普通高等教育"十三五"规划教材

经 济 数 学 基 础 丛 书

# 线性代数教程

（第二版）

陆健华　黄振东　主编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十三五”规划教材

经济数学基础丛书

# 线性代数教程

（第二版）

陆健华　黄振东　主编

科学出版社

北京

## 内容简介

本书根据高等学校经济类、管理类以及工科类线性代数课程的教学大纲，结合作者多年的教学实践经验编写而成，其结构体系完整严谨、设计简明、逻辑清晰，着眼于介绍基本概念、基本原理、基本方法，强调直观性、准确性、可读性. 内容包括行列式、矩阵、线性方程组、向量组、矩阵的特征值和特征向量、二次型以及线性代数在经济中的应用.

本书可作为普通高等院校经济类、管理类及理工类教材或参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数教程/陆健华，黄振东主编. —2版. —北京：科学出版社，2017.6

(经济数学基础丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-053209-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陆… ②黄… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 125682 号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2017年6月第　二　版　印张：15

2017年6月第一次印刷　字数：350 000

定价：39.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

本书是普通高等教育“十三五”规划教材，线性代数在经济科学、管理科学及其他领域都有着十分广泛的应用，其重要性随着计算机技术及其他高科技的普及和发展日渐突出.为了满足我国高等教育培养“实用型、应用型”人才的需要，我们组织了一批有着丰富教学经验的教师编写了这本教材，在编写过程中，我们力求做到吸收国内外流行及传统教材的优点，结合现代学生的特点，注重将线性代数的知识和经济学及其他相关知识结合，努力编写出既能反映本学科特点，又便于师生使用的高质量的教材.

本书依据教育部《经济管理类数学课程教学基本要求》，兼顾学生考研需要编写，在保持传统体系的基础上略作改变，补充了一些新内容，删除了一些过时不用的知识，其特点是保证基础知识体系完整严谨、设计简明、逻辑清晰；重视数学概念的引入及其背景，简略理论推导，突出基本思路和应用背景；强化基础训练，强调实际应用，强调直观性、准确性、可读性；介绍计算机软件在本学科中的应用；例题全面，习题丰富，在每节后面都安排了反映本节内容的适量基础题，大部分章后配备了有着中等难度的综合复习题 A 和有着较高难度的综合复习题 B，便于不同层次的学生自学、复习和巩固所学内容.本书可作为普通高等学校、独立学院经济类、管理类专业的学生的教材.由于工科类各专业对线性代数的基本要求与经济管理类大致相同，所以本书也可作为工科类学生的教材或参考书.

本书主要内容包括：线性方程组的消元法与矩阵的初等变换、行列式、矩阵、线性方程组和向量组、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性代数的经济应用、大学数学实验指导和习题、复习题及习题参考答案.

本书由陆健华、黄振东主编，负责全书的框架结构安排，并统稿、定稿；曾霞、严培胜任副主编.全书共 7 章，分别由陆健华（第 1、6 章）、黄振东（第 2、4 章）、曾霞（第 3、7 章）、严培胜（第 5 章、附录 A）编写.

本书在编写过程中，李德洪、郑昌红为本书的编写提供了翔实资料，徐建豪审阅了全书.本书在编写过程中，参考了众多国内外优秀教材.本书的出版得到了科学出版社的领导和编辑的帮助和支持.在此一并致谢！

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大专家、同行和读者批评指正，以便本书在教学实践中不断完善.

编　者

2017 年 1 月

# 目 录

# 第1章　线性方程组的消元法与矩阵的初等变换

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题. 线性关系即数学对象之间的关系是以一次形式来表示的，线性关系问题简称线性问题. 在实际问题中大量出现的非线性问题有时也可以转换成线性问题进行处理，例如：在一定条件下，曲线可用直线近似，曲面可用平面近似，函数增量可用函数的微分近似. 很多实际问题的处理最后往往都归结为比较容易处理的线性问题，因此线性代数在科学技术和经济管理的许多领域都有着广泛的应用.

线性代数的起源之一是解线性方程组. 线性方程组理论是线性代数理论基本的、极其重要的组成部分，几乎是作为一条主线贯穿于其中，线性代数的很多内容都与线性方程组有关. 因此，我们从中学学过的二元线性方程组、三元线性方程组说起.

## 1.1　*n* 元线性方程组的消元法

### 1.1.1　二元、三元线性方程组的消元法

我们在中学讨论过二元、三元线性方程组的求解问题，通常是用消元法求解，通过消元把方程组化为容易求解的同解方程组.

下面我们通过具体的例子来看，如何用消元法求解线性方程组，从而从中找出具有普遍意义的方法.

**例 1**　解二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

**解**　将第 1 个方程减去第 2 个方程得 $3x_2 = -6$，两边同时除以 3 得 $x_2 = -2$；将 $x_2 = -2$ 代入第 1 个方程得 $x_1 = 1$. 从而得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{cases}$

**例 2**　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 \qquad\quad - x_3 = 3. \end{cases}$

**解**　将第 1 个方程乘以 $-2$ 加到第 2 个方程上去，将第 1 个方程乘以 $-3$ 加到第 3 个方程上去，可以消去第 2 个和第 3 个方程中的未知量 $x_1$.

于是原方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad -5x_2 - 5x_3 = -10 \\ \quad -6x_2 - 10x_3 = -24 \end{cases}$$

将此方程组的第 2 个、第 3 个方程分别除以 $-5$，$-2$，方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 2 \\ \quad 3x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

再将第 2 个方程乘以 $-3$ 加到第 3 个方程上去，可以消去第 3 个方程中的未知量 $x_2$. 方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 2 \\ \quad\quad\quad 2x_3 = 6 \end{cases}$$

将第 3 个方程除以 2，方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 2 \\ \quad\quad\quad x_3 = 3 \end{cases} \tag{I}$$

通过以上同解变形，逐步消去方程组中一些方程的未知量的个数，其中某个方程中未知量只有一个，便可直接得到该未知量的解，上述过程就是消元过程. 形如方程组(I)称为阶梯形方程组.

下面将方程组(I)中的方程 $x_3=3$ 代入第 2 个方程求得 $x_2=-1$，再将 $x_2=-1$，$x_3=3$ 代入第 1 个方程求得 $x_1=2$. 故得原方程组的解为$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3, \end{cases}$上述过程就是回代过程.

可以看到，在用消元法解三元线性方程组的时候，自始至终把方程组视为一个整体，通过对方程组进行同解变形，将原方程组变为最简的方程组，从而求得原方程组的解.

**例 3** 解三元线性方程组$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 = 17. \end{cases}$

**解** 将第 1 个方程和第 2 个方程交换，得

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 = 17 \end{cases}$$

将第 1 个方程乘以 $-2$ 加到第 2 个方程上去，将第 1 个方程乘以 $-5$ 加到第 3 个方程上去，可以消去第 2 个和第 3 个方程中的未知量 $x_1$. 原方程组变为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\quad x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}$$

第 3 个方程除以 2，方程组变为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\quad x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

将第 2 个方程乘以$-1$加到第 3 个方程上去,方程组变为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ \qquad\ \ x_2 - 3x_3 = 1 \\ \qquad\qquad\quad\ 0 = 0 \end{cases}$$

第 3 个方程 $0=0$ 表示 $0x_1+0x_2+0x_3=0$,对任意的 $x_1,x_2,x_3$ 该方程成立,故改写为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 + 3 \\ \qquad\ \ x_2 = \ \ 3x_3 + 1 \end{cases}$$

通过以上同解变形,当 $x_3$ 任意取一个值时,就唯一地确定一个方程组的解. 取 $x_3=c$ ($c$ 为任意常数),将 $x_2=3c+1$ 代入第 1 个方程求得 $x_1=5c+5$. 故得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 5c + 5 \\ x_2 = 3c + 1 \quad (c\text{ 为任意常数}) \\ x_3 = \ \ c \end{cases}$$

由于未知数 $x_3$ 可以任意取值,故将 $x_3$ 称为自由未知量.

**例 4** 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad\ \ = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = \ \ 3. \end{cases}$

**解** 将第 1 个方程乘以$-2$加到第 2 个方程上去,将第 1 个方程乘以$-3$加到第 3 个方程上去,可以消去第 2 个和第 3 个方程中的未知量 $x_1$.

原方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad\ \ = -2 \\ \quad\ \ - \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 1 \\ \quad\ \ -8x_2 + 8x_3 = \ \ 9 \end{cases}$$

第 2 个方程乘以$-8$加到第 3 个方程上去,方程组变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad\ = -2 \\ \quad\ \ - \ x_2 + x_3 = \ \ 1 \\ \qquad\qquad\quad\ \ 0 = \ \ 1 \end{cases}$$

第 3 个方程是矛盾方程,它表示 $0x_1+0x_2+0x_3=1$,显然无解. 故原方程组无解.

## 1.1.2 $n$ 元线性方程组的消元法

在实际问题中,未知量的个数往往不止两个、三个,有时甚至需要求解一个有成百上千的未知量的大型方程组,下面我们讨论 $n$ 个未知数 $m$ 个方程的线性方程组的求解问题.

**1. $n$ 元线性方程组的概念**

$n$ 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $m$ 个方程的 $n$ 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

其中,$a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是第 $i$ 个方程第 $j$ 个未知量 $x_j$ 的系数,为已知数;$b_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$是第 $i$ 个方程的常数项.

当常数项均为 0 时,该方程组称为齐次线性方程组;当常数项不全为 0 时,该方程组称为非齐次线性方程组.

**2. $n$ 元线性方程组的消元法**

对于 $n$ 元线性方程组(1.1),可以仿照前面几个例题的消元过程来求解.

由于方程组中 $x_1$ 的系数不可能都为 0,不妨设 $a_{11}\neq 0$,将第 1 个方程乘以适当的数加到其他各个方程上,消去这些方程中的 $x_1$ 项,得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=c_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\quad c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n=c_m \end{cases} \tag{1.2}$$

方程组(1.2)中如果第 2 个方程到最后一个方程中 $x_2$ 的系数不全为 0,不妨设 $c_{22}\neq 0$,将第 2 个方程乘以适当的数加到后面的所有方程上,消去这些方程中的 $x_2$ 项,得

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \qquad\quad +\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 \qquad\quad +\cdots+c_{2n}x_n=c_2 \\ \qquad\qquad\quad d_{33}x_3+\cdots+d_{3n}x_n=d_3 \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad d_{m3}x_3+\cdots+d_{mn}x_n=d_m \end{cases}$$

如果第 2 个方程到最后一个方程中 $x_2$ 的系数全为 0,则用上述方法消去 $x_3$ 的项.

如此逐步消元,最后方程组变为如下阶梯形方程组

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1r}x_r+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2r}x_r+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad a'_{rr}x_r+\cdots+a'_{rn}x_n=b'_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=b'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

通过观察方程组(1.3)可得:

(1) 若 $b'_{r+1}\neq 0$,则方程组无解.

(2) 若 $b'_{r+1}=0$,则方程组有解. 此时又分两种情况:

(i) 当 $r=n$ 时,方程组有唯一解;

(ii) 当 $r<n$ 时,对未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 任意给定一组值,就唯一地确定了 $x_1$,$x_2,\cdots,x_r$ 的值,从而得到方程组的一个解. 未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 称为自由未知量,由于自由未知量的任意取值,方程组有无穷多解.

线性方程组(1.1)如果有解,就称它是相容的;如果无解,就称它是不相容的.

## 习 题 1-1

用消元法解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2-8x_3=8 \\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2-2x_3=4 \end{cases}$

# 1.2 矩阵及其初等变换

在 1.1 节我们用消元法求解线性方程组时,只是对方程组的系数和常数项进行了运算,而未知量并未参与运算,它们在方程组中只是起了占位的作用. 因此我们省略未知量,将系数和常数项排成一个行列对应整齐的表,用来代替方程组. 表确定了,方程组也就确定了. 这样的表在线性代数里称为矩阵.

## 1.2.1 矩阵的概念

**定义 1** 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 $m$ 行 $n$ 列的矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵,为表示它是一个整体,通常加一个圆括号或方括号,并用大写黑体字母表示它,记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

有时也简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素,简称为元. $a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 位于矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i,j)$ 元.

元素都是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中如没有特别说明,指的是实矩阵.

行数与列数都是 $n$ 的矩阵称为 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵,$n$ 阶方阵也可记为 $\boldsymbol{A}_n$.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1a_2\cdots a_n)$ 称为行矩阵,又称行向量. 为避免元素间的混淆,行

矩阵一般记为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵,又称列向量.

两个矩阵的行数相等,列数也相等时,就称它们是同型矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是 0 的矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$. 注意不同型的零矩阵是不相等的.

$n$ 元线性方程组(1.1)的未知量的系数所确定的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1.1)的系数矩阵.

$n$ 元线性方程组(1.1)的未知量的系数和常数项所确定的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组(1.1)的增广矩阵.

一个线性方程组由它的增广矩阵唯一确定. 线性方程组的每一个方程未知数的系数及常数项与增广矩阵的每一行的元素相对应.

### 1.2.2 矩阵的初等变换

在 1.1 节中利用消元法解线性方程组时,只是对方程组的系数和常数项进行了运算,而未知量并未参与运算. 因此对方程组的消元变换可以转换为对其增广矩阵进行行变换.

**定义 2** 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(i) 交换两行(交换第 $i,j$ 行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(ii) 以一个非零的数 $k$ 乘以某一行中的所有元素(第 $i$ 行乘 $k$,记为 $r_i \times k$);

(iii) 把矩阵的某一行的所有元素的 $k$ 倍加到另一行对应的元素上去(第 $j$ 行乘以 $k$ 加到第 $i$ 行上去,记为 $r_i + kr_j$).

把定义中的“行”变成“列”即得矩阵的初等列变换的定义,所用的记号是将“$r$”换成“$c$”. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

**定义 3** 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价,记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

等价关系满足下列性质:

(i) 反身性. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$.

(ii) 对称性. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(iii) 传递性. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

下面我们用矩阵的初等行变换求解 1.1 节中的几个线性方程组,其过程可与消元法对应如下.

首先我们来看 1.1 节中的例 2,三元线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9,\\2x_1-\ x_2+\ x_3=8,\\3x_1\qquad\ -\ x_3=3\end{cases}$ 的增广矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&9\\2&-1&1&8\\3&0&-1&3\end{pmatrix}$.

**解** $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\2x_1-x_2+x_3=8\\3x_1\qquad-x_3=3\end{cases}$ $\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3&9\\2&-1&1&8\\3&0&-1&3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\-5x_2-5x_3=-10\\-6x_2-10x_3=-24\end{cases}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&-5&-5&-10\\0&-6&-10&-24\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\x_2+x_3=2\\3x_2+5x_3=12\end{cases}\xrightarrow[r_3\div(-2)]{r_2\div(-5)}\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&1&1&2\\0&3&5&12\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\x_2+x_3=2\\2x_3=6\end{cases}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&1&1&2\\0&0&2&6\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_3$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\x_2+x_3=2\\x_3=3\end{cases}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&1&1&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_4$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=9\\x_2=-1\\x_3=3\end{cases}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_5$$

$$\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=3\end{cases}\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_6$$

可以看到,线性方程组的消元法与矩阵的初等行变换除了形式上的区别外,没有实质性区别,矩阵的初等行变换在形式上显得简洁,解题更为方便.

经过初等行变换得到的形如 $\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4,\boldsymbol{B}_5,\boldsymbol{B}_6$ 的矩阵都称为行阶梯形矩阵. 其特点是:可画出一条阶梯线,线的下方全为 0;每个台阶只有一行,台阶数即是非零行的行数. 自左向右看,各非零行的第 1 个非零元素称为非零首元.

特别地，形如 $\boldsymbol{B}_6$ 的矩阵称为行最简形矩阵. 其特点是：在行阶梯形矩阵中非零首元均为 1；非零首元所在列的其他元素都为 0.

一般地，任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，总可以经过有限次的初等行变换化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

由例题可知，解线性方程组就是把方程组的增广矩阵用初等行变换先化为行阶梯形矩阵，此对应方程组的消元过程；再将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵，此对应方程组的回代过程.

下面我们仿照上例将 1.1 节中的例 3 用矩阵的初等行变换求解.

解方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2-x_3=7,\\ x_1-2x_2+x_3=3,\\ 5x_1-8x_2-x_3=17.\end{cases}$

**解** 写出所给方程组的增广矩阵，并对其进行初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-3&-1&7\\1&-2&1&3\\5&-8&-1&17\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\2&-3&-1&7\\5&-8&-1&17\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3&1\\0&2&-6&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3&1\\0&1&-3&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_3$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_4\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-5&5\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_5$$

矩阵 $\boldsymbol{B}_5$ 对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1-5x_3=5\\ x_2-3x_3=1\end{cases}$$

并取 $x_3=c$ ($c$ 为任意常数)，则得原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=5c+5\\ x_2=3c+1\\ x_3=c\end{cases}\quad(c\ \text{为任意常数})$$

我们用同样的方法来解 1.1 节中的例 4：解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2=-2\\ 2x_1+3x_2+x_3=-3.\\ 3x_1-2x_2+8x_3=3\end{cases}$

**解** 写出所给方程组的增广矩阵，并对其进行初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\2&3&1&-3\\3&-2&8&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&-1&1&1\\0&-8&8&9\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1$$

$$\xrightarrow{r_3-8r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2$$

矩阵 $\boldsymbol{B}_2$ 的第 3 行所对应的方程为 $0x_1+0x_2+0x_3=1$，显然无解.

由上例可知，当方程组无解时不必将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵，由行阶梯形矩阵直接得结果即可.

以后我们还将用矩阵理论和向量理论对线性方程组理论做进一步的研究，如线性方程组的有解条件以及解的结构等.

矩阵及其初等变换是研究线性代数的重要工具和方法，也是研究离散问题的基本手段. 本章的内容在以后各章都有重要应用.

## 习 题 1-2

1. 下列矩阵为线性方程组的增广矩阵，讨论这些方程组是否有解，若有解，判断是唯一解还是无穷多解.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 将下列矩阵化为行最简形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. 用矩阵的初等行变换解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} x_1-3x_2+7x_3=20 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=-1 \\ -3x_1+7x_2+2x_3=7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3=-4 \\ 2x_1+x_2+x_3=13 \\ 3x_1+9x_2-36x_3=-33 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_2+x_3-4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$