高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等应用数学基础

GAO DENG YING YONG SHU XUE JI CHU

王英杰 王新芳○主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等应用数学基础

主　编　王英杰　王新芳
副主编　周　凯
参　编　翟钰风　董丽筠
主　审　杜　力

机械工业出版社

本书是根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的若干意见》等文件，以及高职高专教育高等数学课程的教学基本要求编写的。

本书共10章，内容涉及函数、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、随机事件与概率、数理统计简介、矩阵、线性方程组等。

本书可作为高职高专理工科（机械类、电子类、管理类、经济类等专业）教材，也可作为成人教育教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学基础/王英杰，王新芳主编．—北京：机械工业出版社，2006.7

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 7-111-19455-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②王…　Ⅲ．应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第070673号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：宋学敏　责任编辑：李大国　版式设计：霍永明

责任校对：陈延翔　封面设计：王伟光　责任印制：李　妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006年8月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 9.375印张 · 364千字

0001—5000册

定价：15.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68326294

编辑热线电话（010）68354423

封面无防伪标均为盗版

前　言

《高等应用数学基础》是面向21世纪高等职业技术教育需要而编写的规划教材．本书是根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的若干意见》等文件，以及高职高专教育高等数学课程的教学基本要求编写的．本书主要适用于高职高专理工科（机械类、电子类、管理类、经济类等专业）学生，教学时数定位在70学时左右．

针对目前高等应用数学课程教学过程中出现的新要求、新情况以及某些教材中存在的问题，我们查阅了大量的参考资料，进行了多次专题交流与研讨，并积极汲取各种现有教材的精华，认真制订了编写提纲，并进行了认真细致的编写工作．

本书内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、概率论与数理统计、线性代数四大组成部分．本书符合经济类、管理类及其他应用类专业对高等应用数学的教学基本要求，在使用本书时，教师可以根据不同专业的实际需要适当删减教材的内容，或增发一些补充讲义．

在编写过程中本书主要突出以下几个方面：

（1）内容涉及的知识面要适当宽些，内容要浅，便于学生自学．

（2）注重内容的系统性和逻辑性．

（3）语言精炼，通俗易懂，图表直观．

（4）举例密切联系生活、生产和工程实践，突出理论与实践相结合．

（5）练习题紧紧与内容相扣，不出难题、怪题以及与日常生活不相关的题，突出让学生掌握和巩固最基本的概念、定义、定律、定理、推论等知识．

（6）练习题包括填空题、选择题、计算题、综合题等形式，适应大多数学生的基本情况．

本书由王英杰和王新芳任主编，周凯任副主编，王英杰负责拟订

编写提纲与要求，并负责对编写内容进行统稿.

本书第 1 章至第 4 章及第 10 章(10.3 和 10.4)由王新芳编写，第 5 章和第 6 章由周凯编写，第 7 章和第 8 章由翟钰风编写，第 9 章和第 10 章(10.1 和 10.2)由董丽筠编写.

本书由杜力主审，他对本书稿进行了认真的审阅，提出了许多中肯的意见和有价值的建议. 同时，本书在编写过程中参考了大量的文献资料，在此向文献资料的作者致以诚挚的谢意.

由于编写时间及编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评与指正.

编　者

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第 1 篇　一元函数微分学

第 2 篇　一元函数积分学

第1篇　一元函数微分学

第1章　函　　数

函数是近代数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间依存关系在数学中的反映，是高等数学的主要研究对象. 本章将在复习有关函数内容的基础上，进一步研究函数的性质，分析初等函数的结构.

1.1　函数的概念

1.1.1　实数概述

1. 实数集

随着社会的发展、人类的进步，数由正整数发展到整数、整数发展到有理数、有理数发展到实数. 零和正整数构成自然数. 自然数的全体构成的集合称为自然数集，记做 $\mathbf{N}$；正整数的全体构成的集合称为正整数集，记做 $\mathbf{Z}_+$；整数的全体构成的集合称为整数集，记做 $\mathbf{Z}$；有理数的全体构成的集合称为有理数集，记做 $\mathbf{Q}$；实数的全体构成的集合称为实数集，记做 $\mathbf{R}$.

实数的全体充满整个数轴，即实数不但是稠密的，而且是连续的. 实数与数轴上的点形成一一对应关系. 也就是说，任何一个实数在数轴上都有一个点与之对应；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数.

2. 实数的绝对值

实数的绝对值，记做 $|x|$，它是一个非负实数，即

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义为：数轴上的点 x 到原点的距离.

实数 x 的绝对值 $|x|$ 有如下性质：

1）对于任意实数 x，有 $|x| \geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$.

2）对于任意实数 x，有 $|-x| = |x|$.

3）对于任意实数 x，有 $|x| = \sqrt{x^2}$.

4）对于任意实数 x，有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

5）设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$.

6）设 $a \geqslant 0$，则 $|x| \leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a \leqslant x \leqslant a$.

7）设 $a \geqslant 0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或 $x>a$.

8）设 $a \geqslant 0$，则 $|x| \geqslant a$ 的充分必要条件是 $x \leqslant -a$ 或 $x \geqslant a$.

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论：

1）$|x+y| \leqslant |x|+|y|$ （三角不等式）.

2）$|x|-|y| \leqslant \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

3）$|xy| = |x||y|$.

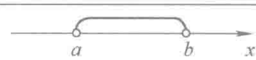
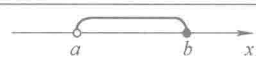
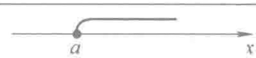
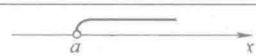
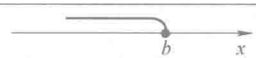
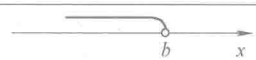
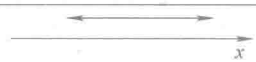
4）$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ （$y \neq 0$）.

3. 区间与邻域

（1）区间

定义 1.1 区间是介于两实数 a、$b(a<b)$ 之间的实数构成的集合. 它是高等数学中常用的实数集，有以下九种形式，如表 1-1 所示.

表 1-1

分类	定义	名称	符号	数轴表示
有限区间	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
	$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
	$\{x \mid a \leqslant x<b\}$	右开区间	$[a,b)$	
	$\{x \mid a<x \leqslant b\}$	左开区间	$(a,b]$	
无限区间	$\{x \mid x \geqslant a\}$		$[a,+\infty)$	
	$\{x \mid x>a\}$		$(a,+\infty)$	
	$\{x \mid x \leqslant b\}$		$(-\infty,b]$	
	$\{x \mid x<b\}$		$(-\infty,b)$	
	$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$		$(-\infty,+\infty)$	

其中，a、b 是确定的实数，$a<b$. a、b 分别称为区间的左端点和右端点. 有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为区间的长度. $+\infty$ 读做“正无穷

大”，表示沿 x 轴正向无限增大，$-\infty$ 读做“负无穷大”，表示沿 x 轴反向绝对值无限增大，它们不表示任何确定的数.

（2）邻域

定义 1.2 1）以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记做 $U(a)$.

2）设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记做 $U(a,\delta)$. 即 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$（$U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体）.

3）设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 也是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 去心邻域，记做 $U_0(a,\delta)$. 即

$$U_0(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta,x\neq a\}.$$

1.1.2 函数的概念

函数是数学中极其重要的内容之一，函数的基础知识在数学和其他许多学科中有着广泛的应用，它是进一步学习高等数学、应用数学和其他科学技术必不可少的基础.

1. 函数的定义

定义 1.3 设 D 是一个数集，如果对于 D 上变量 x 的每一个确定值，按照某种对应法则 f，变量 y 都有惟一确定的值与之对应，称 y 为定义在数集 D 上 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 为自变量，数集 D 称为函数的定义域. 当 x 取遍定义域 D 中的每一个值时，对应函数值的全体组成的集合称为函数的值域，一般用 M 表示.

例如：反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域和值域分别为 D：$\{x \mid x\neq 0\}$；M：$\{y \mid y\neq 0\}$.

在函数的定义中，如果对每一个 x 值，对应的 y 值是惟一的，称 y 是 x 的单值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为单值对应. 否则，称函数为多值函数，$x\to y$ 的对应法则 f 称为多值对应. 上述定义的函数是单值函数. 例如，反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 就是单值函数；而 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是多值函数.

2. 函数的表示法及函数值

（1）函数的表示法

表示函数的方法常用的有：解析法、列表法、图像法三种.

1）解析法 就是把两个变量的函数关系用一个等式来表示，这个等式称为函数的解析表达式，简称解析式. 解析式是表示函数的主要形式. 除了用符号 $f(x)$ 表示外，还常用 $g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等符号表示. 例如，

$$g(x)=ax^2+bx+c,\quad F(x)=|x|$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

用解析法表示的函数还有以下几种形式.

① 分段函数. 在不同区间内用不同解析式表示的函数称为分段函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

分段函数的定义域是函数的各个定义域区间的并集.

② 隐函数. 由方程 $f(x,y)=0$ 确定的函数称为隐函数. 例如, $2x-y+3=0$, $xy=e^{x+y}$都是隐函数.

为了区别, 我们前面讨论的函数称为显函数. 如 $y=2x$, $y=e^x$ 等都是显函数, 分段函数也是显函数. 注意, 一部分隐函数能够化为显函数, 也有一部分隐函数不能够化为显函数.

例如, $2x-y+3=0$ 可化为显函数 $y=2x+3$, 而 $xy=e^{x+y}$无法化为显函数.

③ 由参数方程所确定的函数. 有时候, 变量 x 与 y 之间的函数关系由参数方程

$$\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$$

来确定, 其中 t 为参数, 这种函数称为参数方程确定的函数.

如$\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$就是参数方程确定的函数, t 为参数. 参数方程确定的函数消去参数 t 后可化为显函数或隐函数形式.

2) 列表法　用列出的表格来表示两个变量的函数关系.

例如, 数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表, 还有银行里常用的“利息表”等等都是用列表法来表示函数关系的.

又如, 表 1-2 也是用列表法表示函数关系的.

表 1-2　某校的在校人数统计表

年份	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
数量/人	2563	2786	2889	3024	3086	3128	3354

3) 图像法　就是用函数图像表示两个变量之间的关系.

例如, 气象台用自动记录器, 描绘温度随时间变化的曲线就是用图像法表示函数关系的.

(2) 函数值与函数表达式的求法

定义 1.4　当自变量 x 在其定义域内取一个确定的值 a 时, 函数 $f(x)$ 的对应值称为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的函数值, 记做 $f(a)$.

$f(a)$是由 a 代替函数表达式中的 x 而得到的.

例 1 设 $\varphi(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$，求 $\varphi(0)$，$\varphi(a)$.

分析：此函数带有绝对值. 所以，求 $\varphi(a)$时要根据 a 的情况进行讨论.

解 $\varphi(0)=\frac{|0-1|}{0^2-1}=\frac{1}{-1}=-1$；

$$\varphi(a)=\frac{|a-1|}{a^2-1}=\begin{cases}\frac{1}{a+1} & a>1\\ -\frac{1}{a+1} & a<1\text{ 且 }a\neq-1\end{cases}.$$

例 2 已知

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in(0,+\infty)\\ 1 & x=0\\ -x+1 & x\in(-\infty,0)\end{cases},$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

解 因为 $-1\in(-\infty,0)$，所以，$f(-1)=(-x+1)\Big|_{x=-1}=-(-1)+1=2$；

$f(0)=1$；

因为 $\frac{1}{2}\in(0,+\infty)$，所以，$f\left(\frac{1}{2}\right)=x+1\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

例 3 已知 $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(a)$，$f(f(x))$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f(0)=\frac{0-3}{0+2}=-\frac{3}{2}$；$f(1)=\frac{1-3}{1+2}=-\frac{2}{3}$；$f(a)=\frac{a-3}{a+2}\quad(a\neq-2)$；

$$f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+2}=\frac{\frac{x-3}{x+2}-3}{\frac{x-3}{x+2}+2}=-\frac{2x+9}{3x+1}\quad\left(x\neq-\frac{1}{3}\right);$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-3}{\frac{1}{x}+2}=\frac{1-3x}{1+2x}\quad\left(x\neq0,x\neq-\frac{1}{2}\right).$$

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant1\\ x+1 & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(a)$.

解 $f(0)=2\sqrt{0}=0$，$f(1)=2\sqrt{1}=2$，$f(2)=2+1=3$，

$$f(a)=\begin{cases}2\sqrt{a} & 0\leqslant a\leqslant1\\ a+1 & a>1\end{cases}.$$

例 5 设$f(x+1)=x^2+3x+5$，求$f(x)$的表达式.

解 令$x+1=u$，则$x=u-1$，得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$$

所以，$f(x)$的表达式为：$f(x)=x^2+x+3$.

3. 函数定义域的求法

在研究函数时，只有在其定义域内进行才有意义，因此，研究函数首先要确定其定义域. 在实际问题中，函数的定义域是由其实际意义确定的.

例如，圆的面积A与半径r的函数关系是$A=\pi r^2$，此函数的定义域是$(0,+\infty)$.

如果所讨论的函数是由一个解析式$y=f(x)$确定的，那么，函数的定义域是使解析式$y=f(x)$有意义的所有实数的集合. 确定函数的定义域通常有以下几种情况.

1）在分式函数中，分母不能为零.

2）在偶次根式函数中，根号里的表达式不能为负.

3）在对数函数式中，真数部分必须大于0，底数大于0且不等于1.

4）在三角函数式中，$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$不能取正切，$k\pi(k\in\mathbf{Z})$不能取余切.

5）在反三角函数式中，绝对值大于1的代数式不能取反正弦和反余弦.

6）如果函数表达式是由几个代数式经过加、减运算组合而成，则其定义域应取各代数式定义域的交集.

例 6 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x-2}$；（2）$y=\ln(x^2+x-6)$；

（3）$y=\dfrac{1}{|x+1|-2}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$；（4）$y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$.

解 （1）要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$$

即 $$x>2$$

所以，函数的定义域为$(2,+\infty)$；

（2）要使函数有意义，必须满足

$$x^2+x-6>0$$

即 $$(x+3)(x-2)>0$$

$$x<-3 \text{ 或 } x>2$$

所以，函数的定义域为$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$；

(3) 要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\\ |x+1|-2\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 6\\ x\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$$

所以，函数的定义域为$[-4,-3)\cup(-3,1)\cup(1,6]$；

(4) 因为分段函数的定义域是函数的各个定义区间的并集，$[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$，所以，函数的定义域为$[0,+\infty)$.

1.1.3 函数的两个要素

一个函数是由其定义域和对应关系确定的. 所以，定义域和对应关系构成了函数的两个要素. 对于两个函数，当且仅当它们的定义域和对应关系分别相同时，这两个函数才相同.

例 7 判断下列各组中函数是否相同：

(1) $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$； (2) $y=x$，$y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=x$，$y=\sqrt[3]{x^3}$； (4) $y=C$，$y=Cx^0$.

解 (1) $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，但是，它们的对应关系不同，$y=x$ 中 $f:x\to x$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 中 $f:x\to\sqrt{x^2}=|x|$. 因此，$y=x$，$y=\sqrt{x^2}$是不同的函数.

(2) $y=x$，$y=(\sqrt{x})^2$ 中，$y=x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是非负实数集，它们的定义域不同. 所以，$y=x$，$y=(\sqrt{x})^2$ 是不同的函数.

(3) $y=x$，$y=\sqrt[3]{x^3}$定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，对应关系相同. 所以，$y=x$，$y=\sqrt[3]{x^3}$是相同函数.

(4) $y=C$，$y=Cx^0$ 中，$y=C$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，$y=Cx^0$ 的定义域是非零实数集，它们的定义域不同. 所以，$y=C$，$y=Cx^0$ 是不同的函数.

1.2 函数的特性

函数的四种特性是指函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性，列表归纳如下：

表 1-3　函数的四种特性

特性	定　　义	几 何 特 性
奇偶性	若 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，且 (1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数 (2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数 否则，称 $f(x)$ 为非奇非偶函数	奇函数的图像关于原点对称 偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	若对于任意的 x_1，$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$. 若 (1) $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加 (2) $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少	单调增加函数图像趋势为“从左向右呈上升状” 单调减少函数图像趋势为“从左向右呈下降状”
有界性	若存在常数 $M>0$，使对一切 $x\in(a,b)$ 有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界	有界函数的图像在 (a,b) 内全部夹在直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间
周期性	若对于任意的 $x\in D$，存在正数 l，使 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的周期，称 l 的最小正值为 $f(x)$ 的最小的正周期	周期函数的图像每隔一个周期重复出现一次

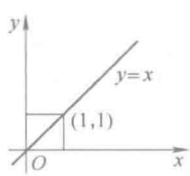
上述四种特性中，奇偶性和周期性是函数的整体特性. 所以，等式中所对应的 x 是定义域中的任意值；而单调性和有界性是函数的局部特性 $\left(\text{如 } y=\dfrac{1}{x} \text{ 在 } [1,2] \text{ 上有界,而在整个定义域上无界}\right)$，它所对应的区间可能是定义域的全部，也可能是定义域的一部分. 这四种特性是从不同角度来研究函数的.

1.3　初等函数

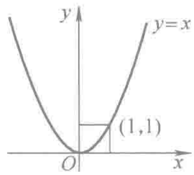
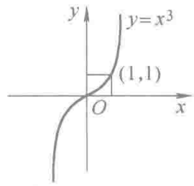
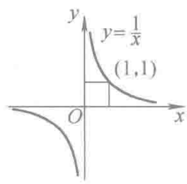
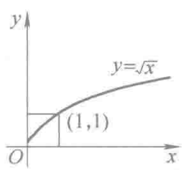
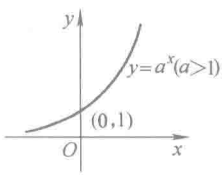
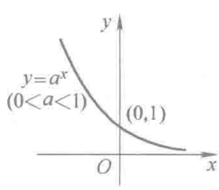
1.3.1　基本初等函数

定义 1.5　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 基本初等函数应用非常广泛，我们必须熟记它们的定义域、图像及性质，见表 1-4.

表 1-4　基本初等函数的定义域、图像及性质

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

（续）

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com