高等院校经济管理类专业　经济数学基础系列教材

线性代数学习指导与同步习题解答

熊波　主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材

线性代数
学习指导与同步习题解答

熊 波 主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与同步习题解答／熊波主编. —北京：中国财政经济出版社，2018.3
高等院校经济管理类专业. 经济数学基础系列教材
ISBN 978-7-5095-8084-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 042187 号

责任编辑：赵 力 吕小军　　　　责任校对：胡永立
封面设计：思梵星尚

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100142
营销中心电话：010-88191537 北京财经书店电话：64033436 84041336
北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销
787×1092 毫米 16 开 10.25 印张 246 000 字
2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月北京第 1 次印刷
定价：38.00 元
ISBN 978-7-5095-8084-4
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010-88190744
打击盗版举报热线：010-88191661 QQ：2242791300

前　　言

—— Preface ——

数学作为自然科学的重要分支在经济学与管理学领域得到日益广泛的应用，微积分、线性代数、概率论与数理统计是经济管理类专业的重要基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助、指导广大读者学好这三门课程，我们编写了这套与中国财政经济出版社出版的《经济数学基础系列教材》完全配套的《学习指导与同步习题解答》，以使读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，提高数学思维水平及应试能力。本书既是学习的指导书，也是备考硕士研究生的应试指南。

本系列辅导书共分三本《微积分学习指导与同步习题解答》、《线性代数学习指导与同步习题解答》、《概率论与数理统计学习指导与同步习题解答》。章节的划分与内容设置与中国财政经济出版社出版的《经济数学基础系列教材》教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识点进行简要的概括，然后通过对精选例题的分析，归纳解题方法的技巧，总结规律，最后是教材习题详解。

每章由六部分有机组合而成：

一、基本要求：根据课程教学大纲，提出对每一章基本知识点的具体要求，指出重点、难点。

二、内容提要：对每一章所学的知识进行系统的回顾，对基本概念、基本定理进行系统梳理。

三、典型例题：这一部分是每一章的核心内容，编者基于多年的教学经验和对历年研究生考试试卷试题的研究，归纳出与该章内容相关的基本题型，针对每一种题型，整理出大量经典例题进行深入分析与讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能熟练运用于解题中。

四、教材习题解答：为了方便读者对课本知识进行复习巩固，本书对教材中的全部习题作了详细解答，有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

五、综合自测题：在每一章的最后，编者精心编写出部分习题，这些题目难易适当，能比较准确地反映学习该章的基本要求，通过自测题的测试，可以有效地检验学生本章知识点的掌握和熟练程度。

六、自测题参考答案。

本系列丛书题型广泛，内容丰富，涵盖了经济数学的主要内容，读者可以加深对经济数学基本内容的理解，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律，提高解题和应试能力。

此次出版的《线性代数学习指导与同步习题解答》由熊波主编，编写分工为：朱小武

编写第一、第二章；程水林编写第三、第四章；李娟编写第五、第六章。

本丛书博采众家之长，参考了多本同类书籍，在此向这些书籍的编者表示感谢。由于我们的水平有限，书中仍难免有一些错误和问题，恳请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

2018 年 1 月

目　　录

Contents

第1章

行 列 式

行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的，在本课程中它是研究矩阵、线性方程组、向量的线性相关性等内容的重要工具，是线性代数的基础内容。此外，行列式在数学的其他许多分支比如微积分、几何学、多项式理论中都有广泛的应用。

一、基本要求

熟练计算 n 级排列的逆序数；理解行列式的定义；熟练应用行列式的性质化简行列式，尤其是“三角化”方法；理解行列式的子式、余子式、代数余子式定义，灵活应用行（列）展开定理计算行列式；应用克莱姆法则判定线性方程组解的存在性、唯一性并求解具有 n 个方程的 n 元线性方程组。

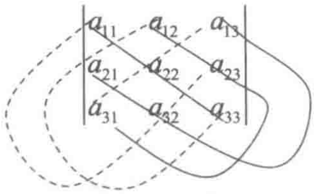
二、内容提要

（一）二阶与三阶行列式

可用对角线法则分别描述如下：

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式：



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则只适用于二、三阶行列式。

（二）排列及其逆序数

n 级排列：由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 排成的一个有序数组。

一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面，即 $i_t > i_s$（$s > t$）时，就称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序。一个排列的逆序的总数称为这个排列的逆序数。记为 $t(i_1i_2\cdots i_n)$。

逆序数的性质：任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性发生改变。

（三）n 阶行列式的定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

其中 $t(j_1j_2\cdots j_n)$，$t(i_1i_2\cdots i_n)$ 分别为 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 和 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数；和式是对自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有可能的 n 级排列所对应的乘积项求代数和。

更一般地，n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的任意项可以写成

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列。

（四）三角行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

（五）行列式的性质

性质 1 将行列式 D 的行列互换，其值不变，即 $D=D^T$。

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值反号。

推论：若行列式中的两行（列）完全相同，则行列式的值为零。

性质 3 行列式某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于数 k 乘以此行列式。

推论：

(1) 行列式中一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式的外面；

(2) 若行列式中一行（列）所有元素为零，则行列式的值为零；

(3) 若行列式中两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值为零。

性质 4 若行列式某行（列）的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和。其中两个行列式的这一行（列）的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行（列）的元素与原行列式相同。

性质 5 行列式 D 的某一行（列）的所有元素乘以数 k 加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变。

（六）行列式按一行（列）的展开定理及其推论

定理：n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

推论：n 阶行列式的任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应的代数余子式的乘积之和为零，即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \quad (i\neq s)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \quad (j\neq t)$$

更一般的，有

拉普拉斯展开定理：在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，任意取 k 行（$1\leqslant k\leqslant n$），由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D，即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,(t=C_n^k)$$

其中 A_i 是子式 M_i（$i=1,2,\cdots,t$）对应的代数余子式。

如，利用拉普拉斯展开定理有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

（七）范得蒙（Vandermonde）行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\qquad(n\geqslant 2)$$

（八）克莱姆（Cramer）法则

若含有 n 个方程的 n 元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列元素 a_{1j},a_{2j}，…，a_{nj} 换成方程组右端常数项 b_1,b_2，…，b_n，其余元素不变的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

该法则的一个推论：如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解，那么其系数行

列式 $D=0$。

三、典型例题

题型一：关于行列式及其子式、余子式、代数余子式相关定义的计算问题

[例 1.1] 计算 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数。

分析：关于行列式展开式中某项的计算，应当紧扣定义，再结合观察，这也是掌握行列式性质的出发点。

解：本题中，只有对角线上元素相乘才出现 x^4，且这一项带正号，故 x^4 的系数为 2. 含 x^3的项也只有一项，即 $(-1)^{t(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x=(-1)\cdot x^3$，故 x^3 的系数为 -1。

[例 1.2] 设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$，求 (1) $2A_{11}+3A_{12}+4A_{13}+5A_{14}$；

(2) $A_{23}+A_{24}$；(3) $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$。其中 A_{ij},M_{ij}分别指代第 i 行第 j 列元素的代数余子式、余子式。

分析：行列式的子式、余子式、代数余子式是研究行列式的重要手段，应清楚它们之间的区别及联系。特别需要注意的是，改变行列式的某行（列）的元素，则新元素的代数余子式或余子式与原来相应元素的保持一致。另外，前述概念结合行列式的展开定理是计算行列式的重要手段。

解：(1) $2\cdot A_{11}+3\cdot A_{12}+4\cdot A_{13}+5\cdot A_{14}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-12$

(2) $A_{23}+A_{24}=0\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=0$

(3) $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}=1\cdot A_{31}+(-1)\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+(-1)\cdot A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=18$$

［例 1.3］设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&0&0&\cdots&0&2\\1&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&n-1&\cdots&0&0\\1&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$，求其第一行元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}\cdots+A_{1n}$。

分析：注意到改变行列式的某行（列）的元素，则新元素的代数余子式或余子式与原来相应元素的保持一致。只需将原行列式的第一行同时换成 1，结合行列式按列的展开定理，则新行列式的值即为原来第一行元素的代数余子式之和。

解：将原行列式的第一行同时换成 1，则有

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&2\\1&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&n-1&\cdots&0&0\\1&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

对右端的行列式，从第 n 列开始，依次将第 i 列的 $\dfrac{-1}{n+2-i}$ 倍加到第一列

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&2\\1&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&n-1&\cdots&0&0\\1&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}&1&1&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&2\\1&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&n-1&\cdots&0&0\\1&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}&1&1&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&2\\0&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&n-1&\cdots&0&0\\1&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}&1&1&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&2\\0&0&0&\cdots&3&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\0&0&n-1&\cdots&0&0\\0&n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

再将得到的行列式按第一列展开，则有

$$=(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&2\\0&0&0&\cdots&3&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\0&n-1&0&\cdots&0&0\\n&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})\,n!$$

即为所求。

题型二：证明关于行列式的等式或计算行列式

[**例 1.4**] 证明 $\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$。

分析：关于行列式等式的证明，实质上是利用行列式的性质进行转化。

证明：等式左端为 $\begin{vmatrix}b&c+a&a+b\\b_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\b_1&c_1+a_1&a_1\\b_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\c_1&a_1&a_1+b_1\\c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$$ 证毕。

小结：需注意严格按照行列式性质 4 展开，尤其是当行列式中有两行（列）都表现为和式的时候。

[**例 1.5**] 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&1&1&\cdots&1\\1&a_2&0&\cdots&0\\1&0&a_3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2,$且 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$。

分析：该行列式呈爪形，它与［例 1.3］中处理的三角形行列式都是常见的行列式形状，需要非常熟练地计算。对本例中的爪形行列式，只需依次将第 j 列 $(j=2,3,\cdots,n)$ 的 $-\frac{1}{a_j}$倍依次加到第一列，则得到标准的上三角行列式。

解：$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{1}{a_j}c_j,j=2,3,\cdots,n} \begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$=a_2a_3\cdots a_n(a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{a_j})$$

[例 1.6] 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$。

分析：对于零元素比较多的行列式，可以考虑用利用行列式的展开定理或先交换行列式的行（列）来获得容易计算的行列式形状。

解：按第一列展开得到

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

小结：在将行列式展开后，要注意行列式阶数的变化。

[例 1.7] 用数学归纳法证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},\quad (n\geqslant 2,\ a\neq b)$$

分析：关于一般的 n 阶行列式等式的证明，在数学归纳法递推过程中，主要用到前述性质 4 以及行列式按行（列）的展开定理。

证明：当 $n=2$ 时结论显然成立。假设当 $n=k-1$ 时结论成立，即 $D_{k-1}=\dfrac{a^k-b^k}{a-b}$。下面证明 $n=k$ 时也成立。事实上，

$$D_k=\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

对上述第一个行列式，从第一列开始乘以（$-b$）加到第二列，再将得到的新的第二列乘以（$-b$）加到第三列，依次实施到最后一列。根据性质5，行列式的值不变。即

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$=a^k+bD_{k-1}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$，即对 $n=k$ 时也成立。证毕。

［例 **1.8**］ 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$。

分析：对于复杂行列式利用性质5时，要仔细观察后再制定变形次序。

解：依次将第 $n-1$ 列的 -1 倍加到第 n 列，再将第 $n-2$ 列的 -1 倍加到第 $n-1$ 列，…，第1列的 -1 倍加到第2列，将得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

再将第1行依次加到其他行，可得

$$D_n \overset{r_j+r_1}{\underset{j=2,3,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将上述行列式的第一列依次与其后面的列共做$(n-1)$次交换，可得如下上三角形行列式

$$=(-1)^{(n-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$$

[例 1.9] 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_{n-1}+1 & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_{n-1}^2+x_{n-1} & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-1}+x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$，$(n\geqslant 2)$。

分析：与范得蒙行列式相关的行列式计算有显著的结构，即出现同一个量的各个幂次。需通过利用行列式的性质，将其转化为标准的范德蒙行列式才能得到最后的结果。

解：本题中，从第一行开始，将它的(-1)倍加到第二行，再将得到的新的第二行的(-1)倍加到第三行，依此下去，将得到标准的 n 阶范德蒙行列式。所以 $D_n=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}^{n}(x_i-x_j)$。

题型三：克莱姆法则在线性方程组求解中的应用

[例 1.10] 当 a,b 取什么值时，齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+bx_2+x_3=0 \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$

（1）只有零解？

（2）有非零解？

分析：克莱姆法则在判定方程组非零解的存在性问题中具有基础性地位，其应用的关键还是在于行列式的计算。

解：方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-b(a-1)$$

由克莱姆法则可得：（1）当 $D\neq 0$，即 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，原方程组只有零解；（2）当 $D=0$，即 $a=1$ 或 $b=0$ 时，原方程组有非零解。

小结：应当注意到，尽管克莱姆法则仅能直接用于讨论含 n 个方程的 n 元线性方程组的解，但在后面章节中关于一般线性方程组解的讨论最后也是基于克莱姆法则的。