厚大 考研 NETM

全国硕士研究生入学统一考试用书

考研数学

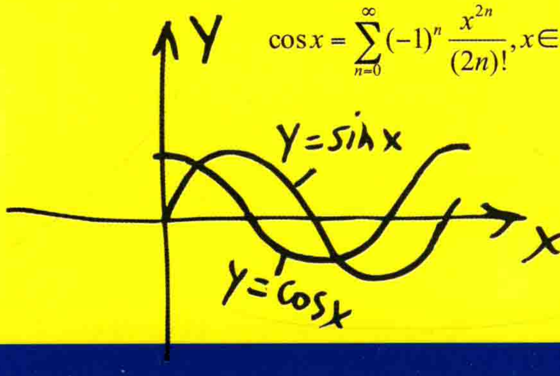
基础精讲 数一·数二·数三

（一本通）

铁军　赵俊光／编著

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty).$$



适用范围：

数学一、数学二、数学三、农学类数学联考与经济类数学联考396

考研数学基础阶段复习首选

考研大纲知识结构图引

典型例题精讲剖析

中国政法大学出版社

考研数学基础精讲
(数一·数二·数三)

作　者　铁　军　赵俊光

中国政法大学出版社
2017·北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学基础精讲：数一·数二·数三/铁军，赵俊光编著. —北京：中国政法大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5620-7748-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①铁… ②赵… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 219996 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承　印　三河市宇通印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　19
字　数　435 千字
版　次　2017 年 9 月第 1 版
印　次　2017 年 9 月第 1 次印刷
定　价　48.00 元

前言

PREFACE

考研数学复习的主要任务就是巩固“三基”（基本概念、基本理论、基本方法），使后面的强化、冲刺复习进行顺利。基础阶段持续时间最长，对全程效果影响最深远，是复习效果明显分化的阶段，基础复习阶段能否完成“质”的飞跃，对考研成败和最后的结果至关重要。

《考研数学基础精讲》（高端集训营版）是集命题、阅卷、考研辅导三位一体的经典之作，以最新考研数学大纲为基础，涵盖高等数学、线性代数、概率论与数理统计基础复习全部内容。鼓励考生不要就题论题，还要多思考和研究，不但要研究考研数学复习必须注意的考点和题型，更要从一道典型题目中，归纳总结学到了多少知识和解题方法，发现了多少自身存在的问题，体会到了多少解题的思路和考点。

考研数学试卷考查的都是高等数学、线性代数和概率统计课程中的主要公式、主干知识和核心内容，而且都是核心概念、核心公式、基本理论和常用方法。在考查基本内容的基础上，着重考查考生的运算能力、逻辑推理能力、应用数学知识分析问题和解决问题的能力。

近年来考研试题更加关注基础，强调重点，注重能力，注意了整体难度的控制，中等和中等难度以下的试题占到了70%以上，尤为凸显了数学基础的重要性。考研数学试题分为选择题、填空题和解答题三种题型，选择题和填空题中的大部分试题只涉及一个或两个数学公式和知识点，都是基本题；解答题中的基本题也超过了一半，即使在难度较大、综合性较强的试题中，在设问和数学公式、性质和定理的运用上也都做了处理，为考生搭了桥、铺了路。

牢固掌握并灵活运用数学基础知识是考生分析问题和解决问题能力的基础和高层次表现。从编者的考研阅卷经验看，一些考生的基础还不够扎实，首先是对基本概念的掌握不够准确，其次运算能力比较薄弱，反映出公式记忆不够清晰、基础不够全面，理论理解不够深入，方法掌握不够灵活、不够牢靠。“研”途漫漫，除了合理的复习计划、持之以恒的努力之外，选择适合自己的课程和与之配合的精品图书，将使复习达到事半功倍的效果，最终取得高分、进入理想院校的概率也会大大增加。

针对大多数考生基础薄弱，很长时间没有复习数学的事实，《考研数学基础精讲》（高端集训营版）完全为考研基础复习量身定制，在范围、难度上把握分毫不差，而且在针对性与适应性上远高于本科教学书和其他参考书。在选用《考研数学基础精讲》（高端集训营版）完成基础课程的学习之后，可更加显著地提高复习效率。总结为一句话，那就是：要想数学拿高分，就必须熟练掌握、灵活应用基本概念、定理和公式。

本书的编写严格依据《2019年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》对各卷种分别规定的考试范围及要求，书中涉及的知识内容编排分别与大纲对照一致（在书中做出标记，数一、二、三均适用的，不用标记，只适用数几的特殊标出），全书分为导学篇、高等数学、线性代数、概率论与数理统计四大部分，各部分知识内容均与考试大纲完全一致，以“章”为单位进行编排。本书的目的就在于帮助考生加强对基本概念、定理和公式的记忆和掌握，并提高对其运用的熟练程度，提高解题能力。

本书特色如下：

（一）内容全面，基础题型，帮助考生快速掌握数学基本内容和基本解题方法

每章在内容编排上主要包括三大板块，“大纲内容与要求”使考生能明确大纲要求考生掌握的考试范围和考试要求，列出反映考试内容且要求考生掌握的概念、性质、公式、理论与计算方法，帮助考生准确地把握住大纲的内容，明确复习方向、复习重点，并作出科学的时间安排，熟悉各类考研题型，掌握各类常考题型的解题思路、方法和技巧。“知识网络图”提纲挈领，将学科每一章节知识梳理，呈现知识全局，提高考生的认知层次。在“考点精讲”中，以最为详尽的方式总结归纳出高等数学、线性代数、概率论与数理统计中的全部公式及相应的知识点，包括定义、性质、定理、公式及其图、表和评注。“典型例题剖析”是本书的又一亮点，通过这部分内容使考生能够透视出考研数学的重点题型以及数学公式的变化规律、每种题型的切入点、突破口和解题方法与技巧，达到“定位”数学公式和知识点并快捷准确巧妙解题的目标。

（二）权威保障，集命题、阅卷、考研辅导三位一体，迅速跻身“解题达人”

本书依据考研大纲，融合命题、阅卷、考研辅导等三个方面的经验总结，精心编写而成。精心选取典型题目，全面覆盖考研大纲要求的基本知识点，旨在帮助考生掌握基本概念、定理、公式及基本解题方法，加强考生对基础知识的理解和运用，具有全面性、典型性、针对性、技巧性、综合性等特点，完全可以帮助学生在基础复习阶段巩固所学基础知识，掌握重点、难点，熟悉解题思路和方法，增强应试能力，提高考研成绩。《考研数学基础精讲》中总结的求极限、微分中值定理证明、不

等式证明的方法，其中有许多都是非常精妙、便捷的，掌握了这些，您瞬间就可跻身“解题达人”行列。

（三）力求从命题人和阅卷者的角度全面破解命题、解题思路，严格规范解题过程，扩展视野和思路，打牢基础，提高应试水平。通过对历年真题进行梳理分类，使考生对茫茫题海有一个宏观上的清晰把握，通过对每章中所包含的各种题型的学习，可逐步把握本章的知识点与考点，达到对本章各个知识点之间前后贯穿连续、触类旁通的境界。

其次，对每个例题都给出详细的解答和讲解。在详细解答之前，首先给出解题的思路分析，不仅使考生了解本题所要考查的知识点，学到这道题的具体求解方法，而且能学到如何分析这道题的求解过程，使考生不仅“知其然”，而且能“知其所以然”。考点主要是对这类题型的解题方法作一个归纳、总结、提炼，上升到一般规律，并指出其难点和技巧所在，进而了解这类题的命题规律与今后可能的出题方向，往往可以事半功倍。而技巧的背后实质是对概念的深入理解，掌握技巧点在今后的应试中必将发挥巨大的作用。

本书适合考研同学基础复习使用，也可作为在校大学生学习数学的参考书。

由于编者水平有限和编写时间比较仓促，书中错误疏漏之处，恳请读者批评指正。

编者

2017 年 9 月

目录

CONTENTS

导学篇

函数及其特性

【考点分析】

按照考试大纲的要求，函数部分主要考查：函数的四个常见性态——奇偶性、单调性、周期性、有界性与函数的两种运算——复合运算和反函数运算. 在历年的试题中，既有单纯考查函数有关知识的题目，也有许多把函数有关知识融汇于其他内容当中的综合性题目. 题型以填空题和选择题为主.

考点精讲与典型例题剖析

一、函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a, a)$ $(a>0)$，若对于任 $x\in(-a, a)$，都有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任 $x\in(-a, a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

考 点 判别给定函数 $f(x)$ 的奇偶性的主要方法是：不管 $f(x)$ 的具体形式是什么，均计算 $f(-x)$ 的值. 如果 $f(-x)=f(x)$，则由定义知 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$，则由定义知 $f(x)$ 为奇函数.

【例 1】判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+f(|\sin x|-2)\operatorname{sgn}(\sin x)\quad(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$

(2) $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$，$x\in(-\infty, +\infty)$

(3) $f(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geqslant 0\\ 2^x-1, & x<0\end{cases}$

考 点 设 $f(x)$ 二阶可导，则有：

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，$f''(x)$ 为奇函数，且 $f(0)=0$，$f''(0)=0$. 简单地说，可导的奇函数的导数为偶函数.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数，$f''(x)$ 为偶函数，且

$f'(0)=0$. 简单地说，可导的偶函数的导数为奇函数.

【例 2】(1997 数学三、四) 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

(A) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$

二、函数的周期性

对函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T\neq 0$，使得对于定义域的每一个 x，$x+T$ 仍在定义域内，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

考　点 判断函数是否为周期函数，主要方法是根据周期函数的定义，要先找到一个非零常数 T，计算是否有等式 $f(x+T)=f(x)$ 成立. 而对于抽象的周期函数，其周期 T 一定与已知条件中所给的参数或常数有关，是其二倍、三倍….

【例 3】设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

【例 4】设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)$（　　）.

(A) 是周期函数，周期为 π　　(B) 是周期函数，周期为 2π

(C) 是周期函数，周期为 3π　　(D) 不是周期函数

【例 5】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且恒有关系式 $f(x+l)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ 成立，其中 l 为正实数，证明 $f(x)$ 是周期函数.

考　点 可导的周期函数的导函数是具有相同周期的周期函数. 也就是说，如果函数 $f(x)$ 二阶可导，且有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f'(x+T)=f'(x)$，$f''(x+T)=f''(x)$.

【例 6】设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，并满足 $f(x)=-f(-x)$，且 $f(x)=f(x+1)$. 若 $f'(1)>0$，则（　　）.

(A) $f''(-5)\leqslant f'(-5)\leqslant f(-5)$　　(B) $f(5)=f''(-5)<f'(-5)$

(C) $f'(-5)\leqslant f(-5)\leqslant f''(-5)$　　(D) $f(-5)<f'(-5)=f''(-5)$

三、函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对于每一个 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则，即这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 X 上无界.

考　点 (1) 无界变量与无穷大量的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

(2) 非零的有界变量与无穷大量的乘积是无界变量，但不是无穷大量.

【评注】(1) 无界变量与有界变量是函数有界性的正反两个方面.

(2) 用无穷大量的定义和无界变量的定义来区别这两个概念.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是指，在 $x=x_0$ 处的充分小邻域内，对于所有的 x，$|f(x)|$ 都可以任意大，而“无界”不要求“所有的 x”.

【例 7】设函数 $f(x)=(x\tan x)e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）.

(A) 偶函数　　(B) 无界函数

(C) 周期函数　　(D) 单调函数

【例 8】当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）.

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 有界的，但不是无穷小量　　(D) 无界的，但不是无穷大

【例 9】设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　　）.

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

四、函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 且 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）. 如果其中的“$\leqslant$”或“$\geqslant$”改为“$<$”（或“$>$”），称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加（或严格单调减少）.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若对任一 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0(<0)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（减少）.

注意：若将上面的不等式 $f'(x)>0(<0)$，改为 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，且使 $f'(x)=0$ 的点（驻点）只有有限个，则结论仍成立.

考　点 (1) 判断抽象的函数的单调性，在考试时采用举反例排除法，而尽量不用单调性的定义进行证明；

(2) 导数大于零的函数一定单调递增，但单调递增的可导函数的导数不一定严格大于零，其导数也可能等于零.

【例 10】设 $f(x)$，$g(x)$ 分别为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的严格增函数与严格减函数，则（　　）.

(A) $f[g(x)]$ 为减函数　　(B) $f[g(x)]$ 为增函数

(C) $f(x)g(x)$ 为减函数　　(D) $\frac{g(x)}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 为增函数

【例 11】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1，x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则（　　）.

(A) 对任意 x，$f'(x)>0$　　(B) 对任意 x，$f'(-x)\leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

五、分段函数与复合函数

在用公式法表示的函数中，若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达，即在函数定义域的不同部分用不同数学式子表示的函数，称为分段函数.

分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围的总和或并集.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 为中间变量. 对复合函数，重要的是会把它分解，即知道它是由哪些“简单”函数复合的.

将两个或两个以上的函数特别是分段函数进行复合是考研中的基本题型.

考 点 求分段函数的复合函数的主要方法是：分段代入法. 其核心是先代入，后解不等式.

【解题程序】(1) 代入：如果复合函数 $f[g(x)]$ 的外层函数 $f(u)$ 是 n 段分段函数，而内层函数 $u=g(x)$ 是 m 段分段函数，则将内层函数 $u=g(x)$ 分段代入外层函数 $f(u)$ 后，得到的复合函数 $f[g(x)]$ 为 $n\times m$ 段的分段函数.

(2) 解不等式：分别解出 $n\times m$ 个不等式构成的不等式组，把无解的不等式组去掉，即得所求的复合函数 $f[g(x)]$.

【例 12】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【例 13】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0.\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【例 14】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

六、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，定义域为 D_f，则对于每一个 $y\in Z_f$，必存在 $x\in D_f$ 使 $y=f(x)$. 若把 y 作为自变量，x 作为因变量，便得到一个函数 $x=\varphi(y)$，且 $f[\varphi(y)]=y$，称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 但习惯上把 $y=f(x)$ 反函数记作 $y=\varphi(x)$.

在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形是同一条曲线；而函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

考 点 求反函数的程序：(1) 由 $y=f(x)$ 解出 x，得到关系式 $x=\varphi(y)$；(2) 将 x 与 y 互换，即得所求函数的反函数 $y=\varphi(x)$.

【例 15】已知 $y=\begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \ln x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2e^{x-1}, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$，求反函数及其定义域.

【例 16】设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，则 $f\left[\frac{1}{2}g(3x)\right]$ 的反函数是（　　）.

(A) $g\left[\frac{1}{2}f(3x)\right]$　　(B) $\frac{1}{3}f\left[2g(x)\right]$

(C) $g\left[2f(\frac{x}{3})\right]$　　(D) $2g\left[\frac{1}{3}f(x)\right]$

【例 17】已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$，且 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，则 $g(x)=$________.

第一篇 高等数学

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求，将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三.

第一章 函数、极限、连续

函数是微积分的研究对象，极限是微积分的理论基础，而连续性是可导性与可积性的重要条件. 它们是每年必考的内容之一.

大纲内容与要求

【大纲内容】

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义及其性质；函数的左极限与右极限；无穷小量和无穷大量的概念及其关系；无穷小量的性质及无穷小量的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{ , }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质.

【大纲要求】

（数学一、数学二）

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系 .
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 .

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

（数学三）

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的性质及四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

知识网络图

- 函数 → 极限 ← 连续性
  - 极限概念
    - "ε－N" 定义
    - "ε－X" 定义
    - "ε－δ" 定义
  - 极限性质
    - 唯一性
    - 有界性
      - 数列整体有界
      - 函数局部有界
    - 保号性
  - 求极限的主要方法
    - 1. 极限存在准则
      - 夹逼定理
      - 单调有界数列有极限
    - 2. 两个重要的极限
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - 3. 函数的连续性
    - 4. 用导数的定义
    - 5. 洛必达法则
      - $\dfrac{0}{0}$型、$\dfrac{\infty}{\infty}$型
      - $\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型；1^{∞}、∞^{0}、0^{0}型（转换为$\dfrac{0}{0}$型、$\dfrac{\infty}{\infty}$型）
    - 6. 等价无穷小替换
    - 7. 泰勒公式
    - 8. 用函数极限求数列极限
  - 无穷小量
    - 无穷小量与无穷大量的定义、关系
    - 无穷小量的运算性质
    - 无穷小量与极限的关系
    - 无穷小量的阶、等价无穷小量
- 连续性
  - 连续的概念
    - 初等函数的连续性
    - 分段函数连续性判定
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最值定理
      - 介值定理
  - 间断点的分类
    - 第一类——左右极限都存在
      - 可去
      - 跳跃
    - 第二类——左右极限中至少有一个不存在

第一节　数列极限与函数极限

【考点分析】

数列极限的考点主要包括：$\varepsilon-N$ 定义的理解，极限运算法则的理解，单调有界准则和夹逼准则求极限，利用定积分的定义求和式的极限等等. 函数极限的考点主要包括：用洛必达法则求未定式的极限，由已知极限求未知极限，极限中的参数问题，无穷小量阶的比较等等.

考点精讲与典型例题剖析

一、数列的极限

1. 数列的极限

无穷多个数按一定顺序排成一列：u_1，u_2，…，u_n，…，称为数列，记为数列 $\{u_n\}$，其中 u_n 称为数列的一般项或通项．设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A．若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$．没有极限的数列称为发散数列．收敛数列必为有界数列，其极限存在且唯一．

2. 极限存在准则

(1) 定理（夹逼定理）：设在 x_0 的某空心邻域内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 A．注意：对其他极限过程及数列极限，有类似结论．

(2) 定理：单调有界数列必有极限．

3. 重要结论：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，其中 a 为任意常数．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．(3) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=a$．

【例 1】(1) 设 $a_1=0$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$，$(n\geqslant 2)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}}=$ ________．

考点一 (1) 单调有界数列必有极限．

(2) 单调递增且有上界的数列必有极限，单调递增且无上界的数列的极限为 $+\infty$．

(3) 单调递减且有下界的数列必有极限，单调递减且无下界的数列的极限为 $-\infty$．

【评注】(1) 在应用【考点一】进行证明时，有些题目中关于单调性与有界性的证明有先后次序之分，需要及时进行调整证明次序．

(2) 判定数列 $\{u_n\}$ 的单调性主要有三种方法：

I. 计算 $u_{n+1}-u_n$．若 $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$，则 $\{u_n\}$ 单调递增；若 $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$，则 $\{u_n\}$ 单调递减．

II. 当 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$ 时，计算 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$．若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\{u_n\}$ 单调递增；若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$，则 $\{u_n\}$ 单调递减．

III. 令 $f(n)=u_n$，将 n 改为 x，得到函数 $f(x)$．若 $f(x)(x\geqslant 1)$ 可导，则当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$\{u_n\}$ 单调递增；当 $f'(x)\leqslant 0$ 时，$\{u_n\}$ 单调递减．

【例 2】设 $x_1>a>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2-2ax_n+2a^2}$，$(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【例 3】证明：(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$；