文都教育

文都考研命题研究中心策划

全国200座城市考研辅导班指定用书

2011

全国硕士研究生入学统一考试

线性代数辅导讲义

主编◎汤家凤

全方位剖析线性代数考查要点

广角度发掘各类综合题目解题关键

名师指点迷津 提炼线性代数复习精华

配套精选习题 同步巩固提高

北京教育出版社

文都教育

文都考研命题研究中心策划

全国200座城市考研辅导班指定用书

全国硕士研究生入学统一考试 2011

线性代数辅导讲义

主编◎汤家凤

北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义/汤家凤著. —北京:北京教育出版社,2009.5(2010.2重印)
ISBN 978-7-5303-6958-6

I.全… II.汤… III.线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第059753号

全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI XIANXING DAISHU FUDAO JIANGYI

汤家凤 著

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100120
网 址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
环球印刷(北京)有限公司印刷

*

787×1092 16开本 8.75印张
2009年5月第1版 2010年2月第2次印刷
印数5 001—10 000
ISBN 978-7-5303-6958-6
G·6877 定价:14.00元
质量监督电话:010-58572393

文都教育

对话考研

登录 注册

http://tangjiafeng.blog.sohu.com

档 案 | 博 客 | 日 志 | 相 册 | 视 频 | 分 享

首 页 | 友情链接 http://wendutushu.blog.sohu.com

个人档案

姓名：汤家凤
学历：博士
所在地：南京

个人档案 加为好友
给他留言 向他打招呼
分 享

日志分类

- 复习参考书
- 复习指导与建议
- 复习资料

好 友

文都教育 VIP
—中国知名教育品牌
文都图书编辑部 VIP
—致力于打造精品大学图书
徐之明 VIP
徐 绽 VIP

留 言

卡 卡（未验证）

汤老师，实对称矩阵和普通矩阵的不同特征值对应的特征向量有怎样的性质啊？它们的区别是什么？

博主回复：

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，普通矩阵不同特征值对应的特征向量只是线性无关。

《 点击查看更多精彩内容

最新动态

- 上周

汤家凤 撰写了日志
考研数学必胜法则
——线性代数篇
线性代数对数学...［全文］

▶新书展台 ▼日志 ▶资源共享 ▶学友讨论 ▶博主收藏

考研数学必胜法则——线性代数篇

线性代数对数学备考至关重要，因其涵盖的知识点很多，且各部分内容之间的联系紧密，准确把握复习的重点和要领是取得高分的必要前提。

最新考纲要求

线性代数在数学一、二、三试卷中所占的比重都是22%，分值为34分（填空选择题部分12分，解答题部分22分）。三大卷种在考查范围上的较大区别在于：只有数学一对向量空间、基、过渡矩阵有要求。

线性代数复习要领

1. 立足基本——基本概念、性质和基本方法一直是数学考查的热点，对线性代数更是如此。考生因为对基本概念、原理的掌握不够扎实而丢分的现象屡见不鲜，令人惋惜，也提醒了备考2011的同学们，必须深入透彻地掌握基本概念、原理和解题方法，并通过基础题目的训练加以巩固。

2. 纵横驰骋——线性代数知识点联系紧密，近年考卷的大题普遍采用综合考查，将多个知识点的理解运用融入一题之中，对逻辑思维、运算能力、分析解决问题的能力提出很高要求。解决这一难题的策略就是深入分析重要概念、方法之间的联系，构建纵横交错、清晰有序的知识网络，将概念性质的本质、解题方法的精髓熟记于心。

3. 勤于总结——线性代数中有许多对解题非常有用的公式、结论、方法，都是复习须认真领会的精华。可以建立一本线代复习笔记，将重要的结论、方法和解题技巧等边复习边认真总结，定期翻阅，对提高解题能力必定大有帮助。此外，也有一些容易造成混淆出错的小“陷阱”，对这些问题也要引起重视，认真加以区分。

线性代数的复习非常有章可循，同学们只需系统、认真地梳理好知识体系，及时总结知识掌握和解题方法上的要领，定能在考试中取得理想成绩！

《 点击查看更多精彩内容

前　言

线性代数是工程类及经济类硕士研究生入学考试数学考试中必考的内容，从历年考试情况看，很多考生对线性代数掌握得不太理想，甚至没有弄清楚其基本原理。本书的目的是给广大准备报考研究生的考生在阅读教材的基础上进一步系统复习提供一些辅导。本书共分为六讲，分别为行列式、矩阵、向量、方程组、特征值与特征向量、二次型的标准形。

本书的特点：

1. 对知识体系进行概括总结

无论是高等数学、线性代数还是概率统计，对知识体系的全面、透彻地理解非常重要。本书按照线性代数复习需要抓住的两条主线入手进行系统总结，展开分析。一条主线是行列式、矩阵、向量组作为研究方程组的三大工具与方程组解的关系以及它们之间的联系；另一条主线是特征值与特征向量、矩阵的对角化作为工具如何应用于二次型的标准化。本书每一讲都按照体系给出需要掌握的基本概念、基本原理、基本性质，特别注重性质之间联系的总结，在关键的概念、原理和性质后面都进行了注解，并且重要内容都给出了巩固题型，这样有助于对相应部分的内容的理解和掌握，同时有助于理解各内容之间的本质联系。

2. 对每个部分的基本题型进行分类

在理解基本概念、原理和性质的基础上，有针对性、适当地做练习题是学好线性代数的关键一环。本书各部分均给出了重要和典型的题型，按题型进行分类概括，给出了规范、详尽的解答，力求简明扼要，有些题目给出了多种解法。这一部分既为读者提供了练习的机会，又将考研涉及的线性代数题型进行全面分类，通过练习既有助于基本知识的掌握，又有助于适应考试题型。

3. 各部分给出练习题及解答

每个部分都给出了检测读者掌握情况的练习题，包括填空题、选择题、计算与证明题。题型全面，所设计的题目既注重基础知识的掌握，又有相当的综合性，对提高读者计算能力、熟练使用基本原理解决问题的能力非常有用。

本书在编写过程中，得到了文都同仁非常大的帮助，尤其是师潭与宫静老师的辛苦劳动，在此表示深深的敬意。由于本书的编写时间非常仓促，加上编者水平所限，不足之处在所难免，望广大读者批评指正。

编　者

2010 年 1 月于南京

目 录

第一章 行列式

本章概要

行列式本质上是一个数，行列式反映行列式元素之间的运算关系，熟练掌握不超过四阶的行列式的计算是重点，同时要能计算简单、特殊的 n 阶行列式.

行列式的计算是按照行列式的性质进行的. 低阶行列式的计算主要有两个思路，转化为上、下三角行列式和降阶，但一般是把两种思路相结合；n 阶行列式的计算主要有数学归纳法、递推法、升阶法、转化为上(下)三角行列式法.

行列式是线性代数中一个非常重要、非常基础的工具，在后面的学习中经常使用到，归纳起来主要有如下几个方面的应用：

1. 向量组的相关性

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个 n 维向量组，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

2. 矩阵的满秩与可逆

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 满秩的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，又称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，即满秩矩阵与非奇异矩阵是等价的.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

3. 方程组的解

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

4. 特征值、特征向量

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

重要知识点讲解

第一节 行列式的基本概念与性质

一、基本概念

1. 逆序 设 i,j 是一对不等的正整数，若 $i>j$，则称 (i,j) 为一对逆序.

2. 逆序数 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，该排列所含的逆序总数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3. 对换 对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中任意两个数的位置进行对调，称为对该排列的一次对换，对换改变排列的奇偶性.

4. 行列式 由 n^2 个数组成的下列记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，规定

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

5. 余子式与代数余子式 把行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素去掉，剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列按照原来的排列次序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

[注解]

★ 逆序指两个正整数之间的关系，而逆序数指一个排列中所含的所有逆序的总数，是对一个排列而言的.

★ 在所有可能的排列中，奇偶排列各占一半.

★ 行列式本质上是一个数，所以不同阶的行列式完全有可能相等，行列式反映行列式中各元素之间的乘法和加减法的关系，如果行列式中元素都是整数，则行列式应该为整数，二、三阶行列式的计算比较简单，但高阶行列式(除特殊高阶行列式)若按照定义进行计算将非常复杂，所以行列式的计算一般按照两个思路：一是把普通的高阶行列式化为特殊的高阶行列式；一是降低行列式的阶数.

◆巩固题型◆

例题 1 设 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 为六阶行列式中带正号的项，则 $i=$________，$j=$________，$k=$________.

【解】 对排列 $i35j4k$，ijk 的可能取值为 126，162，216，261，612 和 621，因为

$\tau(135246)=3$，$\tau(135642)=6$，$\tau(235146)=4$，$\tau(235641)=7$，$\tau(635142)=11$，$\tau(635241)=12$，所有可能取值为 $i=1,j=6,k=2$；$i=2,j=1,k=6$；$i=6,j=2,k=1$.

二、几个特殊的高阶行列式

以下几种行列式为常用的特殊行列式，其计算非常方便，应用也非常广泛：

1. 对角行列式

形如 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 的行列式，称为对角行列式，对角行列式等于其对角线上元素之积.

2. 上(下)三角行列式

分别称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为上三角行列式和下三角行列式,它们都等于主对角线上的元素之积.

3. 范得蒙行列式

形如

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的行列式称为 n 阶范得蒙行列式,且

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

[注解]

★ $V(a_1,a_2,\cdots a_n)\neq 0$ 的充分必要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等。

4. 广义对角行列式

形如

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix} \text{(其中 } \boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n \text{ 为方阵)}$$

的行列式称为广义对角行列式,且

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_n|.$$

5. 分块矩阵行列式

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 和 n 阶矩阵,则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$,$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

三、行列式的性质

二阶和三阶行列式的计算比较容易,一般的高阶行列式运算比较复杂,但特殊的高阶行

列式的运算比较简单，所以计算行列式一般是转化为特殊行列式或者降低行列式的阶数，因此行列式的性质可以分为两类：

1. 把行列式转化为特殊行列式的性质

(1)行列式与其转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2)对调两行(或列)行列式改变符号.

(3)行列式某行(或列)有公因子可以提取到行列式的外面.

推论①　行列式某行(或列)元素全为零，则该行列式为零.

推论②　行列式某两行(或列)元素相同，行列式为零.

推论③　行列式某两行(或列)元素对应成比例，行列式为零.

(4)行列式某行(或列)的每个元素皆为两数之和时，行列式可分解为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5)行列式的某行(或列)的倍数加到另一行(或列)，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 k 为任意常数.

◆巩固题型◆

例题 1　计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 8 & -7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

【解】　$D=-\begin{vmatrix} 8 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-372.$

例题 2　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$.

【解】 把行列式的第 2,3 两行加到第一行得 $D=\begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$,

第一行提取公因子得 $D=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$,第 2,3 两行分别减去第一行的 b 倍得

$$D=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2.$$

例题 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

【解】 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}\overset{\text{第1、3列对调}}{\underset{\text{第1行加到第2行}}{=\!=\!=\!=}}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$\overset{\text{第1行的}-2\text{倍加到第3行}}{\underset{\text{第1行的}-1\text{倍加到第4行}}{=\!=\!=\!=}}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\overset{\text{第2,3两行对调}}{\underset{\text{第2行}-2\text{倍加到第3行}}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{\text{第2行的1倍加到第4行}}{\underset{\text{第3行的1倍加到第4行}}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-9.$

例题 4 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 为 4 维列向量,且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=4$, $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=21$,求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

【解】 由 $|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=21$ 得 $3|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=21$,从而 $|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=7$.

则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,4\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3|=16|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|$

$=16(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|)=16\times(4+7)=176.$

例题 5 设三阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2$,求行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3|$ 的值.

【解】 令 $D=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3|$,则

$D=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_2+15\boldsymbol{\alpha}_3|$

$=6|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3|=6|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|$

$=6|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=6|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=12.$

例题 6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,求 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$.

【解】 把 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行分别与 $\boldsymbol{A}$ 的第 $m,m-1,\cdots,1$ 行对调,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行分别与 $\boldsymbol{A}$ 的第 $m,m-1,\cdots,1$ 行对调,直到把 $\boldsymbol{B}$ 的第 n 行分别与 $\boldsymbol{A}$ 的第 $m,m-1,\cdots,1$ 行对调,每对调

一次行列式改变一次符号,则有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab.$$

2. 行列式降阶的性质

(6)行列式等于行列式某行(或列)元素与其对应的代数余子式之积的和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

(7)行列式的某行(或列)元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式之积的和为零.

[注解]

★　当改变某行(或列)元素时,该行(或列)元素对应的代数余子式不变.

★　行列式的第 i 行(或列)元素与第 j 行(或列)元素的代数余子式之积的和等于该行列式中把第 j 行(或列)元素用第 i 行(或列)元素代替,显然代替后的行列式有两行(或列)相同,所以结果为零.

◆巩固题型◆

例题 1　设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$,求

(1)$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$;　(2)$A_{31}+A_{33}$;　(3)$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

【解】　(1)$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$ 即为第 2 行元素全为 1 时按第 2 行展开的式子,所以

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -7 & 8 & 3 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix}=148.$$

$$(2)A_{31}+A_{33}=A_{31}+0A_{32}+A_{33}+0A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}=-12.$$

(3)$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \\ -7 & 8 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \\ -31 & 0 & -29 \end{vmatrix}=-78.$$

第二节　行列式的应用——克莱姆法则

对方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$　　(Ⅰ)

及 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$　　(Ⅱ)

其中(Ⅱ)称为非齐次方程组,(Ⅰ)称为(Ⅱ)对应的齐次方程组或(Ⅱ)的导出方程组.

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$,

其中 D 称为系数行列式,我们有

定理 1　(Ⅰ)只有零解的充分必要条件是 $D\neq0$;(Ⅰ)有非零解(或者(Ⅰ)有无穷多个解)的充分必要条件是 $D=0$.

定理 2　(Ⅱ)有唯一解的充分必要条件是 $D\neq0$,此时 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$;当 $D=0$ 时,(Ⅱ)要么无解,要么有无穷多个解.

[注解]

★　只有当方程组中方程的个数与未知数的个数相等时才可以使用 Cramer 法则.

★　齐次线性方程组有非零解与有无穷多个解等价,注意齐次线性方程组有非零解的根本原因是存在自由的未知变量.

★　当 $D\neq0$ 时,非齐次线性方程组有唯一解,可以使用 Cramer 法则求解;当 $D=0$ 时,非齐次线性方程组解的情况分为两种,但不能确定是哪种情况,这时不能用 Cramer 法则求解,而需要进一步讨论秩的情况.

◆巩固题型◆

例题 1　求解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3=0 \end{cases}$，其中 a_1,a_2,a_3 两两不等.

【解】 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$，

因为 a_1,a_2,a_3 两两不等，所以 $D\neq 0$，由 Cramer 法则，方程组有唯一解. 由

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}=a_2a_3(a_3-a_2),\qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & a_3 \\ a_1^2 & 0 & a_3^2 \end{vmatrix}=a_1a_3(a_1-a_3),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \end{vmatrix}=a_1a_2(a_2-a_1),$$

得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{a_2a_3}{(a_3-a_1)(a_2-a_1)},$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{a_1a_3}{(a_3-a_2)(a_1-a_2)},$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{a_1a_2}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}.$$

例题 2　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的实数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为任意给定的实数，证明：存在唯一的 $n-1$ 次多项式，满足 $f(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

【证明】　设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$，则有

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1, \\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2, \\ \qquad\vdots \\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n, \end{cases}$$

因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$，所以由 Cramer 法则，上述关于 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的方程组有唯一解，所以满足条件的多项式是唯一存在的.

综合题型

题型一 行列式的基本概念

例题 1 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为 ( )

(A)1 个. (B)2 个. (C)3 个. (D)4 个.

【解】 $f(x)$本质上是一个多项式,所以问该方程有多少个根要先确定该多项式,由行列式的基本性质,将第 2,3,4 列分别减去第 1 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再将第 2 列加到第 4 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

则 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}$,$f(x)$为两个一次多项式的乘积,所以原方程有两个根,答案为(B).

例题 2 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x+3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$,求 x^4 及 x^3 的系数.

【解】 $f(x)$本质上是一个 4 次多项式,当然可以将其展开计算,由于含 x 的元素主要集中在主对角线上,且题中要求的是 x^4 及 x^3 的系数,所以只要按照行列式的定义找出三次和四次项即可.显然四次项只能出现在主对角线上元素之积,且符号为正,所以 x^4 的系数为 2,三次项只能出现在 $2x\times(x+3)(x+2)(x+1)$ 和 $x\times1\times(x+2)(x+1)$ 中,且符号分别为正和负,所以 x^3 的系数为 11.

题型二 低阶行列式的计算

『思路』 有限阶行列式计算的基本方法有:利用行列式的性质把普通行列式化为特殊行列式(如上、下三角行列式)、行列式按行或列展开,有时是先用行列式的性质把某一行或列元素化为尽可能多的零,然后再使用行列式按行或列展开进行计算.