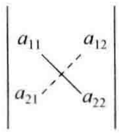

图 1.1

上述二阶行列式定义的特点如图 1.1 所示，a_{11}到a_{22}的实连线上的两元素之积减去a_{12}到a_{21}的虚连线上两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，式(1.1.2)中x_1，x_2的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中D是方程组(1.1.1)的系数所确定的二阶行列式，称为**系数行列式**，D_1是用常数项b_1，b_2替换D中第 1 列的元素a_{11},a_{21}所得的二阶行列式，D_2是用常数项b_1，b_2替换D中第 2 列的元素a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1.1　利用二阶行列式求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=12, \\ 2x_1+\ \ x_2=1. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-2=10,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21.$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-10, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=21.$$

1.1.2　三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

其中 x_i 为未知数，a_{ij} 为 x_i 的系数，b_i 为常数项 $(i, j=1,2,3)$.用消元法消去 x_2 和 x_3 得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其特点如图 1.2 所示，图中三条实线上三个元素的乘积冠正号，三条虚线上三个元素的乘积冠负号.

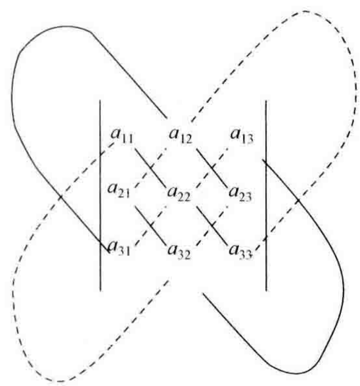

图 1.2

称 D 为方程组(1.1.3)的系数行列式，根据三阶行列式的定义，令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.$$

若 $D \neq 0$，则

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

同理可得

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

$D_j(j=1,2,3)$是用常数项b_1,b_2,b_3替换D中第j列的元素a_{1j},a_{2j},a_{3j}所得的三阶行列式.

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-2\\5&3&1\\-3&1&2\end{vmatrix}.$$

解 根据三阶行列式的定义, 有

$D=1\times3\times2+5\times1\times(-2)+2\times1\times(-3)-(-2)\times3\times(-3)-2\times5\times2-1\times1\times1=-49.$

1.2 排列与逆序

为了定义一般的n阶行列式, 首先介绍排列与逆序的概念及有关性质.

由数码$1,2,\cdots,n$组成的一个n元有序数组$j_1j_2\cdots j_n$, 称为一个n**元排列**.

例如, 3412 是一个四元排列, 25314 是一个五元排列.

显然n元排列共有$n!$个.

n元排列$123\cdots n$是按由小到大的顺序排列的, 称为**自然排列**. 而其他的排列都或多或少地破坏了自然顺序, 即存在较大的数码排在较小的数码前面的情况.

定义 1.2.1 在一个n元排列$j_1j_2\cdots j_n$中, 如果较大的数码j_t排在较小的数码j_s前面, 则称j_t与j_s构成一个**逆序**. 一个n元排列$j_1j_2\cdots j_n$中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**, 记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.逆序数是偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 四元排列 3412 有四个逆序, $\tau(3412)=4$, 故四元排列 3412 为偶排列. 五元排列 34152 有五个逆序, $\tau(34152)=5$, 故五元排列 34152 为奇排列.

可以用以下方法计算一个排列的逆序数:先数 1 前面有几个数码, 记为T_1, 然后划去 1; 再数 2 前面有几个数码, 记为T_2, 然后划去 2;如此下去, 直到计算出T_{n-1}, 则排列的逆序数为$T_1+T_2+\cdots+T_{n-1}$.

例 1.2.1 计算下列排列的逆序数.

(1) 45321; (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) $\tau(45321)=4+3+2+0=9$;

(2) $\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))$

$$= 0 + (n-1) + 0 + (n-2) + \cdots + 0 + 1 + 0 + 0 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

注 逆序数可以在 MATLAB 中通过编写简单程序计算，有兴趣的读者可参考附录.

在所有三元排列中，123, 231, 312 是偶排列，而 132, 213, 321 是奇排列，即它们的奇偶排列各占一半. 这种现象是不是偶然的？在一般的 n 元排列中也有这样的规律吗？为此需要介绍对换的定义及其性质.

定义 1.2.2 在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果交换某两个数码的位置，其余的数码位置不动，则称对这个排列施行了一次**对换**. 如果交换的两个数码是 i 与 j，就把该对换记为 (i,j).

例如，

$$2431 \xrightarrow{(2,3)} 3421.$$

即对排列 2431 施行一次对换(2, 3)后，得到了一个新排列 3421.经计算可知这两个排列的奇偶性相反.

定理 1.2.1 每施行一次对换，都改变排列的奇偶性.

证 (1) 特殊情形，设对换的两个数码 i 与 j 是相邻的，即

$$\cdots i \quad j \cdots \xrightarrow{(i,j)} \cdots j \quad i \cdots$$

其中“…”表示那些位置不动的数码. 显然，在新旧两个排列中这些数码构成的逆序相同. i，j 分别与“…”中所构成的逆序也相同. 但当 $i<j$ 时，i 与 j 在旧排列中不构成逆序，而在新排列中却构成一个逆序，即新排列中增加了一个逆序. 同理，当 $i>j$ 时，新排列比旧排列又少了一个逆序. 所以新旧两个排列的奇偶性发生改变.

(2) 一般情形，设

$$\cdots i \quad k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad j \cdots \xrightarrow{(i,j)} \cdots j \quad k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad i \cdots \tag{1.2.1}$$

其中“…”表示那些位置不动的数码. 将原排列中的 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 交换，这时经过 $s+1$ 次相邻数码的对换后得到排列 $\cdots k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad j \quad i \cdots$，再将此排列中的 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_2,k_1$ 交换，这时又经过 s 次相邻数码的对换后得到了(1.2.1)式右端的新排列. 因此对原排列施行对换 (i,j) 可以经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现. 由(1)的证明知，每施行一次相邻数码的对换都要改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，故新旧排列的奇偶性发生改变.

推论 1.2.1.1 当 $n \geqslant 2$ 时，在 $n!$ 个 n 元排列中奇偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证 设在 $n!$ 个 n 元排列中有奇排列 s 个，偶排列 t 个，下证 $s=t$.

将这 s 个奇排列都施行同一个对换 (i,j)，由定理 1.2.1 知这 s 个奇排列变成 s 个偶排列，而偶排列共有 t 个，于是 $s \leqslant t$.同理可得 $t \leqslant s$，因此 $s=t$.而 $s+t=n!$，即 $s=t=\dfrac{n!}{2}$.

1.3 n 阶行列式的定义

先来分析二、三阶行列式的共同特点.

我们已经知道二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

可以发现以下特点:

(1) 它是 $2!=2$ 项的代数和;

(2) 每一项都是两个元素相乘，且这两个元素既位于不同的行又位于不同的列;

(3) 每一项的两个元素行标按自然顺序排列后，其所在的列标构成的全部二元排列为 12 和 21，前一个为偶排列，与其对应的项 $a_{11}a_{22}$ 取正号;后一个为奇排列，与其对应的项 $a_{12}a_{21}$ 取负号.

于是二阶行列式可以简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二元排列求和.

对于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以发现有类似于二阶行列式的以下特点:

(1) 它是 $3!=6$ 项的代数和;

(2) 每一项都是三个元素相乘，且这三个元素既位于不同的行又位于不同的列;

(3) 每一项的三个元素行标按自然顺序排列后，其所在的列标构成的全部三元排列为: 123, 231, 312, 132, 213, 321. 前三个为偶排列，与其对应的项均取正号，

后三个为奇排列，与其对应的项均取负号.

于是三阶行列式可以简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三元排列求和.

仿此，可以定义 n 阶行列式.

定义 1.3.1　称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为一个 n **阶行列式**，它表示

(1) $n\,!$项的代数和;

(2) 每一项都是 n 个元素相乘，且这 n 个元素既位于 D 中不同的行，又位于不同的列;

(3) 每一项的 n 个元素行标按自然顺序排列后，其相应的列标排列为偶排列时该项取正号，为奇排列时该项取负号.

这一定义用符号可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. 称

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

为行列式 D 的一般项.

n 阶行列式常记为 D_n 或 $|a_{ij}|$，简记为 D. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$，即是数 a_{11} (此时不要与 a_{11} 的绝对值混淆). n 阶行列式 D 中，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元素**，它们所在的线称为行列式的**主对角线**.

例 1.3.1　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

$a_{13}a_{21}a_{42}$，$a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$，$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$ 是否为四阶行列式 D 的项？如果是, 应取何符号？

解　$a_{13}a_{21}a_{42}$ 与 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 都不是 D 的项, 因为前者只有三个元素相乘, 后者中的 a_{12} 和 a_{32} 位于同一列.

$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$ 是 D 的一项, 其行标排列为自然顺序, 其列标排列为 4132, 且 $\tau(4132)=4$，故该项取正号.

$a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}$ 也是 D 的一项, 由于 $a_{23}a_{12}a_{41}a_{34}=a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$，而 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 的列标排列 2341 为奇排列, 故该项取负号.

例 1.3.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　记 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

因为 D 中第 n 行除 a_{nn} 外, 其余元素全为 0, 故可能的非零项中 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中除 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 外, 其余元素全为 0, 因此可能的非零项中 $j_{n-1}=n-1$ 或 n．但 $j_n=n$，故只能取 $j_{n-1}=n-1$.这样继续下去可知 D 的展开式中可能的非零项为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 1.3.2 中的行列式的特点是主对角线以下的元素全为 0, 称其为**上三角形行列式**.

同样, 若行列式的主对角线以上的元素全为 0, 称其为**下三角形行列式**, 且其值也等于主对角线上各元素的乘积.

特别地, 主对角线以外的元素全为 0 的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

称为**对角形行列式**，其值也等于主对角线上各元素的乘积.

例 1.3.3 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 $a_{23}a_{34}$ 的项.

解 设这样的项为 $a_{1i}a_{23}a_{34}a_{4j}$，其行标为自然顺序，要使其带负号，列标 $i34j$ 必须为奇排列. 因为 i, j 只能取 1, 2, 故满足条件的排列只有一个 2341，所以对应项为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

1.4 行列式的性质

本节将讨论行列式的基本性质，利用这些性质可以大大提高行列式的计算效率.

将一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换后，得到一个新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1.4.1 行列式和它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 D^{T} 为如下形式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}, i, j=1,2,\cdots,n$.由行列式的定义得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D,$$

故 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

此性质说明，在行列式中行与列的地位是相同的，凡是对行成立的性质对列也成立；同样，凡是对列成立的性质，对行也成立. 因此，下面行列式的性质，只针对行的情况证明.

性质 1.4.2 交换行列式的任意两行(列)，行列式变号，也即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中当 $i \neq s,t$ 时，$b_{ik} = a_{ik}$，当 $i = s$ 时，$b_{sk} = a_{tk}$，当 $i = t$ 时，$b_{tk} = a_{sk}$. 由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} b_{1j_1} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$