"十二五"国家重点图书出版规划项目

电子与信息工程系列

FRACTIONAL ORDER SIGNAL PROCESSING THEORY AND METHODS

分数阶信号处理理论与方法

● 史 军 沙学军 张钦宇 著

● 张乃通 主审

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

"十二五"国家重点图书出版规划项目
电子与信息工程系列

FRACTIONAL ORDER SIGNAL PROCESSING THEORY AND METHODS

分数阶信号处理理论与方法

史　军　沙学军　张钦宇　著
张乃通　主审

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

分数阶信号处理技术作为信号处理领域出现的新兴方向之一，以其独有的特点受到了广泛关注，它不但为传统信号处理方法无法解决的问题提供了新思路、新方法，而且牵引出诸多新应用。本书主要从分数阶积分变换的角度阐述分数阶信号处理的理论与方法。全书共分 9 章，内容包括分数阶傅里叶分析的基本概念、分数阶傅里叶分析的基本运算和定理、随机信号的分数阶傅里叶分析、分数阶滤波理论、分数阶采样与信号重构理论、短时分数阶傅里叶变换、分数阶时频分布理论和分数阶小波变换等。全书内容是作者近年来研究成果的提炼与总结，既注重理论与应用的结合，又强调知识性和可读性，对重要的知识点既有详尽的理论分析，又有合理的物理解释。

本书可作为理工科研究生的参考教材，也可供相关领域的教学人员、科技人员、工程技术人员作为参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶信号处理理论与方法/史军，沙学军，张钦宇著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.11

ISBN 978－7－5603－6219－9

Ⅰ.①分… Ⅱ.①史… ②沙… ③张… Ⅲ.①信号处理 Ⅳ.①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 311744 号

电子与通信工程

责任编辑　李长波
封面设计　刘洪涛
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 15　字数 362 千字
版　　次　2017 年 11 月第 1 版　2017 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6219－9
定　　价　58.00 元

前　言

整数化思想的经典信号处理技术奠定了平稳信号与系统的分析和处理基础，然而随着研究对象和应用范围的不断扩展，如何解决复杂非平稳信号与系统的分析和处理问题成为限制电子信息系统进一步提升性能的瓶颈。一种有效的解决办法就是引入先进的信号处理技术。近年来，在信号分析与信息处理中，一系列新型信号处理技术的不断涌现极大地丰富了经典信号处理技术的内涵与外延。其中分数阶信号处理技术以其独有的特点受到了广泛关注，所谓“分数阶信号处理”通常是指阶数、维数、参数为分数的信号与系统的分析和处理方法，它不仅为处理传统方法无法解决的问题提供了新思路、新方法，而且牵引出诸多新应用。然而，作为一个前瞻性的研究方向，分数阶信号处理尚有诸多基础理论和工程应用问题有待进一步完善和解决。目前，分数阶信号处理的相关内容主要包括以下几个方面：分数阶积分变换、分数阶微积分、分数阶系统、分数阶统计量以及分形。鉴于这几个方面的内容自成体系，本书重点从分数阶积分变换的角度阐述分数阶信号处理的理论与方法，主要内容是作者近年来研究成果的提炼与总结，阐述时既注重理论与应用的结合，又强调知识性和可读性，对重要的知识点既有详尽的理论分析，又有合理的物理解释。

全书共 9 章，除第 1 章是作者对现有文献的综述分析以外，其他章节均是作者研究成果的归纳总结，涵盖了以下几方面内容：分数阶傅里叶分析（第 2～4 章），分数阶滤波理论（第 5 章），分数阶采样与信号重构（第 6 章），线性时间一分数阶频率表示（第 7、9 章），二次型时间一分数阶频率分布（第 8 章）。第 1 章从分数阶积分变换的角度，介绍分数阶信号处理的研究进展及主要应用。第 2 章介绍分数阶傅里叶分析的基本概念，主要包括连续、离散时间分数阶傅里叶变换及离散分数阶傅里叶变换的快速算法。第 3 章阐述分数阶傅里叶分析的基本运算和定理。首先，利用算子的方法给出分数阶傅里叶变换信号分析与处理机理的新解释；其次，基于所提分数阶算子给出分数阶卷积和分数阶相关的统一数学定义，并得到相应的分数阶卷积定理和分数阶相关定理；同时，给出分数阶能量谱与分数阶相关函数之间的内在联系，进而得到线性系统的响应、激励及其传输函数的分数阶能量谱间的关系；接着，从算子的角度，给出适合任意信号的由信号时宽一分数域带宽积表征的分数阶不确定性原理，特别地，从通信信号的角度，提出信号能量聚集性表征的分数阶不确定性原理；最后，利用分数阶时、频移算子得到分数阶 Poisson（泊松）求和公式及其对偶形式，并给出它们与分数阶傅里叶级数的密切联系。第 4 章论述随机信号的分数阶傅里叶分析。首先，给出分数阶功率谱密度的定义及性质；然后，通过分数阶 Wiener-Khinchin（维纳一辛钦）定理揭示随机信号分数阶功率谱密度与分数阶相关函数之间的内在联系，并以此给出传统白噪声的分数域特性分析；最后，给出随机信号通过线性系统的分数阶傅里叶分析。第 5 章讨论基于分数阶傅里叶变换的信号滤波问题。首先，阐明关于分数阶滤波的几个基本概念，即分数域无失真传输条件、分数域理想滤波器的特性、分数域滤波系统的物理可实现性以及级联分数域滤波器的实现；其次，针对现有分数阶 Wiener（维纳）滤波存在的问题，建立基于广义分数阶卷积

的分数阶 Wiener 滤波器设计理论，得到分数阶傅里叶变换下滤波问题的 Wiener 解，从而解决最小均方误差准则下基于分数阶傅里叶变换的最优滤波问题；最后，针对现有分数阶匹配滤波存在的问题，利用广义分数阶卷积构建白噪声背景下分数阶匹配滤波器理论，并给出分数阶匹配滤波器的基本性质；进而又提出有色噪声背景下广义分数阶匹配滤波器的设计原理。本章所得到的结论对于设计分数阶其他类型的滤波器具有重要的理论指导意义。第 6 章针对现有分数阶采样与信号重构理论在实际应用中存在的问题，给出相应的解决方案。首先，考虑到现有时间有限信号分数阶采样定理在实际应用中面临的无法直接或准确获取信号分数谱的问题，提出一种仅由时域采样值进行信号重构的分数阶采样定理；同时，注意到现有分数域带限信号多通道采样存在因谱泄漏而造成信号失真的问题，给出一种基于广义分数阶卷积的分数域带限信号的多通道采样定理；此外，认识到实际应用中并不存在严格的带限信号，分别在函数空间中 Riesz（黎斯）基和框架下建立适合任意信号的一般化分数阶采样定理，从而可以有效地解决分数域带限信号的采样定理在应用中因 sinc（辛克）插值函数的高旁瓣和低衰减速率而导致的较大计算开销和插值误差的问题；最后，考虑到在一些应用中往往只能获取信号在某一有限时间间隔内的值，提出一种基于部分时域信息的分数域带限信号重构算法，与现有算法相比，该算法具有计算量、存储量小，信号重构精度高的特点。第 7 章针对分数阶傅里叶变换在信号分析与处理中面临的缺乏时间和分数阶频率定位功能的局限性等问题，从分数域局部化的角度，利用广义分数阶卷积提出一种新的短时分数阶傅里叶变换，并详细阐述它的基本原理，包括基本性质、定理、时间－分数阶频率的定位功能及分辨率等。第 8 章针对短时分数阶傅里叶变换因信号加窗而造成的时间分辨率和分数阶频率分辨率相互约束的矛盾，利用广义分数阶相关函数和分数阶频率算子分别从瞬时分数阶相关函数和分数阶特征函数两个角度给出二次型时间－分数阶频率分布的构造原理，并通过分数阶 Cohen（柯亨）类分布、分数阶 Wigner－Ville（维格纳－维莱）分布和分数阶模糊函数这三种典型的联合时域和分数域分布深入讨论时间－分数阶频率分布的分析特点和性质。第 9 章针对短时分数阶傅里叶变换存在的前述矛盾以及时间－分数阶频率分布因信号的二次型变换引入的交叉干扰项问题，从分数域伸缩滤波组的思想出发，利用广义分数阶卷积提出一种新的分数阶小波变换，并系统地建立分数阶小波分析理论，主要包括基本性质及定理、逆变换及容许性条件、重建核与重建核方程、联合时间－分数阶频率分析、分数阶多分辨分析与正交小波构造理论以及分数阶小波采样理论；同时，讨论分数阶小波变换在信号去噪和线性调频信号时延估计中的应用。

分数阶信号处理技术正在蓬勃发展之中，作者多年来虽始终致力于其理论体系和工程应用的研究，但书中疏漏之处在所难免。在此，诚恳希望得到诸位专家、同仁和广大读者的批评指正。

作　者

哈尔滨工业大学

2017 年 7 月

目 录

第 1 章 绪论

分数阶信号处理技术是在基于整数化思想的经典信号处理技术基础上发展起来的一个新的研究方向，极大地丰富了经典信号分析与处理的内涵和外延。在信号处理、图像处理、雷达、通信等方面具有十分广阔的应用前景。目前，分数阶信号处理相关内容主要包括以下几个方面：分数阶积分变换、分数阶微积分、分数阶系统、分数阶统计量以及分形。由于这几个方面自成体系，本书侧重从分数阶积分变换的角度阐述分数阶信号处理的理论与方法。

1.1 分数阶信号处理的研究进展

分数阶傅里叶变换[1-6](Fractional Fourier Transform，FRFT)的思想最早可以追溯到1929年N. Wiener的研究工作[7]。众所周知，傅里叶变换算子的特征函数为Hermite－Gauss(埃尔米特－高斯)函数，相应的特征值是$e^{jn(\pi/2)}$，$n \in \mathbf{Z}$。Wiener在文献[7]中为了得到一类特殊偏微分方程的解，利用傅里叶变换构造了一种变换算子，它的特征函数与傅里叶变换算子相同，而相应的特征值是$e^{jn\alpha}$，其中α是$\pi/2$的分数倍。实际上，Wiener所构造的变换算子即为FRFT算子，尽管FRFT这一术语在当时还没有出现。1937年，E. U. Condon在文献[8]中利用连续群理论证明了傅里叶变换算子构成以4为变换周期的周期群，其研究表明，函数的一次傅里叶变换相当于在该群空间上使该函数围绕某一固定点进行角度为$\pi/2$的逆时针旋转。基于此，Condon构造出一类广义连续群，傅里叶变换算子构成的周期群为其子群，并得到了相当于在该广义连续群空间上进行任意角度旋转的函数变换，该函数变换实际上就是FRFT。1939年，H. Kober利用分数阶积分理论研究函数变换的特征根时[9]，提出了一类连续变换，傅里叶变换和FRFT皆可视为其特例情况。1973年，H. Hida在研究白噪声随机特性时受Wiener研究成果[7]的启发，结合傅里叶变换和旋转群的概念定义了一种积分算子(实为FRFT算子)，导出了该算子的积分核和一些重要的性质，并将之应用于随机微分方程的求解[10]。这一时期最具代表性的工作是V. Namias的研究[5]。1980年，Namias从傅里叶变换特征值和特征函数的角度，根据特征值的任意次幂运算首次提出了分数(任意实数)傅里叶变换的概念，导出了它的高阶微分形式，并将之应用于求解量子力学中的微分方程。1987年，A. C. McBride和F. H. Kerr在Namias工作的基础上给出了FRFT更为严格的数学定义，并对FRFT的性质进行了补充和完善[6]。尽管FRFT具有诸多优良的信号处理特性，但是由于缺乏有效的物理解释和快速离散算法，使得其在信号处理领域迟迟未能受到应有的重视。1993年，A. W. Lohmann利用傅里叶变换与Wigner(维格纳)分布的$\pi/2$角度旋转关系[11]，并结合图像旋转和Wigner分布旋转给出了FRFT的几何解释，

即 FRFT 相当于在 Wigner 分布时频平面上任意角度的旋转。1994 年，L. B. Almeida 在 Lohmann 工作的基础上，总结分析了 FRFT 的基本性质。同时，Almeida 从信号处理的角度进一步揭示了 FRFT 与传统时频分析工具（包括 Wigner 分布、模糊函数、短时傅里叶变换和谱图）的关系，得出了 FRFT 可以解释为信号在时频面上坐标轴绕原点逆时针以任意角度旋转的重要结论[4]。通俗地讲，信号的傅里叶变换可以视为将信号从时间轴上逆时针旋转 $\pi/2$ 到频率轴的表示，而其 FRFT 则可看成将信号从时间轴逆时针旋转任意角度到 u 轴的表示。至此，FRFT 被赋予了明确的物理意义。1996 年，H. M. Ozaktas 等提出了一种计算量与快速傅里叶变换相当的离散算法[12]，为 FRFT 的数值计算提供了理论支持。之后，J. Garcia 等、S. C. Pei 等、C. Candan 等以及 A. Serbes 和 L. Durak 又对 FRFT 离散化算法进一步完善和发展[12-16]，为 FRFT 的工程应用提供了保证。近年来，FRFT 作为一种新型信号分析工具备受关注，新的研究成果也不断涌现，从信号处理的角度归纳起来，相关理论研究主要集中在以下几个方面。

1. 分数阶卷积

1993 年，D. Mendlovic 和 H. M. Ozaktas 在研究 FRFT 光学实现[17,18]时在文献[17]中首次提出分数阶卷积的概念，并将两个时间函数的分数阶卷积定义为这两个函数的 FRFT 在分数域乘积所对应的时域形式。其后，D. Mustard 在文献[19]中也给出了相同的定义，并讨论了该分数阶卷积的一些基本性质及其与 Wigner 分布之间的关系。然而，文献[17]和[19]都没有直接给出该分数阶卷积具体的时域表达形式。实际上，这一结果可以根据 K. K. Sharma 和 S. D. Joshi 在文献[20]中的研究结论得到。不难验证文献[17]和[19]中分数阶卷积在时域体现为复杂的三重积分，与经典卷积在时域为简单一重积分的性质相差甚远，因而不利于实际实现。1994 年，H. M. Ozaktas 等在文献[21]中将分数阶卷积重新定义为两个时间函数的 FRFT 在分数域做经典卷积运算后所得结果对应的时域形式。之后，O. Akay 和 G. F. Boudreaux－Bartels 在文献[22]中也给出了相同的定义，其研究结果表明，文献[21]定义的分数阶卷积在时域体现为一重积分。很显然，该分数阶卷积在分数域也体现为一重积分运算，而不像经典卷积在频域那样为乘积运算，因此它不适合分数域乘性滤波处理。1997 年，L. B. Almeida 在文献[23]中分析了经典卷积在分数域的特性，其研究结果表明，两时间函数的经典卷积在分数域体现为积分运算，不具备频域所表现出的简单的乘积特性。为了使分数阶卷积具备经典卷积的基本特性，即时域卷积（一重积分）体现为分数域的乘积，A. I. Zayed 在 1998 年通过对经典卷积定义的修正提出了一种新的分数阶卷积[24]，该分数阶卷积在分数域体现为两个时间函数的 FRFT 乘积，再乘以一个线性调频因子。之后，P. Kraniauskas 等、R. Torres 等以及 A. K. Singh 和 R. Saxena 分别在文献[25]、[26]和[27]中利用不同的方法得到了与 Zayed 相同的结果。近期，J. Shi 等研究多通道分数阶采样时在文献[52]中提出了一种结构简单且蕴含于 FRFT 采样定理中的分数阶卷积。该分数阶卷积在时域为一重积分，在分数域体现为简单的乘积，它的结构与分数域带限信号采样重构公式相对应。

2. 分数阶相关

1993 年，D. Mendlovic 和 H. M. Ozaktas 在文献[17]中提出了分数阶相关的概念。他们基于所提出的分数阶卷积把两个时间函数的分数阶相关定义为一个时间函数与另一时间

函数的反转共轭的分数阶卷积。根据前述分析可知，该分数阶相关时域为复杂的三重积分，不利于工程应用。1995年，D. Mendlovic等[28-30]类比经典相关的结构形式在文献[28]中提出了另外两种分数阶相关的定义。其中一种分数阶相关被定义为一个时间函数的α角度FRFT与另一时间函数α角度FRFT共轭的乘积的β角度FRFT；另外一种分数阶相关被定义为一个时间函数的α角度FRFT与另一时间函数反转共轭的$\pi-\alpha$角度FRFT的乘积的β角度FRFT。之后，Z. Zalevsky等在文献[31]中将两个时间函数的分数阶相关定义为一个时间函数的α角度FRFT与另一时间函数β角度FRFT共轭的乘积的γ角度FRFT。然而，文献[28]和[31]定义的分数阶相关函数的时域均为复杂的三重积分，甚至文献[28]也指出所提出的分数阶相关时域形式极其复杂，以致无法得到类似于简洁的时域经典相关易于实现的表达形式。2001年，O. Akay和G. F. Boudreaux－Bartels利用算子方法在文献[22]中提出了一种不同于前述定义的分数阶相关。实质上，该分数阶相关是两个时间函数的FRFT在分数域做经典相关后所对应的时域形式。为了使分数阶相关具有经典相关的基本特性，即时域为一重积分，而分数域体现为乘积运算，R. Torres等在2010年从平移不变性的角度提出了一种新的分数阶相关定义[26]。之后，A. K. Singh和R. Saxena在文献[32]中也得到了与Torres等一致的结果。

以上讨论均是对确定信号而言的，对于随机信号的分数阶相关问题，陶然和张峰等在文献[33,34]中以及S. C. Pei和J. J. Ding在文献[35]中都进行了探讨，得到了一些有用结论。

3. 分数阶不确定性原理

1995年，H. M. Ozaktas和O. Aytür研究分数域特性时在文献[63]中提出了分数阶不确定性原理，并得出这样的结论：任意两个α和β角度分数域的信号带宽（标准方差）的乘积不小于$\frac{1}{4}\sin^2(\beta-\alpha)$。然而，他们没有讨论最小不确定乘积对应的信号形式。之后，J. Shen和G. Xu等分别在文献[64]和[67]中也得到了与文献[63]相同的结果。同时，文献[67]指出不确定性乘积的界$\frac{1}{4}\sin^2(\beta-\alpha)$既适合实信号也适合复信号。2001年，S. Shinde和V. M. Gadre在文献[65]中针对实信号讨论了分数阶不确定性原理，其研究结果表明，实信号的任意两个α和β角度分数域带宽的乘积不小于$\frac{1}{4}\sin^2(\beta-\alpha)+\left(\Delta_t^2\cos\alpha\cos\beta+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\Delta_t^2}\right)^2$。可见，$\frac{1}{4}\sin^2(\beta-\alpha)$并不是实信号的最小不确定性乘积。之后，文献[63]和[65]结果又被相继扩展到FRFT的广义形式[68-73]。

4. 分数阶滤波理论

1994年，H. M. Ozaktas等在文献[21]中提出了分数域滤波的概念，其基本思想是，先对信号进行α角度FRFT，将得到的结果在分数域与滤波器传输函数进行乘积运算，然后再进行负α角度FRFT得到滤波器输出的时域波形。根据前述关于分数阶卷积的介绍可知，文献[21]中的乘性滤波处理在时域对应于复杂的三重积分，不利于实际实现。之后，M. F. Erden等在文献[21]的基础上讨论了分数域乘性滤波器的级联滤波[74]。1995年，A. M. Kutay等[36]在最小均方误差准则下利用分数域乘性滤波的方式提出了分数域最优滤波概念。之后，S. R. Subramaniam等在文献[36]基础上讨论了噪声统计特性未知情况下最优滤波器的设计[75]。2004年，齐林等研究了白噪声环境中线性调频信号的分数域最优滤波问

题[76]，得到了分数域上等效 Wiener 滤波算子的求解方法。2010 年，L. Durak 和 S. Aldirmaz 在文献[77] 中基于分数域乘性滤波方式给出了分数域自适应滤波器的设计方法。同年，S. A. Elgamel 等在文献[78] 中讨论了线性调频信号的分数域匹配滤波。其后，F. Zhang 等在文献[79] 中给出了一般信号的分数域匹配滤波器设计方法，其基本思想是以原信号 α 角度 FRFT 的反转共轭作为匹配模板，并将之与原信号 α 角度 FRFT 在分数域做经典卷积运算，即可实现对信号在分数域的匹配滤波处理。

5. 分数阶采样与信号重构理论

分数阶采样的思想源于 M. A. Kutay 等在文献[36,37] 中关于分数域最优滤波的研究工作，为了数值计算 FRFT，他们提出了分数域带限信号的插值公式。1996 年，X. G. Xia 通过研究带限信号的特性首次系统地阐述了分数域带限信号的采样定理[38]，其研究表明：一个信号若是分数域带限的，那么其带限的分数域是唯一的。这也说明经典 Shannon（香农）采样定理在某些条件下并不是最优的。之后，A. I. Zayed、T. Erseghe 等以及 R. Torres 等分别在文献[39]、[40] 和[41] 中得到了与 Xia 相同的结果。2003 年，C. Candan 和 H. M. Ozaktas 在文献[42] 中得到了时间有限信号的分数阶采样定理，该定理的本质是时间有限信号的分数阶傅里叶级数展开式。2005 年，张卫强等在文献[43] 中得到了分数域带通信号的分数阶采样定理。同年，K. K. Sharma 和 S. D. Joshi 给出了分数域带限周期信号的分数阶采样定理[44]。近期，A. Bhandari 和 P. Marziliano 在文献[45] 中得到了稀疏信号的分数阶采样定理。之后，A. Bhandari 和 A. I. Zayed 又在文献[46] 中提出了采样空间的概念。为了降低采样率，A. I. Zayed 在文献[47] 中提出了基于 Hilbert（希尔伯特）变换的分数域带限信号的采样定理。基于同样的目的，K. K. Sharma 和 S. D. Joshi 在文献[20] 中提出了分数阶多通道采样定理。之后，F. Zhang 等、D. Wei 等以及 J. Shi 等分别在文献[48,49]、[50,51] 和[52] 中得到了与文献[20] 类似的结果。近年来，北京理工大学陶然教授及其所领导的科研团队对分数域的采样问题展开了系统深入的研究，针对分数域带限信号提出了多种分数阶采样定理，初步建立了 FRFT 多采样率信号处理理论[53-59]。

在上述采样过程中，信号重构需要利用全部的时域信息。在一些特定场合或特殊应用中，往往只能获取信号部分的时域信息。基于此，K. K. Sharma 和 S. D. Joshi 在文献[60,69] 中提出了分数域带限信号外推的概念。之后，S. C. Pei 和 J. J. Ding 提出了利用分数阶长椭球波函数展开的基于部分时域信息的信号重构方法[61]。H. Zhao 等又将文献[61] 的结果推广到 FRFT 的广义形式，即线性正则性变换。

6. 其他分数阶变换

经过 30 余年的发展，FRFT 理论的内涵和外延不断得到丰富与发展。一方面，利用 FRFT 分数化的思想和方法，能够将现有许多积分变换分数化，例如，分数阶 Cosine（余弦）变换、分数阶 Sine（正弦）变换、分数阶 Hartley（哈特莱）变换和分数阶 Hilbert 变换等[80-82]；另一方面，随着研究的不断深入，人们也逐渐认识到 FRFT 是一种整体变换，无法刻画信号的局部特征。为了克服 FRFT 在信号分析中的局限性，短时分数阶傅里叶变换、联合时域—分数域信号表示和分数阶小波变换等概念便应运而生。

1996 年，D. Mendlovic 等在文献[83] 中为了实现信号的局部空域滤波，提出了一种局部分数阶傅里叶变换，即加窗信号的 α 角度 FRFT，且角度 α 与窗函数的中心有关。同年，孙

晓兵和保铮在文献[84]中将加窗信号的 α 角度 FRFT 定义为短时分数阶傅里叶变换(Short-Time Fractional Fourier Transform, STFRFT)，且角度 α 与窗函数的参数无关。之后，R. Tao 等在文献[85]中从联合时域和分数域分析的角度也得到了文献[84]中 STFRFT 的定义，并给出了它的基本性质及应用。特别地，若将 STFRFT[84] 的窗函数选为高斯函数，即可得到分数阶 Gabor(盖伯)变换[86]。2003 年，L. Stankovi 等在文献[87]中提出了一种加窗分数阶傅里叶变换，即信号 FRFT 的加窗傅里叶变换。然而该变换无法刻画信号在时域和分数域联合域内的局部特征，且缺乏有效的物理解释，并未受到太多的关注。

为了实现联合时域和分数域的信号表示，D. Dragoman 在文献[88]中提出了分数阶 Wigner 分布，即信号 FRFT 的常规 Wigner 分布。之后，O. Akay 和 G. Faye Boudreaux-Bartels 利用算子方法给出了另一种分数阶 Wigner 分布的定义，同时还提出了分数阶模糊函数的概念[89]。然而，由于分数阶 Wigner 分布和分数阶模糊函数的现有结论并不十分明确，且它们都属于双线性变换，存在交叉项，限制了它们在实际中的应用。

此外，D. Mendlovic 等在文献[90]中提出了分数阶小波(Fractional Wavelet Transform, FRWT)的概念，其思想是，对信号 FRFT 做常规小波变换。容易验证，该 FRWT 仅能刻画信号的分数域局部特征，而无法表征信号时域的局域特性。在文献[90]的基础上，G. Bhatnagar 等结合随机 FRFT 的概念提出了随机分数阶小波变换[91]。A. Prasad 和 A. Mahato 在文献[92]中也给出了一种分数阶小波变换定义，由于该定义缺乏有效的物理解释，并未得到研究者的关注。Y. Huang 和 B. Suter 在文献[93]中又提出了分数阶小波包变换的概念，同样因缺乏有效的物理解释，未受到关注。

1.2 分数阶信号处理的主要应用

1980 年，V. Namias 提出了 FRFT 的概念，并将之应用于量子力学[5]。1993 年，D. Mendlovic 和 H. M. Ozaktas 首次实现了光学 FRFT[17,18]。之后，FRFT 被广泛地应用于光学领域[96-110,112]。随着理论研究的不断深入和技术应用的不断扩展，FRFT 的应用从早期的量子力学和光学领域迅速渗透到雷达、声呐、信号与图像处理和通信等领域，主要集中在以下几个方面：信号检测与参数估计、信号采样与重构、信号滤波与分离、神经网络、数字水印及加密、移动目标检测等[1,2,38,94,95,112-128]。本书的目的是利用 FRFT 这一新型信号分析工具刻画通信系统各功能模块涉及的基本运算、定理与准则，从而为探索新型变换空间上的通信信号处理提供理论保证和技术支持，因此，接下来对 FRFT 在通信信号处理中的应用做个系统介绍。

2001 年，M. Martone 针对在时间和频率双选择性衰落信道下传统正交频分复用系统的子载波正交性容易受到破坏而导致系统性能下降的问题，提出了基于 FRFT 调制解调的多载波系统[129]，其结果表明该系统是双弥散信道中近似最优的无线通信系统，可以在不增加额外计算开销的前提下，提升系统性能。其后，T. Erseghe 等在 Martone 的工作基础上构建了基于广义 FRFT 的多载波系统[130]。进一步地，D. Stojanovi 等又从理论上分析了该多载波系统的抗干扰性能[131]，并进行了仿真验证。2004 年，齐林等针对直接序列扩频(DSSS)系统中扫频干扰，提出了基于分数域乘性滤波处理的抑制方法[132]，其研究结果表明，基于 FRFT 的扫频干扰抑制方法能够有效地改善 DSSS 接收机性能，且分数域的相关接收机性能

优于时域相关接收机。2005 年,陈恩庆等提出了基于 FRFT 的时变信道的参数估计方法[133],其主要思想是通过发射多分量的线性调频信号作为导频信号,并在接收端利用 FRFT 对接收到的导频信号进行参数估计,从而建立起快衰落信道的参数化模型。2009 年,R. Khanna 和 R. Saxena 提出了基于 FRFT 的多输入多输出系统[134],并给出了瑞利衰落信道下该系统波形设计的方法。近期,R. Tao 等提出了基于 FRFT 阶数复用的概念[135],建立了数学模型,给出了理论分析,并进行了仿真验证。J. Shi 等建立了基于 FRFT 的变换域通信系统[136-138],其研究结果表明:与传统变换域通信系统相比,该系统具有较强的抗干扰性能。时至今日,分数阶傅里叶变换在通信信号处理中的应用范围还在不断扩大。

1.3 本书的章节安排

本书的正文部分共有 9 章,重点从分数阶积分变换的角度,由浅入深、循序渐进地论述分数阶信号处理的理论与方法。

第 2 章详细介绍 FRFT 的基本概念,主要包括连续时间分数阶傅里叶变换、离散时间分数阶傅里叶变换以及离散分数阶傅里叶变换的快速算法。

第 3 章围绕 FRFT 基础理论存在的几个基本问题展开阐述和分析,这些问题集中体现在 FRFT 与算子的关系、分数阶卷积、分数阶相关、分数阶不确定性原理以及分数阶 Poisson 求和公式等。基本的研究思路是,通过建立 FRFT 与算子的关系,然后利用算子的方法给出相应问题的解决方案。

第 4 章讨论随机信号的分数阶傅里叶分析,主要包括随机信号的分数谱分析、分数阶(互)功率谱与分数阶自(互)相关函数的关系、随机信号通过分数阶线性系统的分数阶傅里叶分析等。

第 5 章讨论基于分数阶傅里叶变换的滤波问题。首先,分析分数域无失真传输条件、分数域理想滤波器的特性、分数域滤波系统的物理可实现性以及级联分数阶滤波器。其次,建立分数阶 Wiener 滤波器的设计原理,得到了 FRFT 下滤波问题的 Wiener 解。最后,给出分数阶匹配滤波器的设计原理及基本性质,进而讨论分数阶广义匹配滤波器的设计。

第 6 章针对 FRFT 的采样与重构理论在应用中存在的问题展开研究。首先,构建利用时域采样值进行信号重构的时间有限信号的采样定理。其次,针对现有多通道分数阶采样定理因存在谱泄漏而造成重构信号失真的问题,提出一种基于广义分数阶卷积的分数域带限信号的多通道分数阶采样定理。此外,考虑到实际应用中并不存在严格的带限信号,基于函数空间理论求得适合任意信号的一般化分数阶采样定理。最后,针对现有基于部分时域信息重构分数域带限信号的算法存在较大计算量、存储量和重构误差的问题,提出一种易于实现、计算量和存储量小、高重构精度的分数域带限信号的重构算法。

第 7 章针对分数阶傅里叶变换在信号分析中的局限性,从联合时域和分数域信号表示的角度给出加窗的解决方法。首先,为了克服分数阶傅里叶变换缺乏时间和分数阶频率的定位功能,利用广义分数阶卷积从分数域局部化的角度提出一种新的短时分数阶傅里叶变换。接着,详细阐述短时分数阶傅里叶变换的基本性质及定理。最后,讨论它的时间-分数阶频率的定位功能及分辨率。

第 8 章注意到短时分数阶傅里叶变换因信号加窗而造成的时间分辨率和分数阶频率分

辨率相互约束的矛盾，利用广义分数阶相关和分数阶频率算子，分别从瞬时分数阶相关函数和分数阶特征函数两个角度给出二次型时间－分数阶频率分布的构造原理，并通过分数阶 Cohen 类分布、分数阶 Wigner 分布和分数阶模糊函数这三种典型的联合时域和分数域分布深入讨论时间－分数阶频率分布的分析特点和性质。

第 9 章针对短时分数阶傅里叶变换存在的前述矛盾以及时间－分数阶频率分布因信号的二次型变换引入的交叉干扰项问题，从分数域伸缩滤波组的思想出发，利用广义分数阶卷积提出一种新的分数阶小波变换，并系统地建立分数阶小波分析理论，主要包括基本性质及定理、逆变换及容许性条件、重建核与重建核方程、联合时间－分数阶频率分析、分数阶多分辨分析与正交小波构造理论以及分数阶小波采样理论。同时，讨论分数阶小波变换在信号去噪和线性调频信号时延估计中的应用。

第2章 分数阶傅里叶分析的基本概念

经典傅里叶分析奠定了平稳信号分析与处理的基础，然而随着研究对象和应用范围的不断扩展，如何解决非平稳信号的分析与处理问题成为限制通信等电子信息系统进一步提升性能的瓶颈。一种有效的解决办法就是引入先进的信号处理技术。近年来，在信号处理领域涌现出一系列新型信号变换以解决这一问题。其中，在傅里叶分析基础上发展起来的分数阶傅里叶变换具有旋转角度的自由参数，能够展现出信号从时域逐渐变化到频域的所有特征，不但为解决问题提供了新思路、新方法，而且牵引出许多新应用。

2.1 连续时间分数阶傅里叶变换

2.1.1 定义与基本性质

信号 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的分数阶傅里叶变换(Fractional Fourier Transform,FRFT) 定义为[1]

$$F_\alpha(u) = \mathscr{F}^\alpha[f(t)](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_\alpha(u,t) \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

式中，$\mathscr{F}^\alpha$ 表示 FRFT 算子，α 为 FRFT 旋转角度，积分核 $K_\alpha(u,t)$ 满足

$$K_\alpha(u,t) = \begin{cases} A_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2+t^2}{2}\cot\alpha - \mathrm{j}tu\csc\alpha}, & \alpha \neq k\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2k\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2k-1)\pi \end{cases} \tag{2.2}$$

式中，$A_\alpha = \sqrt{(1-\mathrm{j}\cot\alpha)/2\pi}$ 且 $k \in \mathbf{Z}$。同时，分数阶傅里叶逆变换(Inverse Fractional Fourier Transform,IFRFT) 的表达式为

$$f(t) = \mathscr{F}^{-\alpha}[F_\alpha(u)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha(u) K_\alpha^*(u,t) \mathrm{d}u \tag{2.3}$$

其中，u 轴被称为分数阶傅里叶变换域，通常简称为分数域(Fractional Domain)，相应的变量 u 被称为分数阶频率(Fractional Frequency)[2]。

特别地，当 $\alpha = \pi/2$ 时，FRFT 和 IFRFT 便分别退化为传统傅里叶变换(Fourier Transform,FT) 及其逆变换[3]，即

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \tag{2.4}$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{2.5}$$

式中，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换及其逆变换算子。此外，容易验证，$\mathscr{F}^{0}[f](u)=f(u)$，$\mathscr{F}^{\pi}[f](u)=f(-u)$，$\mathscr{F}^{3\pi/2}[f](u)=F(-u)$，$\mathscr{F}^{2\pi}[f](u)=f(u)$。从时频平面上来看[11,23]，$\mathscr{F}^{\pi/2}[f](u)$ 是将函数 $f(t)$ 旋转 $\pi/2$ 角度，得到的是信号的傅里叶变换，即一个函数在与时间轴夹角为 $\pi/2$ 的 ω 轴上的表示；$\mathscr{F}^{\pi}[f](u)$ 相当于 t 轴连续两次 $\pi/2$ 角度的旋转，因此得到一个为 $-t$ 轴上的表示；$\mathscr{F}^{3\pi/2}[f](u)$ 可视为 t 轴连续三次 $\pi/2$ 角度的旋转，得到一个为 $-\omega$ 轴上的表示；$\mathscr{F}^{2\pi}[f](u)$ 表示对 $f(t)$ 进行四次连续 $\pi/2$ 角度的旋转，所得结果与原函数相同；而 $\mathscr{F}^{\alpha}[f](u)$ 则为对信号在时频面上围绕时间轴逆时针旋转任意角度 α 到 u 轴上的表示。于是，u 轴和与之垂直的轴（记为 v 轴）构成了一个新的 (u,v) 坐标系，这个新坐标系可视为由原 (t,ω) 坐标系逆时针旋转 α 角度形成的，如图 2.1 所示。

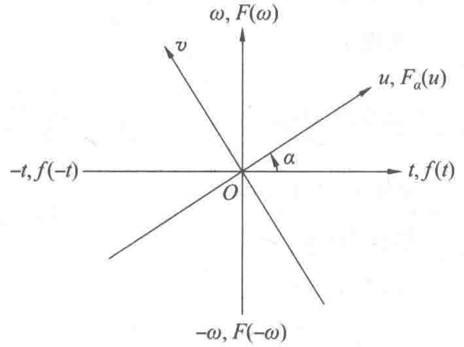

图 2.1　时频平面上 FRFT 旋转的示意图

若用算子符号表示，FRFT 可以表示为 $F_\alpha=\mathscr{F}^{\alpha}f$，表 2.1 给出了 FRFT 算子的基本性质。记 $F_\alpha(u)$ 表示信号 $f(t)$ 的 FRFT，表 2.2 给出了一些常见信号运算的 FRFT。此外，分数阶傅里叶变换能够进一步推广为线性正则性变换（Linear Canonical Transform，LCT），即

$$F_{(a,b,c,d)}(u)=\mathscr{L}^{(a,b,c,d)}[f(t)](u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_{(a,b,c,d)}(u,t)\mathrm{d}t, & b\neq 0\\ \sqrt{d}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{j}/2)cdu^2}f(du), & b=0\end{cases} \tag{2.6}$$

其中，积分核 $K_{(a,b,c,d)}(u,t)$ 的表达式为

$$K_{(a,b,c,d)}(u,t)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{j}2\pi b}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{at^2+du^2}{2b}-\mathrm{j}\frac{1}{b}ut} \tag{2.7}$$

式中，参数 a、b、c、d 皆为实数且满足 $ad-bc=1$。容易验证，当 $(a,b,c,d)=(\cos\alpha,\sin\alpha,-\sin\alpha,\cos\alpha)$ 时，LCT 就变成了乘以某个固定相位因子的 FRFT，即 $\mathscr{L}^{(a,b,c,d)}[f(t)](u)=\sqrt{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}\mathscr{F}^{\alpha}[f(t)](u)$。几乎 FRFT 的所有性质都可以直接推广到 LCT，在此不再赘述。

表 2.1　FRFT 算子的基本性质

性质	数学表述
零旋转	$\mathscr{F}^{0}=\boldsymbol{I}$，符号 $\boldsymbol{I}$ 表示单位算子
与 FT 等价	$\mathscr{F}^{\pi/2}=\mathfrak{F}$
恒等变换	$\mathscr{F}^{2\pi}=\boldsymbol{I}$
线性	$\mathscr{F}^{\alpha}(c_1f+c_2g)=c_1\mathscr{F}^{\alpha}f+c_2\mathscr{F}^{\alpha}g,\quad c_1,c_2\in\mathbf{C}$
旋转相加性	$\mathscr{F}^{\alpha}\mathscr{F}^{\beta}=\mathscr{F}^{\alpha+\beta}$
结合性	$(\mathscr{F}^{\alpha}\mathscr{F}^{\beta})\mathscr{F}^{\gamma}=\mathscr{F}^{\alpha}(\mathscr{F}^{\beta}\mathscr{F}^{\gamma})$
连续性	$\mathscr{F}^{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2}f=\mathscr{F}^{c_1\alpha_1}\mathscr{F}^{c_2\alpha_2}f=\mathscr{F}^{c_2\alpha_2}\mathscr{F}^{c_1\alpha_1}f,\quad c_1,c_2\in\mathbf{R}$
自成像性	$\mathscr{F}^{\alpha+2\pi}f=\mathscr{F}^{\alpha}f$
逆运算性质	$(\mathscr{F}^{\alpha})^{-1}=\mathscr{F}^{-\alpha}$
酉性	$(\mathscr{F}^{\alpha})^{-1}=(\mathscr{F}^{\alpha})^{\mathrm{H}}$，符号 H 表示取共轭转置
能量守恒性	$\langle f,g\rangle=\langle\mathscr{F}^{\alpha}f,\mathscr{F}^{\alpha}g\rangle$
Wigner 时频分布旋转性[4]	$\mathrm{WVD}_{F_\alpha}(u,v)=\mathrm{WVD}_f(u\cos\alpha-v\sin\alpha,u\sin\alpha+v\cos\alpha)$

表 2.2　一些常见信号运算的 FRFT

信号运算	FRFT
时间反转 $f(-t)$	$F_\alpha(-u)$
共轭 $f^*(t)$	$F^*_{-\alpha}(u)$
尺度变换 $f(ct)$	$\sqrt{\frac{1-\mathrm{j}\cot\alpha}{c^2-\mathrm{j}\cot\alpha}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)u^2}{\sin 2\alpha}}F_\beta\left(\frac{u\csc\alpha}{c\csc\beta}\right)$, $\tan\beta=c^2\tan\alpha$,　$c\in\mathbf{R}^+$
时移 $f(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\mathrm{j}u\tau\sin\alpha}F_\alpha(u-\tau\cos\alpha)$
频移 $f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}vt}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{v^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\mathrm{j}uv\cos\alpha}F_\alpha(u-v\sin\alpha)$
微分 $f'(t)$	$-\mathrm{j}uF_\alpha(u)\sin\alpha+F'_\alpha(u)\cos\alpha$
积分 $\int_\xi^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\tan\alpha}\int_\xi^u F_\alpha(v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{v^2}{2}\tan\alpha}\mathrm{d}v$

2.1.2　与传统线性时频表示的关系

传统时频分析是一种联合时间和频率的信号分析方法，在非平稳信号处理中发挥着重要的作用，它总体上可以归为两类，一类是线性时频表示，主要包括短时傅里叶变换、小波变换等；另一类是二次型时频分布，主要包括 Wigner－Ville 分布、Cohen 类分布、模糊函数等。下面将介绍分数阶傅里叶变换与线性时频表示的关系。

1. 与傅里叶变换的关系

由式(2.1)可知，分数阶傅里叶变换与傅里叶变换的关系可以表述为

$$\mathscr{F}^\alpha[f(t)](u)=\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\cot\alpha}\mathfrak{F}[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{t^2}{2}\cot\alpha}](u\csc\alpha) \tag{2.8}$$

可以看出，分数阶傅里叶变换的计算过程可以分解为以下几个步骤：

① 原函数 $f(t)$ 与一线性调频函数相乘，得到

$$\widetilde{f}(t)=f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \tag{2.9}$$

② 对 $\widetilde{f}(t)$ 进行傅里叶变换(变换元做了尺度 $\csc\alpha$ 伸缩)，即

$$\widetilde{F}(u\csc\alpha)=\mathfrak{F}[\widetilde{f}(t)](u\csc\alpha) \tag{2.10}$$

③ 再将 $\widetilde{F}(u\csc\alpha)$ 与一线性调频函数相乘，得到

$$\hat{F}(u\csc\alpha)=\widetilde{F}(u\csc\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \tag{2.11}$$

④ 最后，将 $\hat{F}(u)$ 乘以一复数因子，得到原函数的分数阶傅里叶变换，即

$$F_\alpha(u)=\sqrt{1-\mathrm{j}\cot\alpha}\,\hat{F}(u\csc\alpha) \tag{2.12}$$

至此，给出了分数阶傅里叶变换与传统傅里叶变换的内在联系。

2. 与短时傅里叶变换的关系

短时傅里叶变换是一种重要的时频分析工具，而且谱图对应的是短时傅里叶变换的模平方。由于短时傅里叶变换和谱图都是信号的二维平面表示，所以人们很自然地对分数阶傅里叶变换与短时傅里叶变换、谱图的关系感兴趣。

对于信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，短时傅里叶变换(STFT)的标准定义为