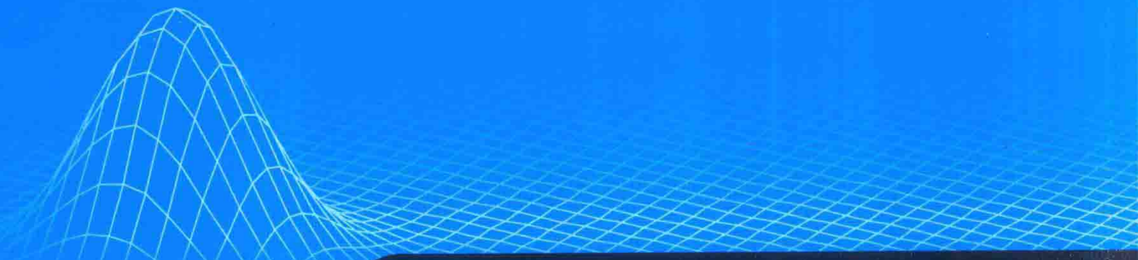
21世纪数学教育信息化精品教材



大学数学立体化教材

高等数学（下册）

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材
（人大版　吴赣昌）
网络学习空间
xxkj.sciyard.com
账号：1100607247
密码：

世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（下册）

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：理工类．下册/吴赣昌主编．—5版．—北京：中国人民大学出版社，2017.7
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-24382-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第109636号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学（理工类·第五版）下册
吴赣昌　主编
Gaodeng Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	版　　次	2006年4月第1版
规　　格	170 mm×228 mm　16开本		2017年7月第5版
印　　张	21　插页1	印　　次	2017年7月第1次印刷
字　　数	429 000	定　　价	39.80元

内容简介

本书根据高等院校普通本科理工类专业高等数学课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第四版的基础上进行了重大修订和完善（详见本书前言）。本书包含空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等内容模块，并特别加强了数学建模与数学实验教学环节。

本“书”远非传统意义上的书，作为立体化教材，它包含线下的“书”和线上的“服务”两部分。其中线上的“服务”用以下两种形式提供：一是书中各处的二维码，用户通过手机或平板电脑等移动端扫码即可使用；二是在本书的封面上提供的网络账号，用户通过它即可登录与本书配套建设的网络学习空间。

网络学习空间中包含与本书配套的在线学习系统，该系统在内容结构上包含教材中每节的教学内容及相关知识扩展、教学例题及综合进阶典型题详解、数学实验及其详解、习题及其详解等，并为每章增加了综合训练，其中包含每章的总结、题型分析及其详解、历届考研真题及其详解等。该系统采用交互式多媒体化建设，并支持用户间在线求助与答疑，为用户自主式高效率地学习奠定基础。

本书可作为高等院校理工科及技术学科等非数学专业的高等数学教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段.对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已.中外大量的教育实践事实充分显示了:优秀的数学教育，乃是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自1999年开始迅速扩大招生规模，至2009年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其他国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路.教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战.大学数学的教育问题首当其冲受到影响.大学数学教育过去是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年甚至上百年一贯制，仍处于经典状态.当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面:一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求.传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与后续课程教学的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面.二是在信息技术及其终端产品迅猛发展的今天，在大学数学教育领域，信息技术的应用远没有在其他领域活跃，其主要原因是:在教材和教学建设中没能把信息技术及其终端产品与大学数学教学的内容特点有效地整合起来.

作者主编的“大学数学立体化教材”，最初脱胎于作者在2000—2004年研发的“大学数学多媒体教学系统”.2006年，作者与中国人民大学出版社达成合作，出版了该系列教材的第一版，合作期间，该系列教材经历多次改版，并于2011年出版了第四版，具体包括:面向普通本科理工类、经管类与纯文科类的完整版系列教材;面向普通本科部分专业和三本院校理工类与经管类的简明版系列教材;面向高职高专院校理工类与经管类的高职高专版系列教材.在上述第四版及相关系列教材中，作者加强了对大学数学相关教学内容中重要概念的引入、重要数学方法的应用、典型数学模型的建立、著名数学家及其贡献等方面的介绍，丰富了教材内涵，初步形成了该系列教材的特色.令人感到欣慰的是，自2006年以来，“大学数学立体化教材”已先后被国内数百所高等院校广泛采用，并对大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2017年，距2011年的改版又过去了6年.而在这6年时间里，随着移动无线通信技术(如3G、4G等)、宽带无线接入技术(如Wi-Fi等)和移动终端设备(如智能手机、平板电脑等)的飞速发展，那些以往必须在电脑上安装运行的计算软件，如今在

普通的智能手机和平板电脑上通过移动互联网接入即可流畅运行，这为各类教育信息化产品的服务向前延伸奠定了基础.

作者本次启动的“大学数学立体化教材”(第五版)的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境. 顺利实现这一宗旨，还得益于作者主持的数苑团队的另一项工作成果：公式图形可视化在线编辑计算软件. 该软件于2010年研发成功时，仅支持在Win系统电脑中通过IE类浏览器运行. 2014年10月底，万维网联盟(W3C)组织正式发布并推荐了跨系统与跨浏览器的HTML5.0标准. 为此，数苑团队通过最近几年的努力，也实现了相关技术突破. 如今，数苑团队研发的公式图形可视化在线编辑计算软件已支持在各类操作系统的电脑和移动终端(包括智能手机、平板电脑等)上运行于不同的浏览器中，这为我们接下来的教材改版工作奠定了基础.

作者本次“大学数学立体化教材”(第五版)的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”“经管类·简明版·第五版”与“综合类·简明版”合订本；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”.

本次改版的指导思想是：为帮助教材用户更好地理解教材中的重要概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验. 实验内容包括：数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等. 相比教材正文所举示例，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大. 本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验，其中的大部分都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码，即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中.

大学数学按课程模块分为高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三大模块，各课程的改版情况简介如下：

高等数学课程：函数是高等数学的主要研究对象，函数的表示法包括解析法、图像法与表格法. 以往受计算分析工具的限制，人们对函数的解析表示、图像表示与数表表示之间的关系往往难以把握，大大影响了学习者对函数概念的理解. 为了弥补这方面的缺失，欧美发达国家的大学数学教材一般都补充了大量流程分析式的图像说明，因而其教材的厚度与内涵也远较国内的厚重. 有鉴于此，在高等数学课程的数学实验中，我们首先就函数计算与函数图形计算方面设计了一系列的数学实验，包括函数值计算实验、不同坐标系下2D函数的图形计算实验和3D函数的图形计算实验等，实验中的函数模型较教材正文中的示例更复杂，但借助微信扫码功能可即时实现重复实验与修改实验. 其次，针对定积分、重积分与级数的教学内容设计了一系列求

和、多重求和、级数展开与逼近的数学实验. 此外, 还根据相应教学内容的需求, 设计了一系列数值计算实验、符号计算实验与数学建模实验. 这些数学实验有助于用户加深对高等数学中基本概念、定理与思想方法的理解, 让他们通过对量变到质变过程的观察, 更深刻地理解数学中近似与精确、量变与质变之间的辩证关系.

线性代数课程: 矩阵实质上就是一张长方形数表, 它是研究线性变换、向量组线性相关性、线性方程组的解、二次型以及线性空间的不可替代的工具. 因此, 在线性代数课程的数学实验设计中, 首先就矩阵基于行 (列) 向量组的初等变换运算设计了一系列数学实验, 其中矩阵的规模大多为 6~10 阶的, 有助于帮助用户更好地理解矩阵与其行阶梯形、行最简形和标准形矩阵间的关系. 进而为矩阵的秩、向量组线性相关性、线性方程组及其应用、矩阵的特征值及其应用、二次型等教学内容分别设计了一系列相应的数学实验. 此外, 还根据教学的需要设计了部分数值计算实验和符号计算实验, 加强用户对线性代数核心内容的理解, 拓展用户解决相关实际应用问题的能力.

概率论与数理统计课程: 本课程是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其统计规律性的一门学科. 因此, 在概率论与数理统计课程的数学实验中, 我们首先设计了一系列服从均匀分布、正态分布、0–1 分布与二项分布的随机试验, 让用户通过软件的仿真模拟试验更好地理解随机现象及其统计规律性. 其次, 基于计算软件设计了常用统计分布表查表实验, 包括泊松分布查表、标准正态分布函数查表、标准正态分布查表、t 分布查表、F 分布查表与卡方分布查表等. 再次, 还设计了针对数组的排序、分组、直方图与经验分布图的一系列数学实验. 最后, 针对经验数据的散点图与线性回归设计了一系列数学实验. 这些数学实验将会在帮助用户加深对概率论与数理统计课程核心内容的理解、拓展解决相关实际应用问题的能力上起到积极作用.

致用户

作者主编的“大学数学立体化教材”(第五版) 及 2017 年改版的每本教材, 均包含了与相应教材配套的网络学习空间服务. 用户通过教材封面下方提供的网络学习空间的网址、账号和密码, 即可登录相应的网络学习空间. 网络学习空间提供了远较纸质教材更为丰富的教学内容、教学动画以及教学内容间的交互链接, 提供了教材中所有习题的解答过程. 在所有内容与习题页面的下方, 均提供了用户间的在线交互讨论功能, 作者主持的数苑团队也将在该网络学习空间中为你服务. 使用微信扫码功能扫描教材封面提供的二维码, 绑定微信号, 你即可通过扫描教材内容页面提供的二维码进行相关的数学实验.

在你进入高校后即将学习的所有大学课程中, 就提高你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言, 大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上, 像微积分、线性代数、概率论与数理统计这些大学数学基础课程,

你无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将终生受益.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间去主动学习、训练与实验，才能真正掌握所学知识.

致教师

使用本系列教材的教师，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目：

http://www.math168.com/dxsx

作者主持的数苑团队在那里为你免费提供与本系列教材配套的教学课件系统及相关的备课资源，它们是作者团队十余年积累与提升的成果. 与本系列教材配套建设的信息化系统平台包括在线学习平台、试题库系统、在线考试及其预约管理系统等，感兴趣和有需要的用户可进一步通过数苑网的在线客服联系咨询.

正如美国《托马斯微积分》的作者G.B.Thomas教授指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方在教、学、考各方面提供充分的支持，帮助教师在教学过程中发挥其才华，帮助学生富有成效地学习.

作　者

2017年3月28日

目　　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

第 9 章　多元函数微分学

第 10 章　重积分

第 11 章　曲线积分与曲面积分

第 8 章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 17 世纪上半叶, 法国数学家笛卡儿和费马对此作了开创性的工作. 我们知道, 代数学的优越性在于推理方法的程序化, 鉴于这种优越性, 人们产生了用代数方法研究几何问题的思想, 这就是**解析几何的基本思想**. 要用代数方法研究几何问题, 就必须弄清代数与几何的联系, 而代数和几何中最基本的概念分别是数和点. 于是, 首先要找到一种特定的数学结构来建立数与点的联系, 这种结构就是坐标系. 通过坐标系, 建立起数与点的一一对应关系, 就可以把数学研究的两个基本对象 —— 数和形结合起来、统一起来, 使得人们既可以用代数方法来解决几何问题 (这是解析几何的基本内容), 也可以用几何方法来解决代数问题.

本章中我们先介绍向量的概念及向量的某些运算, 然后再介绍空间解析几何, 其主要内容包括平面和直线方程、一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题. 这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的. 正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样, 本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用.

§8.1　向量及其线性运算

一、向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量: 一类如温度、距离、体积、质量等, 这种只有大小没有方向的量称为**数量 (标量)**; 另一类如力、位移、速度、电场强度等, 它们不仅有大小而且还有方向, 这种既有大小又有方向的量称为**向量 (矢量)**.

如何来表示向量呢? 在几何上, 可用空间中的一个带有方向的线段, 即有向线段来表示, 在选定长度单位后, 这个有向线段的长度表示向量的大小, 它的方向表示向量的方向. 如图 8–1–1 所示, 以 A 为起点、B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 为简便起见, 常用一个粗体字母来表示向量, 如 $\overrightarrow{AB}$ 可记作 $\boldsymbol{a}$ (也记作 $\vec{a}$).

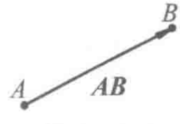


图 8–1–1

向量的大小称为向量的**模**, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于1 的向量称为**单位向量**. 模

等于 0 的向量称为**零向量**. 记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定, 或者说它的方向是任意的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 如果它们的方向相同且模相等, 则称这两个向量**相等**, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 根据这个规定, 一个向量和它经过平行移动(方向不变, 起点和终点位置改变)所得的向量是相等的, 这种向量称为**自由向量**. 以后如无特别说明, 我们所讨论的向量都是自由向量. 由于自由向量只考虑其大小和方向, 因此, 我们可以把一个向量自由平移, 从而使它的起点位置为任意点, 这样, 今后如有必要, 就可以把几个向量移到同一个起点.

记两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ (见图8-1-2), 规定 $0\le\theta\le\pi$. 特别地, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时, $\theta=0$; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, $\theta=\pi$.

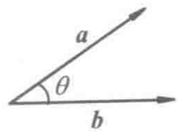


图 8-1-2

注: 向量的大小和方向是组成向量的不可分割的部分, 也是向量与数量的根本区别所在. 因此, 在讨论向量运算时, 必须把它的大小和方向统一起来考虑.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 就称这两个向量**平行**. 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 因此可以认为**零向量平行于任何向量**.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在同一条直线上. 因此, 两向量平行, 又称为两向量**共线**.

类似地, 还可引入向量共面的概念. 设有 $k\,(k\ge3)$ 个向量, 如果把它们的起点放在同一点时, k 个终点和该公共起点在同一个平面上, 就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 连接 AC (见图 8-1-3), 则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

在力学上, 我们有作用在一质点上的两个力的合力的平行四边形法则, 类似地, 我们也可按如下方式定义两向量相加的**平行四边形法则**: 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, 以 AB、AD 为边作平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC (见图8-1-4), 显然, 向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

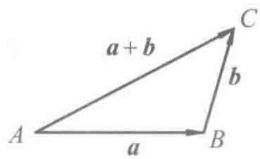


图 8-1-3

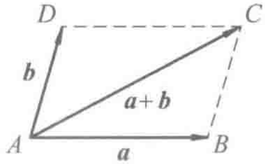


图 8-1-4

向量的加法满足下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1), 根据向量相加的三角形法则, 由图8-1-4, 有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以向量的加法满足交换律. 对于(2), 如图8-1-5所示, 先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加, 即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, 如将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加, 则得同一结果, 所以向量的加法满足结合律.

由于向量的加法满足交换律与结合律, 所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\,(n\geq 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$, 并可按三角形法则相加如下: 使前一向量的终点作为下一向量的起点, 相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和. 如图8-1-6所示, 有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

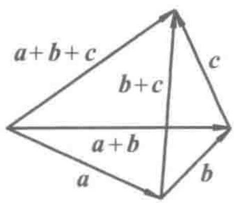


图 8-1-5

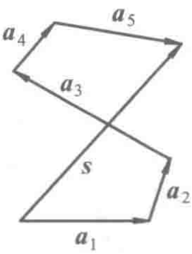


图 8-1-6

设有向量 $\boldsymbol{a}$, 我们称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此, 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

上式表明, 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(见图8-1-7(a)). 特别地, 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时, 有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

显然, 对任意向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (见图8-1-7(b)).

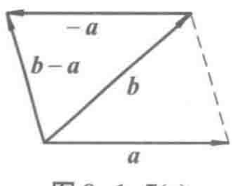


图 8-1-7(a)

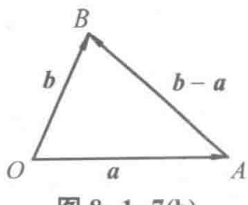


图 8-1-7(b)

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad \text{及} \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时成立.

2. 向量与数的乘法

定义 2　数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它按下面的规定来确定：$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|.$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由定义可知，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

从几何上看，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍，方向不变；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍，方向相反(见图 8–1–8).

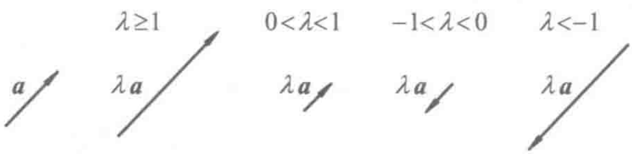


图 8–1–8

数与向量的乘积满足下列运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

读者可从图 8–1–9 中看出结合律、分配律的几何表示(设 $\lambda>0$，$\mu>0$).

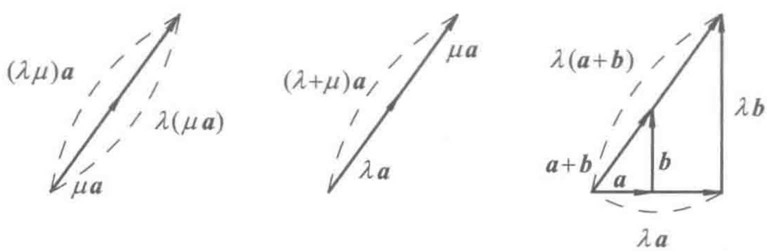


图 8–1–9

向量的相加以及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ (见图 8–1–10). 由数与向量乘积的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^{\circ}, \quad \boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

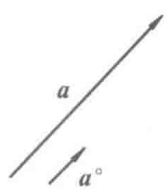


图 8–1–10

注：上式表明一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量，这一过程又称为将向量**单位化**.

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$. ■

例 2 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(见图 8−1−11).

解 因为平行四边形的对角线相互平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}，\text{即} -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}.$$

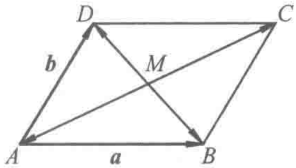


图 8−1−11

故 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$； $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

同理 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$； $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. ■

根据数与向量的乘积的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此，我们常用数与向量的乘积来说明两个向量的平行关系.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 共线(平行)的向量 $\boldsymbol{b}$ 都可表示为 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，其中 $\lambda=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取正号；反向时取负号. 此外，在表示式 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 中的数 λ 是唯一的. 如果不然，存在数 μ 使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，\text{即} |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0,$$

因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，所以必有 $\lambda=\mu$. 由此我们得到:

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，只需给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴.

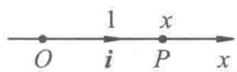


图 8−1−12

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴，如图 8−1−12 所示，则对于轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\boldsymbol{i}$，故必存在唯一的实数 x，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},$$

其中 x 称为数轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，这样，向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 一一对应了. 从而

$$\text{点} P\leftrightarrow\text{向量} \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{实数} x,$$

即数轴上的点 P 与实数 x 一一对应. 我们定义实数 x 为数轴上点 P 的**坐标**.

例 3 在 x 轴上取定一点 O 作为坐标原点. 设 A,B 是 x 轴上坐标依次为 x_1，x_2 的两个点，$\boldsymbol{i}$ 是与 x 轴同方向的单位向量，证明

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}.$$

证明　因为 $OA=x_1$，所以 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}$，同理 $\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}$，于是

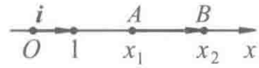


图 8-1-13

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_2\boldsymbol{i}-x_1\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}.$$

■

习题 8-1

1. 填空：

(1) 要使非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足_____；

(2) 要使非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足_____.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

4. 把 ΔABC 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

§8.2　空间直角坐标系　向量的坐标

本节将建立空间的点及向量与有序数组的对应关系，引进研究向量的代数方法，从而建立代数方法与几何直观的联系.

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组(即点的坐标 (x,y)) 对应起来. 同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系.

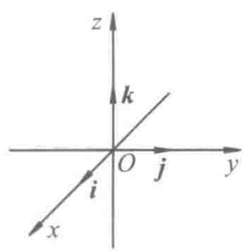


图 8-2-1

过空间一定点 O，作三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点、两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为 **坐标轴**. 它们构成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$（见图8-2-1).

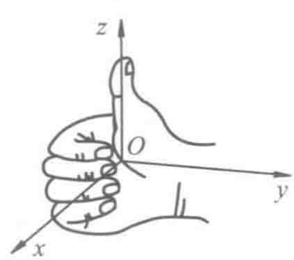


图 8-2-2

空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 我们通常采用右手系（见图8-2-2)，其坐标轴的正向按如下方式规定：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\pi/2$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy、yOz、zOx 称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，共八个卦限. 其中，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限按逆时针方向确定(见图8–2–3).

定义了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数来确定空间点的位置. 设 M 为空间中任意一点(见图 8–2–4)，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 P、Q、R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z. 这样，空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反之，若给定一有序数组 x，y，z，就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴找到坐标分别为 x、y、z 的三点 P、Q、R，过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面的交点就是由有序数组 x，y，z 所确定的唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x, y, z 称为**点 M 的坐标**，并依次称 x，y 和 z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，坐标为 x，y，z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

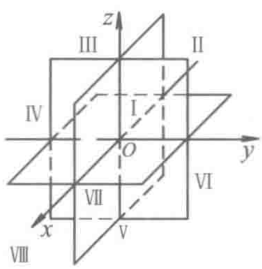


图 8–2–3

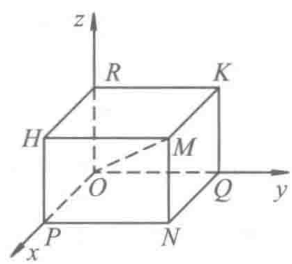


图 8–2–4

空间图形演示

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，x 轴上的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是，其坐标为 $(x, 0, 0)$. 同理，y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$；z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$；yOz 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$；zOx 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点，则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $A(x, y, -z)$；关于 x 轴的对称点为 $B(x, -y, -z)$；关于原点的对称点为 $C(-x, -y, -z)$.

二、空间两点间的距离

我们知道，在平面直角坐标系中，任意两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

现在我们来给出空间直角坐标系中任意两点间的距离公式.

设有空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过这两点各作三个分别垂直于坐