TURING 图灵新知

惰者集

数感与数学

怠け数学者の記

[日]小平邦彦 著
尤斌斌 译
Kunihiko Kodaira

工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

惰者集
数感与数学

[日]小平邦彦——著
尤斌斌——译

Kunihiko Kodaira

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

惰者集：数感与数学 /（日）小平邦彦著；尤斌斌译. -- 北京：人民邮电出版社，2017.12
（图灵新知）
ISBN 978-7-115-46993-9

Ⅰ. ①惰… Ⅱ. ①小… ②尤… Ⅲ. ①数学－普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第240877号

内 容 提 要

理解数学需要具备一种纯粹的感觉，即“数感”。本书为日本著名数学家、菲尔兹奖得主小平邦彦先生的随笔文集，书中收录了小平邦彦先生对数学、数学教育的深思、感悟文章，记述了数学大师对“数学”“数感”的独到理解，文笔幽默，深入浅出。同时，书中还辑录了小平邦彦先生在普林斯顿高等研究院时期，与赫尔曼·外尔等大师交流的趣闻轶事，对深入理解数学、数学教育具有深刻启示。

◆ 著　　　[日]小平邦彦
　译　　　尤斌斌
　责任编辑　武晓宇
　装帧设计　broussaille私制
　责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
　印张：7.625
　字数：156千字　　　　2017年12月第1版
　印数：1－4 000册　　　2017年12月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2017-4049号

定价：46.00元

读者服务热线：(010)51095186转600　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字20170147号

序言

1949年8月，我应普林斯顿高等研究院的赫尔曼·外尔（Hermann Weyl）教授之邀赴美，离开了当时满目疮痍的东京。最初的计划是在普林斯顿高等研究院逗留一年，次年返回日本。不料留美时间延长，第三年又邀请家人赴美，一住就是18年。1967年8月返回日本后，我偶尔会写些随笔文章，参加演讲，本书即这些随笔文章和演讲记录的文集。

这本文集中，唯一的例外内容是《来自普林斯顿的信件》。当时在东京，人们都住在建于废墟之中的棚屋里，三餐粮食紧缺。然而，当时的美国治安良好、物价便宜，对于初来乍到的我来说，是一个极其美好的国家。刚开始我不太会讲英语，不过普林斯顿高等研究院配有优秀的秘书，无需我过多解释，秘书即可明白我的心思，并且麻利地帮我将所有事务处理妥当，这一切都让我误以为自己住进了“精灵之国”。《来自普林斯顿的信件》便是旅居“精灵之国”的我给远在日本的妻子寄去的家书，当然其中删除了个人隐私以及谈论他人等不合适的内容。

1975 年 10 月 30 日、31 日，日本通商产业省（现经济产业省）和机械振兴会协力召开了历时两天的国际研讨会“产业与社会——推动进步的条件”。《科学、技术与人类进步》这篇文章记录了我当时在会上发表的演讲。那时候尚未为人熟知的“核冬天”假说已经表明了人类正面临着灭绝危机。我在本书《科学、技术与人类进步》一文的“备注”部分补充了这方面的相关内容。

1982 年年底，我参加了日本中央教育审议会教育内容等小委员会的讨论并在会上提出个人意见，《忘却原则的初等、中等教育》是对当时所提意见的详细说明。这篇文章的“补充部分”则为 1985 年 8 月，我在“数学教育大会”上的演讲的重点内容。

1955 年，我的大女儿在普林斯顿上初中时，不幸被编入了使用 SMSG（School Mathematics Study Group，学校数学研究小组）教材的“新数学”（New Math）运动[1]教育实验年级。以“新数学”运动为首的数学教育现代化理念，随即开始在全世界范围内流行。在美国，只有一部分的数学家和教育学家在推广数学教育现代化理念，而绝大部分的数学家对此表示反对。然而不知为何，绝大部分的反对声音并未传入日本。进入 20 世纪 40 年代后，日本文部省的指导纲领大规模引进现代化理念，日本的小学也开始讲解集合论知识。因为我经常辅导女儿的“新数学”课程的作业，也由此亲身体会到数学教育现代化理念的愚蠢，所以只要有机会，我便会写一些随笔文章

---

1 20 世纪 50 年代末，美国推行的数学教育现代化运动，也称为“新数运动”。数学教育现代化运动主张以结构主义思想改革数学教育，在初等教育中就学习现代数学公理化的精确数学体系。——编者注

来批判数学教育现代化。本以为日本文部省既然认定了数学教育现代化理念，短时间内也不会改变方针。然而，20 世纪 50 年代，日本文部省修改了指导纲领，大幅减缓了数学教育现代化改革的力度。因为日本的数学教育现代化改革并不是依附于一种坚定的信念，只不过是追赶美国的流行而已。虽然数学教育现代化改革被及时修正，但被数学教育现代化改革驱逐出数学教材的欧几里得平面几何却再也无法重获新生。这也许是数学教育现代化理念带来的最致命的后遗症。我在本书的第二章选录了《对“新数学”运动的批判》《什么扭曲了数学教育》和《令人费解的日本数学教育》三篇随笔，以此作为我反对数学教育现代化改革的代表性观点。

小平邦彦

目录

第一章

数学笔记

在我看来，数学书（包括论文）是最晦涩难懂的读物。将一本几百页的数学书从头到尾读一遍更是难上加难。翻开数学书，定义、公理扑面而来，定理、证明接踵而至。数学这种东西，一旦理解则非常简单明了，所以我读数学书的时候，一般都只看定理，努力去理解定理，然后自己独立思考数学证明。不过，大多数情况下都是百思不得其解，最终只好参考书中的证明。然而，有时候反复阅读证明过程也难解其意，这种情况下，我便会尝试在笔记本中抄写这些数学证明。在抄写过程中，我会发现证明中有些地方不尽如人意，于是转而寻求是否存在更好的证明方法。如果能够顺利找到还好，若一时难以觅得，则多会陷入苦思，至无路可走、油尽灯枯才会作罢。按照这种方法，读至一章末尾，已是月余，开篇的内容则早被忘到九霄云外。没办法，只好折返回去从头来过。之后，我又注意到书中整个章节的排列顺序不甚合理。比如，我会考虑将定理七的证明置于定理三的证明之前的话，是否更加合适。于是我又开始撰写调整章节顺序的笔记。完成这项工作后，我才有真正掌握第一章的感觉，终于松了一口气，同时又因太耗费精力而心生烦扰。从时间上来说，想要真正理解一本几百页的数学书，几乎是一件不可能完成的任务。真希望有人告诉我，如何才能快速阅读数学书。

也许有人会不解，何必要如此左思右想，直接读到最后一页不就好了？话虽如此，不过这样会存在一个问题。在数学书中，如果是与我的专业关系不大的话，反而可以快速读完（虽然我很少读与我专业无关的数学书）。但是，读完以后到底能否彻底理解，我对此持怀疑的态度。理解数学书（或者论文）是一种怎样的状态呢？只要一步步验证以确认证明过程无误即是理解的状态吗？在阅读与自己专业无关的数学书时，我发现即使确认了证明的求证过程，之前不理解的定理仍然不得其意。虽然证明过程正确，不过总感觉整体印象模糊不清。与此相反，如果是自己专业领域的定理，即使不记得定理的证明过程，已经理解的内容也都格外清晰，正如我们能清晰地理解 2+2=4 一样。我们之所以能理解 2+2=4，是因为自己是从感觉上把握了这一数学事实，而不是通过论证。定理的理解同样如此，应该从感觉上把握定理所要表达的数学事实。尝试摸索定理的证明过程，是一种从感觉上把握定理的方法，而并非为了检验证明过程的正确性（著名定理的正确性显然也不需要确认）。想要更好地理解定理，仅仅读一遍定理的证明过程是远远不够的。反复阅读研究、做笔记，并且将定理运用于各种问题中才是有效的方法。做笔记的目的不是为了背诵证明过程，而是花时间去详细分析定理所要表达的数学事实的结构。像这样彻底理解定理之后，日后即使忘记定理的证明过程也完全没有关系（不过在大学毕业之前，还是需要记住证明过程来应对考试）。当偶尔需要确认证明过程去重新复习时，会发现定理内容如同 2+2=4 一样清晰，但定理的证明过程看起来总觉得

有牵强附会之感。

数学是一门具有高度技术性的学问。学习所有技术性的东西，都需要长时间的反复练习。例如，如果想要成为一名钢琴家，那唯一的方法就是从小坚持每天练琴几个小时。数学与钢琴也有共通的一面，即学习数学每天也需要花时间去反复练习。这有助于培养把握数学事实的感觉。在阅读与自己专业无关的数学书时，如果出现理解证明过程却无法理解定理内容的情况，则说明把握数学事实的感觉还不够发达。

（《数学 Seminar》1980 年 8 月刊）

数学印象

数学是什么，这说不清道不明。不过，每一个对数学感兴趣的人多多少少都有各自的见解。在本文中，我会坦率地讲述数学家眼中的数学印象，比如像我这样专门研究数学的数学家是如何看待数学的，以便为读者提供参考。

人们通常认为数学是一门由严密逻辑所构建的学问，即便不是与逻辑完全一致，也大致相同。实际上，数学与逻辑并没有多大关系。当然，数学必须遵循逻辑。不过，逻辑对于数学的作用类似于语法对于文学。书写符合语法的文章与用语法编织语言、创作小说是截然不同的。同样，依照逻辑进行推论与使用逻辑构筑数学理论

也并非同一层面上的事情。

任何人都能理解一般逻辑，如果将数学归为逻辑，那么任何人都能理解数学。然而众所周知，无法理解数学的初中生或高中生大有人在，语言能力优异、数学能力不足的学生十分常见。因此我认为，数学在本质上与逻辑不同。

数感

我们试着思考数学之外的自然科学，比如说物理学。物理学研究的是自然现象中的物理现象，同理可得，数学研究的是自然现象中的数学现象。那么，理解数学相当于“观察”数学现象。这里所说的“观察”不是指“用眼观看”，而是通过一定感觉所形成的感知。虽然很难用言语去描述这种感觉，不过这是一种明显不同于逻辑推理能力的纯粹的感觉，在我看来这种感知几乎接近于视觉。或许我们可以称之为直觉，不过为了凸显其纯粹性，在接下来的表述中，我将其称为“数感”。直觉一词含有“瞬间领悟真相”的意思，所以不太合适。数感的敏锐性类似于听觉的敏锐性，也就是说基本上与是否聪明无关（本质上无关，但不意味着没有统计关联）。不过数学的理解需要凭借数感，正如乐感不好的人无法理解音乐，数感不好的人同样无法理解数学（给不擅长数学的孩子当家教时，就能明白这种感觉。对你来说已经显而易见的问题，在不擅长数学的孩子看来却怎么也无法理解，因此你会苦于不知如何解释）。

在证明定理时，数学家并没有察觉自己的数感发挥了作用，因

此会以为是按照缜密的逻辑进行了证明。其实，只要用形式逻辑符号去解析证明，数学家就会发现事实并非如此。因为这样最终只会得到一串冗长的逻辑符号，实际上完全不可能证明定理（当然我的重点并不在于指责证明过程的逻辑不够严密，而是在于指出数感能帮助我们省略逻辑推理这个过程，直接引导我们走向前方）。近来经常听到人们在讨论数学感觉，可以说数学感觉的基础正是数感。所有数学家天生都具有敏锐的数感，只是自己没有察觉而已。

数学同样以自然现象为研究对象

也许有人认为将自然现象的一部分作为数学的研究对象太过鲁莽。但是，正如数学家在证明新的定理时，通常不会说“发明”了定理，而是表达为“发现”了定理。由此可见，数学现象与物理现象一样，都是自然界中的固有之物。我也证明过几个新定理，但我从来不觉得那些定理是自己想出来的。这些定理一直都存在，只不过碰巧被我发现了而已。

经常会有人指出，数学对于理论物理学有着不可思议的奇妙作用。甚至会让人产生一种观念，以为所有物理现象都需要依托数学法则而存在。而且，大部分情况下，在物理学理论被发现之前，数学家们早就准备好了该理论所需的数学知识。黎曼空间对于爱因斯坦广义相对论的作用就是最好的例子。为什么数学对物理学的作用如此之大？当然，只要解释说数学是物理学的语言，这个话题就到此为止了。比如，广义相对论中黎曼空间的作用的确可以说是一种

语言，但是数学对于量子力学的作用却堪称是一种神秘的魔法，无法单纯将其视为一种语言。

打开量子力学的教材，首先是关于光干涉、电子散射等实验的说明，接着是用波函数（即希尔伯特空间中的矢量）来描述光子、电子等粒子的状态，最后推出态叠加原理。态叠加原理是量子力学中的基本原理，它表达了如果状态 A 是状态 B 与状态 C 的叠加，那么 A 的波函数是 B 的波函数与 C 的波函数的线性组合。

什么是粒子的状态？例如，粒子加速器中电子的状态由粒子加速器决定，所以粒子的状态可以理解成粒子所在的环境。在量子力学中，极复杂的环境也只由一个波函数（矢量）来描述，因此首先需对环境进行简化和数学化。如何理解状态 A 是状态 B 与状态 C 的叠加？如果是教材中的光干涉等情况，那么就比较容易理解。不过，在通常情况下说环境 A 是环境 B 与环境 C 的叠加，这就不容易理解了。不确定性原理，例如不可能同时测量一个粒子的位置和它的速度，是通过测量实验对粒子的干扰来加以说明的，最终表明一个粒子无法同时存在于测量位置的装置和测量速度的装置中。换言之，即粒子不可能同时存在两种环境。那么如何理解这两种环境的叠加呢？只能说实在是难以理解。另外，波函数的线性组合运算如同数学中的初级运算一样简单。而态叠加原理则主张通过简单的数学运算来表示各种复杂奇怪状态的叠加。也就是说，数学运算支配了作为量子力学对象的物理现象。这种数学运算与物理现象的关系，并非是通过解析叠加的物理意义而将其用数学公式表现出来，而是将

“波函数的线性组合可以描述状态的叠加”视为公理，然后依据数学运算来确定叠加的意义。正如费曼（R.P.Feynman）所言，除了数学之外，没有其他方法能说明态叠加原理了。我们只能认为量子力学基于数学的无穷魔法，因此我认为物理现象的背后存在着固有的数学现象。

数学是实验科学

我认为，数学家研究数学现象的意义与物理学家研究自然现象相同。也许有人认为，物理学家需要进行各种实验，而数学家仅仅在思考而已。不过，这种情况下的“思考”含有“思考实验”的意思，与考试中对题目的“思考”性质全然不同。考试题目一般是将固定范围内的已知内容组合在一起，一小时之内肯定能够解开，所以相当于提供了明晰的思考对象和思考方法。然而，实验是调查未知的自然现象，因此无法预测结果，甚至无法得到结果。这种实验的形式同样存在于数学中，探究未知数学现象的思考实验，其思考对象和思考方法都具有未知性。这也是数学研究过程中最大的困难。

最简单易懂的思考实验当属从具体事实中归纳猜想。例如我们尝试思考一下，偶数最少能表示成几个素数之和。偶数 2 本身是素数，暂且另当别论。除此之外，正如 $4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5$，$100=47+53$……所示，偶数一般能表示成两个素数之和。根据上述结论，我们可以从中推出定理“任何一个大于 2 的偶数都可以表示成两个素数的和”（这个命题就是著名的哥德巴赫猜想，至今未被证明）。如果调查多个事实能够猜想出定理的形式，那么之

后只要思考如何证明该定理即可，也就是说研究的最初难关已经突破。当然，数学中仅仅依靠积累几个事实是无法证明定理的，定理的证明必须另外进行思考。

初等数论的许多定理就是先由实验结果引发猜想，然后才得到证明。而且，从 19 世纪末到 20 世纪初，恩里格斯（F.Enriques）、卡斯特尔诺沃（G.Castelnuovo）等意大利代数几何学家获得的惊人成果中，依据实验得到成果的不在少数。托德（J.A.Todd）在其 1930 年左右发表的论文中曾明确断言："代数几何是实验科学。" 直到最近[1]，上述几位数学家的定理才全部得以严密证明。不过值得注意的是，尽管他们当时给出的定理证明不够完全，但是定理本身却是正确的。

发现新定理

现在数学的研究对象一般都非常抽象，实例也十分抽象，让人难以理解。所以依靠具体事实归纳来猜想定理的方式，在大多数情况下已经难以适用。目前的情况下，关于发现新定理的思考实验方式，我本人也是不得而知。如果将精力都花费在思索新的思考方式上，恐怕难有所得。实际上很多时候无论如何思考都得不到相应的结果。这样看的话，是否可以说数学研究是一份极其困难的工作呢？不过这倒也未必。有时候感觉自己什么也没做，那些应当思考的事情却很自然地呈现在眼前，研究工作也得以顺利推进。夏目漱

1　本文发表时间为 1969 年 5 月。——编者注