非定常升力面的空气动力学

講　义

（汇编本）

601教研室编

南京航空學院

1984

非定常升力面的空气动力学讲义

（汇编本　40学时）

601教研室编

为满足当前教学的需要，本讲义是由三篇资料的有关内容汇编而成的。这三篇资料是：

〔1〕中国科技大学：《力学学习》，1973.10，

〔2〕杨岞生，陈再新，俞字勤和黄明恪合编：《空气动力学数值计算方法》，1984.7。

〔3〕Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., and Halfman, R. L., 《Aeroelasticity》, 1955.

关于资料〔2〕的有关内容，在目录中仅列出标题和该资料的页码，以减少印刷工作量。资料〔3〕的有关内容在目录中按原文标题和页码列出。

编　者　1984.12

目　录

四、二维低速和亚超音速升力面理论

一、非定常小扰动线化理论基础

本章从理想、正压流体的无旋运动基本方程出发，推导了非定常小扰动线化方程，同时在普遍的形式下求解了該方程，詳細地討論了源（汇）和偶極子的基本解。这些是进一步研究各种非定常气动力問題（包括亚、跨、超三种情形）的理論基础。

1.1 流体力学的基本方程及压力系数 C_p

本节主要叙述理想、正压流体无旋运动的基本方程。为簡便起見，書写中采用了梯度算子∇。

連續方程

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{q}=0 \tag{1}$$

运动方程（不計体积力）

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2}$$

假設流动是无旋的，即

$$\nabla\times\mathbf{q}=0 \tag{3}$$

则有速度势ϕ存在：$\mathbf{q}=\nabla\phi$，此时連續方程（1）变为

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\nabla^2\phi=0 \tag{4}$$

同时注意到

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{q}=\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{q^2}{2}\right)-\mathbf{q}\times(\nabla\times\mathbf{q})=\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)$$

运动方程可写成

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{5}$$

我們再引进正压流体的假定，即流体的压力变化仅与其密度的变化有关：$p=p(\rho)$，则有如下关系

$$\nabla\int\frac{dp}{\rho}=\frac{d}{dp}\left[\int\frac{dp}{\rho}\right]\nabla p=\frac{1}{\rho}\nabla p$$

式中ρ, p为流体的密度和压力；$\mathbf{q}$为流体速度，它在直角坐标x, y, z三个方向的分量为u, v, w；$\frac{D}{Dt}$为随体微商：$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{q}\cdot\nabla)$

于是（5）式可写成

$$\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}\right]=0$$

这样，我們就得到了运动方程（5）式的如下积分形式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}=F(t)$$

$F(t)$ 仅是时間的函数，它与空間坐标无关。我們也可把上式写成下述形式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=0 \tag{6}$$

这时方程中的 ϕ 已包含了一个与空間坐标无关的函数 $-\int F(t)\,dt$，方程(6)称为 Bernoulli 方程。

引进声速关系 $a^2=\frac{dp}{d\rho}$ 后，我們可以得到关于 ϕ 的普遍微分方程式。

对(6)式求 $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{7}$$

(5)式可改写为如下形式

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)=-\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho \tag{8}$$

(7)式 $+\mathbf{q}\cdot$(8)式

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{D\rho}{Dt}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right) \tag{9}$$

将連續方程(4)式代入上式即得我們所需之方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)=\nabla^2\phi \tag{10}$$

方程(10)在直角坐标中的展开式为

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{2uw}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}$$

$$-\frac{2vw}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{2u}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-\frac{2v}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}-\frac{2w}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{11}$$

由方程(10)和(11)式可見，若假定音速趋于无限大，則化为不可压縮流动的普遍微分方程式

$$\nabla^2\phi=0$$

或

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{12}$$

应着重說明一下，方程式(12)是具有普遍意义的，它不管流动是否定常，也不管流場中扰动的大小，都是适用的。它是不可压縮三維非定常流动的基本方程式。由此可見，不可压

縮的流动問题在数学上是比較簡单的，因为方程是綫性的。

下面推导比热比 $r=C_p/C_v$ 为常值时在等熵流动中的局部压力系数 C_p 及音速 a 的公式，推导中假定了气体是满足状态方程 $p=\rho RT$ 的完全气体。式中 R 为气体常数，T 为絕对溫度。等熵条件可写为 $p/\rho^r=$常数。常用的等熵关系有下列各式

$$a^2=r\frac{p}{\rho}=rRT$$

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{r}{r-1}\frac{p}{\rho}+\text{常数}$$

利用上述等熵关系，Bernoulli 方程(6)式可改写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\frac{r}{r-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{13}$$

假定无穷远处流动是定常的，例如 $\mathbf{q}_\infty=(U_\infty,0,0)$，$\frac{\partial\phi_\infty}{\partial t}=0$，則(13)式可写成如下形式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\frac{r}{r-1}\frac{p}{\rho}=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{r}{r-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

由上式可導出

$$p/p_\infty=\left[1-\frac{r-1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2-U_\infty^2}{2}\right)\right]^{\frac{r}{r-1}}$$

根据压力系数的定义 $C_p=(p-p_\infty)/\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2$，可得

$$C_p=\frac{2}{rM_\infty^2}\left[\left(1-\frac{r-1}{a_\infty^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2-U_\infty^2}{2}\right)\right)^{\frac{r}{r-1}}-1\right] \tag{14}$$

(13)式也可以改写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{r-1}=\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{r-1}$$

故得局部音速 a 的公式

$$a^2=a_\infty^2-(r-1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(q^2-U_\infty^2)\right] \tag{15}$$

(11)式和(15)式联立起来就是一般可压縮流动的微分方程式。

1.2 小扰动线化方程

理想正压流体无旋运动的位流方程式(11)是非綫性的，数学上很难直接处理。倘若我們研究这样一类問題，即高速运动的物体在流体中所引起的扰动速度远較物体的速度和声速为小，这时問題可化为研究扰动速度場，在略去高阶小量后，确定扰动速度势的方程将是綫性的。这种近似处理方法在近代气体力学和航空工程中具有很大意义。

設均匀来流繞流一物体，我們选取固定于物体上的直角坐标系，使 x 軸同来流 U_∞ 的方

下标“∞”表示无穷远处（或未經物体扰动）的流場。

同一致。那么均匀流場的速度在 x,y,z 三个方向的分量为 $u=U_\infty$，$v=0$，$w=0$。經物体扰动后的流場速度分量为 $u=U_\infty+u'$，$v=v'$，$w=w'$，式中 u'、v'、w' 称为扰动速度。速度势可写为 $\phi=U_\infty x+\varphi$，其中 φ 是扰动速度势，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u',\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v',\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=w'.$$

假定我們所研究的对象都是薄物体或細长体，攻角又很小，则可認为它們对均匀流場的扰动是很小的，即扰动速度 $\nabla\varphi$ 对于来流速度 U_∞ 及音速 a_∞ 来説是一个无穷小量：

$$\frac{|\nabla\varphi|}{U_\infty}\ll 1,\quad \frac{|\nabla\varphi|}{a_\infty}\ll 1.$$

同时由于流場中物理量变化的連續性要求，扰动速度对坐标的微商也应是无穷小量，即

$$\frac{\partial u'}{\partial x},\ \frac{\partial v'}{\partial x},\ \frac{\partial w'}{\partial x},\ \frac{\partial u'}{\partial y},\ \frac{\partial v'}{\partial y},\ \frac{\partial w'}{\partial y},\ \frac{\partial u'}{\partial z},\ \frac{\partial v'}{\partial z},\ \frac{\partial w'}{\partial z}\text{均}\ll U_\infty/L.$$

L 为物体的特征长度。在作了上述小扰动假定后，我們就可把速度势 ϕ 所滿足的微分方程(10)或(11)式化为扰动速度势 φ 所滿足的綫性微分方程式。

为簡便起見，我們从方程式(10)和(15)出发来进行綫化过程的分析。

$$\mathbf{q}=\nabla\phi=(U_\infty+u',v',w')$$

$$q^2=(U_\infty+u')^2+v'^2+w'^2=U_\infty^2+2U_\infty u'+|\nabla\varphi|^2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

方程式(10)的左边

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{U_\infty^2}{2}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)$$

$$+\mathbf{q}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{U_\infty^2}{2}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)$$

上式中第二项可进一步展开成

$$U_\infty\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)+\nabla\varphi\cdot\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)$$

方程式(10)的右边 $\nabla^2\phi=\nabla^2\varphi$

根据方程式(15)再来分析音速

$$a^2=a_\infty^2-(r-1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(q^2-U_\infty^2)\right]=a_\infty^2-(r-1)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right]$$

此时，方程式(10)变为

$$\frac{1}{a_\infty^2-(r-1)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)+U_\infty\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)+\nabla\varphi\cdot\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)\right\}=\nabla^2\varphi$$

在直角坐标系中展开，整理后得

$$
\begin{aligned}
&(1-M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}-\frac{2M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial u'}{\partial t}-\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\\
&=M_\infty^2\left[(r+1)\frac{u'}{U_\infty}+\frac{r+1}{2}\frac{u'^2}{U_\infty^2}+\frac{r-1}{2}\frac{v'^2+w'^2}{U_\infty^2}+\frac{(r-1)}{U_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial u'}{\partial x}\\
&+M_\infty^2\left[(r-1)\frac{u'}{U_\infty}+\frac{r+1}{2}\frac{v'^2}{U_\infty^2}+\frac{r-1}{2}\frac{w'^2+u'^2}{U_\infty^2}+\frac{(r-1)}{U_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial v'}{\partial y}\\
&+M_\infty^2\left[(r-1)\frac{u'}{U_\infty}+\frac{r+1}{2}\frac{w'^2}{U_\infty^2}+\frac{r-1}{2}\frac{u'^2+v'^2}{U_\infty^2}+\frac{(r-1)}{U_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial w'}{\partial y}\\
&+M_\infty^2\left[\frac{v'}{U_\infty}\left(1+\frac{u'}{U_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)+\frac{w'}{U_\infty}\left(1+\frac{u'}{U_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{v'w'}{U_\infty^2}\left(\frac{\partial w'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial z}\right)+\frac{2}{U_\infty}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial t}+w'\frac{\partial w'}{\partial t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

式中 $$M_\infty=U_\infty/a_\infty \tag{16}$$

(16)式的左边是綫性项，且为一阶无穷小量，而右边都是非綫性的，且为高阶无穷小量，如果略去二阶以上的无穷小量，则(16)式的右边各项均为零。但是在跨音速区域，即 $M_\infty\approx1$，根据跨音速理論分析的結果，縱向扰动速度分量(u')一般比横向扰动速度分量(v', w')为大，因此右边第一项与左边第一项具有同样的量級，这样就必須同时保留右边第一项，即

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}-\frac{2M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial u'}{\partial t}-\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=M_\infty^2(r+1)\frac{u'}{U_\infty}\frac{\partial u'}{\partial x} \tag{17}$$

这是跨音速时的小扰动方程，它仍然是非綫性的。因此在前面所說的小扰动假定下，还必須满足条件：$\dfrac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2}\dfrac{u'}{U_\infty}\ll1$ 才能导出下述小扰动綫化方程

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}-\frac{2M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial u'}{\partial t}-\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

或以扰动速度势 φ 表示

$$\left(1-\frac{U_\infty^2}{a_\infty^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{2U_\infty}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{18}$$

小扰动綫化方程(18)式的应用有其局限性，在下列几种情况下是不能应用的。

1．物体駐点附近不适用。因为在該点近旁的小区域內，扰动速度和来流速度具有相同的量級，即 $u'=-U_\infty$. 但是由于这个区域与整个物体范围比較是很小的，因而用綫化方程求得的升力系数和力矩系数等反映流体与固体間总的作用量，还是給出了滿意的結果。

2．綫化方程不适用于跨音速情况。

3．在高超音速（$M_\infty>5$）的情况下由于 M_∞ 很大，所以它們的平方与无穷小量的乘积可能已不再是无穷小量，不能忽略，因而得不到綫化方程。

方程式(18)是理想流体作等熵无旋运动时的小扰动綫化方程，被繞流的物体必須是扁平或細长的，攻角也必須很小。这个方程就是目前大多数人用来研究非定常空气动力学（包括亚音速和超音速）的理論基础。

最后，我們把方程(18)轉换到相对于流体为靜止的坐标系中（即把坐标系放在未經扰动

本上），从那里可以看到綫化小扰动方程变成了声学中声波传播的方程。由此可見，綫法是与声波理論有联系的。在綫化方法中，物体看作是微小扰动源以等速向前运动，它的綫化方程与运动声源的声波方程应該是一样的。

坐标轉換

$$x=\xi+U_\infty t,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,\quad t=t_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-U_\infty\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t_1},\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(-U_\infty\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=U_\infty^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-2U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial t_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}=-U_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial t_1}$$

(18)經上述轉換后变为波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1^2}=0 \tag{19}$$

是固定声源的声波方程。这种形式的方程已經得到了很充分的研究。对于随时間作諧和的情形 $\varphi=\varphi^* e^{i\omega t}$，方程(19)可以轉变为更簡单的諧和波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\zeta^2}+K^2\varphi^*=0 \tag{20}$$

$K=\dfrac{\omega}{a_\infty}$，$\omega$ 为圓頻率。

压力系数 C_p 即(14)式，在略去高阶无穷小量后为

$$C_p=-\frac{2}{U_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \tag{21}$$

1.3 加速度位

非定常升力面理論中經常用到一个很重要的概念，即加速度位的概念。它是从运动方程出的。本节我們要找出它在小扰动时的表达式以及它与扰动速度势 φ 之間的关系。

运动方程（2）在正压流体的假定下可写为

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt}=-\nabla\int\frac{dp}{\rho}$$

表示加速度矢量是由函数 $-\int\frac{dp}{\rho}$ 的梯度来确定的，因而可以定义一个加速度位

$$\Psi=-\int\frac{dp}{\rho}$$

然加速度位 Ψ 可以包含一个任意常数。根据等熵关系 $\int\frac{dp}{\rho}=\frac{1}{r-1}(a^2-a_\infty^2)$ 可得：

$$\Psi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty u'+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 \tag{22}$$

另方面按照小扰动的概念，流場中密度的变化是一个无穷小量即 $\rho=(1+s)\rho_\infty$，s 是一个无穷小量。这时 $\int\frac{dp}{\rho}$ 可写成 $\frac{p-p_\infty}{\rho_\infty}+\frac{s'(p-p_\infty)}{\rho_\infty}$，扰动压力 $(p-p_\infty)$ 及 s' 均为无穷小量。若記 $p-p_\infty$ 为 p，并在上述关系式中略去高阶无穷小量，則可得如下关系

$$\psi=-\frac{p}{\rho_\infty}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{23}$$

由此可見，扰动加速度位 ψ 与扰动压力 p 成正比，故又称作压力位。它在亚音速流場中，除了升力面的地方外处处連續，但在超音速流場中，在馬赫錐面上也可能不連續。从公式(23)还可得出这样的結論：扰动加速度位 ψ 应同样滿足关于 φ 的微分方程式，即

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{2U_\infty}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

这可将(23)式代入(18)式而得到驗証。

在升力面理論中通常是先得出 ψ 的解，然后再求 φ，所以把公式(23)反轉过来是必要的。对公式(23)中的变量 t 进行拉普拉斯变换，求解一阶綫性微分方程，并利用延迟定理可得到下式

$$\varphi=\frac{1}{U_\infty}\int_{-\infty}^{x}\psi\left(x',y,z,t-\frac{x-x'}{U_\infty}\right)dx'$$

或者，

$$\varphi=-\frac{1}{\rho_\infty U_\infty}\int_{-\infty}^{x}p\left(x',y,z,t-\frac{x-x'}{U_\infty}\right)dx' \tag{24}$$

对于諧和振动情况 $\varphi=\varphi^*e^{i\omega t}$，$p=p^*e^{i\omega t}$，有

$$\varphi^*(x,y,z)=-\frac{1}{\rho_\infty U_\infty}e^{-\frac{i\omega x}{U_\infty}}\int_{-\infty}^{x}p^*(x',y,z)e^{\frac{i\omega x'}{U_\infty}}dx' \tag{25}$$

1.4 边界条件及其线化[1]

貼近物体表面上的流体質点只能沿物面流动，这是流体繞流物体时必須遵守的物面边界条件。設 $F(x,y,z,t)=c$ 为物面方程，c 为物面参数。与物面相接触的流体質点将始終沿該物面运动，这些流体質点所在的曲面其参数显然为物面的参数 c。这样的边界条件可用下式来表示

$$\frac{DF}{Dt}=0 \tag{26}$$

$\frac{D}{Dt}$ 为随体微商（随同流体質点移动时的变化率）。(26)式亦可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(\nabla\phi\cdot\nabla)F=0$$

小扰动的假定对物体的物面方程有限制，对于机翼来說，要求机翼是薄翼和小攻角，否

則机翼对流場的扰动就不是小扰动。对于薄翼小攻角，其物面法綫的方向余弦有如下特点：

$$\frac{\partial F}{\partial x}\approx\frac{\partial F}{\partial y}\ll\frac{\partial F}{\partial z}$$

現把边界条件(26)式展开

$$\frac{\partial F}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

略去高阶无穷小量后

$$\frac{\partial F}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

設物面方程为 $z=z(x,y,t)$，即 $F=z-z(x,y,t)=0$

則
$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{\partial z}{\partial t},\quad\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x},\quad\frac{\partial F}{\partial z}=1,$$

另外
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=w,$$

代入前面的关系式后得綫化的物面边界条件

$$w(x,y,z,t)=\frac{\partial z}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z}{\partial x}$$

上式还可进一步簡化。因为物面很薄，z 是一个无穷小量，物面上的法向扰动速度（又称升力面的法向洗流）$w(x,y,z,t)$可在 $z=0$ 处展成 z 的泰劳級数

$$w(x,y,z,t)=w(x,y,o,t)+\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}z+\cdots\cdots\approx w(x,y,o,t)$$

最后綫化的物面边界条件为

$$w(x,y,o,t)=\frac{\partial z}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z}{\partial x}\qquad(27)$$

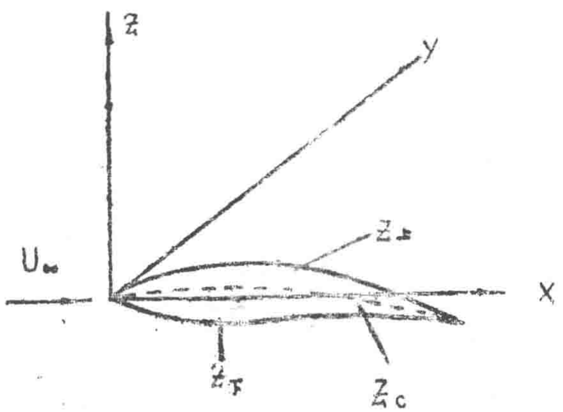

图 1 平面薄翼

这就是說，綫化的物面边界条件是在(x,y)平面中提出的，升力面被近似地假定在(x,y)平面里(图1)。現設机翼的中綫表面为 $z_c(x,y,t)$，上表面为 $z_上$，下表面为 $z_下$，标志机翼厚度的表面为 z_t 則有

$$\begin{cases}z_c=\dfrac{1}{2}(z_上+z_下)\\[2ex] z_t=\dfrac{1}{2}(z_上-z_下)\end{cases}\qquad\begin{cases}z_上=z_c+z_t\\[2ex] z_下=z_c-z_t\end{cases}$$

于是上、下表面的边界条件可写为

$$w(x,y,\pm o,t)=\left(\frac{\partial z_c}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z_c}{\partial x}\right)\pm\left(\frac{\partial z_t}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z_t}{\partial x}\right)$$

$$=w_c(x,y,o,t)\pm w_t(x,y,o,t)\qquad(28)$$

这样机翼問題就可化为反对称問題和对称問題分别求解

上表面＝反对称問題＋对称問題

下表面＝反对称問題－对称問題

反对称問題考虑了机翼的弯度和角攻，对称問題則考虑了机翼的厚度。另外我們注意到，若机翼厚度不随时間而变化（例如刚性翼）$\frac{\partial z_t}{\partial t}=0$，則(28)式变为

$$w(x,y\pm 0,t)=\left(\frac{\partial z_c}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z_c}{\partial x}\right)\pm U_\infty\frac{\partial z_t}{\partial x}$$

此时（刚性翼的）非定常运动就可看成由弯度机翼的非定常运动和厚度机翼的定常运动所組成。所以一般来說我們仅需研究弯度机翼的非定常运动就够了。特别是研究机翼的气动載荷問題更是如此。

下面专就机翼的弯度問題进行討論

設反对称机翼的物面方程为

$$z=z(x,y,t)$$

物面边界条件为

$$w(x,y,o,t)=\frac{\partial z}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial z}{\partial x}$$

从上式可知：由于弯度机翼上、下表面的方程 z 是一样的（$z_{上}=z_{下}$），所以弯度机翼上、下表面的法向洗流 w 是一样的（$w_+=w_-$）即 $w(x,y,+o,t)=w(x,y,-o,t)$，故 w 是 z 的偶函数，φ 就为 z 的奇函数：

$$\begin{cases}w(x,y,z,t)=w(x,y,-z,t)\\ \varphi(x,y,z,t)=-\varphi(x,y,-z,t)\end{cases}$$

同时亦可推知扰动加速度位 ψ 或扰动压力 p 也是 z 的奇函数。因此在 $z=0$ 的平面上除去升力面所在地方外，由于連續性的要求它們都应等于零，而在升力面上不等于零，且升力面上、下表面的压力差为

$$\begin{aligned}P=p_{上}-p_{下}&=p(x,y,+0,t)-p(x,y,-o,t)\\&=2p(x,y,+o,t)\\&=-2\rho_\infty\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\end{aligned}\tag{29}$$

在解决問題时，除了上面的物面条件外，还必須用到其他一些边界条件。現綜述如下：z 等于零的 (x,y) 平面上（升力面所在平面）

1．在升力面上（即机翼上）用公式(29)式

2．翼前 $\varphi=0$，$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$

3．翼后的尾渦面，可令(29)式等于零。因为尾渦面上、下的压力应相等，它是不能承載的。

4．后緣或其他边緣，也应視作边界条件的一部分，应滿足前述三条中的一条。

无穷远处的边界条件則为扰动速度 $\nabla\varphi$ 趋于零。

1.5 格林公式

在处理某些数学物理方程时，經常用到一些格林公式。这里先給出一般形式的格林公式[2]，然后再給出关于拉普拉斯方程和双曲方程的格林公式。

一般形式的格林公式

設有两个函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，它們在区域 V 内及其界面 S 上有一阶連續导数，在 V 内有二阶連續导数；另有两算符 L,M 为下述伴随算符

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+2a_{13}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}$$

$$+2a_{23}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+b_3\frac{\partial}{\partial z}+c$$

$$M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}a_{11}(\ \ )+\frac{\partial^2}{\partial y^2}a_{22}(\ \ )+\frac{\partial^2}{\partial z^2}a_{33}(\ \ )+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}a_{12}(\ \ )+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}a_{13}(\ \ )$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}a_{23}(\ \ )-\frac{\partial}{\partial x}b_1(\ \ )-\frac{\partial}{\partial y}b_2(\ \ )-\frac{\partial}{\partial z}b_3(\ \ )+c(\ \ )$$

則必存在函数 X,Y,Z

$$X=a_{11}(vu_x-uv_x)+a_{12}(vu_y-uv_y)+a_{13}(vu_z-uv_z)$$
$$+\left(b_1-\frac{\partial a_{11}}{\partial x}-\frac{\partial a_{12}}{\partial y}-\frac{\partial a_{13}}{\partial z}\right)uv$$

$$Y=a_{12}(vu_x-uv_x)+a_{22}(vu_y-uv_y)+a_{23}(vu_z-uv_z)$$
$$+\left(b_2-\frac{\partial a_{12}}{\partial x}-\frac{\partial a_{22}}{\partial y}-\frac{\partial a_{23}}{\partial z}\right)uv$$

$$Z=a_{13}(vu_x-uv_x)+a_{23}(vu_y-uv_y)+a_{33}(vu_z-uv_z)$$
$$+\left(b_3-\frac{\partial a_{13}}{\partial x}-\frac{\partial a_{23}}{\partial y}-\frac{\partial a_{33}}{\partial z}\right)uv$$

它們滿足下述公式

$$\iiint_V (vLu-uMv)\,dV=\iint_S\{X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)+Z\cos(n,z)\}dS \tag{30}$$

$\mathbf{n}$ 为界面 S 的外法綫方向。这就是三維情形下一般形式的格林公式。

对于拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=f$ 有算符 L：

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我們来推导相应的格林公式。显然此时伴随算符 M 是 L 的自伴算符即 $M=L$，另外有

$$\begin{cases}X=vu_x-uv_x\\ Y=vu_y-uv_y\\ Z=vu_z-uv_z\end{cases}$$

代入公式(30)式得

$$\iiint\limits_V (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\,dV = \iint\limits_S \{(vu_x - uv_x)\cos(n,x) + (vu_y - uv_y)\cos(n,y)$$

$$+ (vu_z - uv_z)\cos(n,z)\}dS = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \tag{31}$$

对于双曲方程 $\Box^2 u = f$ 有算符 L：

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

我們来推导相应的格林公式。显然伴随算符M也是自伴的即 $M = L$. 另外有

$$X = vu_x - uv_x$$

$$Y = -(vu_y - uv_y)$$

$$Z = -(vu_z - uv_z)$$

代入(30)式得

$$\iiint\limits_V (v\Box^2 u - u\Box^2 v)dV = \iint\limits_S \{vu_x - uv_x)\cos(n,x) - (vu_y - uv_y)\cos(n,y) -$$

$$-(vu_z - uv_z)\cos(n,z)\}dS = \iint\limits_S \{v[u_x\cos(n,x) - u_y\cos(n,y) - u_z\cos(n,z)] -$$

$$-u[v_x\cos(n,x)\cdots]\}dS = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dS \tag{32}$$

ν 是界面 S 的助法綫方向。它定义如下：助法綫 ν 的方向余弦 ν_1, ν_2, ν_3 分别滿足下述关系，$\nu_1 = n_1, \nu_2 = -n_2, \nu_3 = -n_3$. n_1, n_2, n_3 为界面 S 的外法綫 $\mathbf{n}$ 的方向余弦。表面 S 上任一点 (x_1, y_1, z_1) 的助法綫是該点的負法綫在 $x = x_1$ 平面中的映象。

1.6 基 本 解

本节主要討論方程(18)和(19)的基本解。方程(19)的基本解相应于固定的声学源点和偶极点，方程(18)的基本解相应于运动的声学源点和偶极点。我們首先討論方程(19)的基本解，并以此为基础进一步推导出方程(18)的基本解。同时也討論它們的物理意义。

1.6.1 声波方程(19)的通解

声波方程(19)可写成如下形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{19}$$

或

$$\nabla^2 u - \frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

在球坐标中(r, θ, φ)，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$u=u(r,\theta,\varphi,t)=u(M,t)$，$M(r,\theta,\varphi)$为球坐标中的任意一点。

現在我們来求 $t=t_0$ 时在点 $M_0(r_0,\theta_0,\varphi_0)$处 u 的值 $u(M_0,t_0)=u(r_0,\theta_0,\varphi_0,t_0)$。$M_0$ 是以 S 为界面的区域 V 内的任一点。先把坐标原点放在 M_0 上，并作如下变换

$$\begin{cases} t^*=t-\left(t_0-\dfrac{r}{a_\infty}\right), & r \text{ 为任意点} M \text{ 到 } M_0 \text{ 之間的距离 } r_{MM_0}\text{ 显然：} \underset{M\to M_0}{r\longrightarrow 0} \\ r^*=r, \\ \theta^*=\theta, \\ \varphi^*=\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(M,t)=U(M^*,t^*) \\ u(r,\theta,\varphi,t)=U(r^*,\theta^*,\varphi^*,t^*) \end{cases}$$

$$S^*=S, \qquad V^*=V$$

$$u_r=U_{r^*}+\frac{1}{a_\infty}U_{t^*} \qquad u_{rr}=U_{r^*r^*}+\frac{2}{a_\infty}U_{t^*r^*}+\frac{1}{a_\infty^2}U_{t^*t^*}$$

$$u_\theta=U_{\theta^*} \qquad u_{\theta\theta}=U_{\theta^*\theta^*}$$

$$u_\varphi=U_{\varphi^*} \qquad u_{\varphi\varphi}=U_{\varphi^*\varphi^*}$$

$$u_t=U_{t^*} \qquad u_{tt}=U_{t^*t^*}$$

經过代换后波动方程变为

$$\nabla^2U(r^*,\theta^*,\varphi^*,t^*)=-\frac{2}{a_\infty r^*}\cdot\frac{\partial}{\partial r^*}(r^*U_{t^*})$$

它可視作非齐次的拉普拉斯方程，方程中的 t^* 可看作参数。这样我們就可利用格林公式来求解这个非齐次的拉普拉斯方程。

我們假設一个函数 $v=\dfrac{1}{r^*}$，显然它仅在 M_0^* 处无定义，此外到处都有二阶連續导数。若围繞 M_0^* 作一个半径为 ε 的小球 S_ε^*，則在区域 $V^*-V_\varepsilon^*$ 内可应用格林公式(31)式。

$$\iint\limits_{S^*+S_\varepsilon^*}\left\{\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right\}dS^*=\iiint\limits_{V^*-V_\varepsilon^*}\left\{\frac{1}{r^*}\nabla^2U-U\nabla^2\left(\frac{1}{r^*}\right)\right\}dV^*$$

因为

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r^*}\right)\equiv 0,$$

又

$$\iiint\limits_{S_\varepsilon^*}\left\{\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right\}dS^*=\iint\limits_{S_\varepsilon^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n}dS^*-\iint\limits_{S_\varepsilon^*}\frac{U}{r^{*2}}dS^*\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}-4\pi U(M_0^*,t^*)$$

$$\iiint\limits_{V_\varepsilon^*}\frac{1}{r^*}\nabla^2U\,dV^*\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$$

所以

$$U(M_0^*,t^*)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{S^*}\left\{\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right\}dS^*-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V^*}\frac{1}{r^*}\nabla^2U\,dV^*$$

另外，

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V^*}\frac{1}{r^*}\nabla^2 U\,dV^*=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V^*}\frac{2}{a_\infty r^{*2}}\ \frac{\partial}{\partial r^*}(r^*U_{t^*})\,dV^*$$

$$=\frac{2}{4\pi a_\infty}\iint\limits_{S^*}\sin\theta^*\,d\theta^*\,d\varphi^*\int_0^{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^* U_{t^*})\,dr^*$$

$$=\frac{2}{4\pi a_\infty}\iint\limits_{S^*}\frac{1}{r^*}U_{t^*}\cos(n,r^*)\,dS^*=\frac{2}{4\pi a_\infty}\iint\limits_{S^*}\frac{1}{r^*}U_{t^*}\frac{dr^*}{dn}\,dS^*$$

最后得：

$$U(M_0^*,t^*)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S^*}\left\{\frac{1}{r^*}\ \frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)+\frac{2}{a_\infty r^*}U_{t^*}\frac{dr^*}{dn}\right\}dS^*$$

現在我們把它反轉到原来坐标中，注意到：

$$U(M^*,t^*)=u(M,t),\qquad t^*=t-\left(t_0-\frac{r_{MM_0}}{a_\infty}\right)$$

当 $M^*\to M_0^*$，$t^*\to 0$ 时，$M\to M_0$，$t\to t_0$，$U(M_0^*,0)=u(M_0,t_0)$. 又

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{1}{a_\infty}\ \frac{\partial U}{\partial t^*}\ \frac{dr^*}{dn}$$

所以最后得

$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{a_\infty r}[u_t]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}dS.$$

式中[ ]表示其中的函数应取 $t^*=0$ 时的值，即取 $t=t_0-\frac{r_{MM_0}}{a_\infty}$ 时的值。去掉下标“0”后即获一般的表达式

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{a_\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}dS \tag{33}$$

式中，在[ ]内的函数应取 $t-\frac{r}{a_\infty}$ 时的值。这就是声学方程的通解，又称 Kirchhoff 公式。它表示区域 V 内任一点 M 处的 $u(M,t)$ 是由 $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]$，$[u]$，及 $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$ 在界面 S 上的分布来决定的。公式中的第一项表示源(汇)基本解，第二、三项合起来表示偶极子基本解。$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]$ 及 $[u]$ 在穿越界面 S 时是不連續的，其間断值（跳跃值）分别表示源（汇）及偶极子的面分布强度。下面将詳細地分析源（汇）及偶极子的物理意义，并着重討論它們的面分布情形。应当重复地指出：(33) 式积分中的 $[u]=u\left(x_0,y_0,z_0,t-\frac{r}{a_\infty}\right)$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$(x_0,y_0,z_0)$ 为界面 S 上的点，(x,y,z) 为区域 V 内的任意一点 M，$\frac{\partial}{\partial n}$ 是对 (x,y,z) 求导数的。