



普通高等教育“十三五”规划教材

—— 南京大学·大学数学系列 ——

简明微积分教程 (第二版)

© 高印珠 编



科学出版社



普通高等教育“十三五”规划教材

南京大学·大学数学系列

简明微积分教程

(第二版)

高印珠 编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是南京大学人文社会科学本科生的数学基础课教材(一学期,共72课时)。内容包括函数、极限、一元函数微分学、一元函数积分学和多元函数微积分学。本书注重理论和方法的阐述;配置了200多幅插图,一些重要、典型的函数都给出了精准图像;习题难易适当,并附有参考答案。

本书可作为综合大学、高等师范院校的文科数学基础课教材,也可作为中学数学教师、理工科大学生以及具有高中以上文化程度的广大读者学习微积分的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分教程/高印珠编. —2版. —北京:科学出版社,2017.8

(南京大学·大学数学系列)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-054151-2

I. ①简… II. ①高… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 195254 号

责任编辑:胡 凯 许 蕾 沈 旭/责任校对:贾伟娟

责任印制:张 倩/封面设计:许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市密东印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年7月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2017年8月第 二 版 印张:22 1/2

2017年8月第六次印刷 字数:534 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书是在第一版基础上修订编写而成. 自 2012 年第一版以来, 收到了不少读者的宝贵意见. 本校任课教师喻良、石亚龙、王国英、黄卫华等教授以及文科非经济类同学在教学和使用过程中对本书提出了有益的意见和建议. 本次修订认真吸收这些意见和建议以及国内外相关教材的长处进行了较大的调整, 增加了一些定理、习题、习题解答及插图, 对理论的阐述、例题、习题和脚注的安排均进行了推敲, 使其易于学习, 同时又便于备课与讲授. 师维学教授绘制了本次再版新增的插图.

本次再版得到了南京大学“文科本科大学数学教材建设”教改项目的支持, 数学系主任秦厚荣教授、副主任朱晓胜教授以及教务处领导给予了积极的建议、鼓励和帮助, 借此机会, 一并表示感谢! 虽然做了努力, 但囿于作者的水平, 书中不妥和疏漏想必难免, 恳请专家、教师和读者批评指正.

编 者

2017 年 6 月于南京大学

第一版前言

《简明微积分教程》是为南京大学人文社会科学(非经济类)专业本科生编写的大学生数学基础课教材. 本课程开设一学期, 每周 4 课时, 共 72 课时.

为使文科学生在一学期内对微积分全貌有更多理解, 掌握微积分学的基本思想方法和最核心的基本内容, 本书在编写过程中作了如下安排:

一、精选了微积分学(从一元函数微积分学到二元函数微积分学)中既有理论意义, 又有广泛应用的基本概念、重要定理和计算方法等内容.

二、在注意内容系统性和逻辑性的同时, 注重理论和方法的阐述, 尽力展示数学以简单语言解释复杂、自然的现象之美妙, 不过于追求严密性和技巧性. 有些定理和例子的证明在附录 A 中给出, 供有兴趣的学生阅读.

三、配置了 200 多幅插图, 一些重要、典型的函数都给出了精准的图像, 并仔细编配了相当数量难易适当的习题, 以便降低学习难度, 增加学习兴趣, 使学生从直观上更好地把握相关概念与性质和熟练应用所学的基本技能.

四、第三章的泰勒定理这一节没有配置习题, 不列入考试范围. 第四章 4.8 节标记了“*”号, 教师可根据课时总数和学生实际情况决定是否讲授.

五、附录 B 选编了本课程考试用过的试卷; 附录 C 是习题参考答案, 其中部分题目有详解、图示或提示, 以辅助、扩展学生对正文内容的理解; 附录 D、E 是常用数学公式、数学归纳法及希腊字母表, 这些可使本书使用起来更为方便.

在本书编写过程中, 朱晓胜、黄卫华、范红军、陈仲、丁南庆、廖良文等教授提出了许多宝贵意见和建议; 师维学教授用 MetaPost 绘制了全部插图, 在用 LaTeX 排版方面给予了许多帮助; 本书的编写和出版得到了数学系领导和国家自然科学基金“南京大学数学基地”项目(J0830101)的大力支持, 编者借此机会一并表示衷心感谢!

由于水平有限, 书中的缺点、疏漏和不妥之处在所难免, 恳切期望专家、同行及广大读者批评指正.

编 者

2012 年 4 月于南京大学

目 录

第二版前言

第一版前言

第1章 函 数	1
1.1 集 合	1
1.2 函数的概念	4
习题 1.2	9
1.3 函数的几种特性	10
习题 1.3	12
1.4 反函数与复合函数	13
习题 1.4	17
1.5 初等函数	18
习题 1.5	21
第2章 极 限	22
2.1 数列极限	22
2.1.1 数列极限的概念	23
2.1.2 收敛数列的性质与运算	26
2.1.3 数列极限存在的两条准则	31
习题 2.1	36
2.2 函数极限	36
2.2.1 函数极限的概念	37
2.2.2 函数极限的性质、运算及存在条件	44
2.2.3 两个重要极限	49
2.2.4 无穷小量与无穷大量	54
习题 2.2	62
2.3 函数的连续性	66
2.3.1 函数连续性的定义	66
2.3.2 函数的间断点	70
2.3.3 连续函数的运算	72
2.3.4 初等函数的连续性	75
2.3.5 闭区间上连续函数的基本性质	77
习题 2.3	79

第3章 一元函数微分学	82
3.1 导数与微分	82
3.1.1 导数的概念	82
3.1.2 导数的四则运算法则	93
3.1.3 反函数的导数	97
3.1.4 复合函数的导数	98
3.1.5 初等函数的导数	100
3.1.6 高阶导数	104
3.1.7 微分	105
习题 3.1	113
3.2 微分学基本定理	116
3.2.1 中值定理	116
3.2.2 洛必达法则	123
3.2.3 泰勒定理	130
习题 3.2	135
3.3 导数的应用	138
3.3.1 函数的单调性与极值	138
3.3.2 函数的凹凸性与拐点	143
3.3.3 曲线的渐近线	146
3.3.4 函数的作图	149
习题 3.3	151
第4章 一元函数积分学	157
4.1 不定积分与原函数	157
习题 4.1	160
4.2 不定积分的性质与基本积分表	160
习题 4.2	162
4.3 基本积分法	163
4.3.1 第一换元积分法	163
4.3.2 第二换元积分法	166
4.3.3 分部积分法	170
习题 4.3	174
4.4 定积分的概念	176
习题 4.4	181
4.5 定积分的性质	182
习题 4.5	184
4.6 定积分的计算	185
4.6.1 变上限的定积分	185
4.6.2 牛顿-莱布尼茨公式	188
4.6.3 定积分换元法	190

4.6.4 定积分分部积分法	193
习题 4.6	195
4.7 应用定积分求平面图形的面积	196
习题 4.7	200
4.8 *广义积分	201
习题 4.8	207
第 5 章 多元函数微积分学	209
5.1 极限与连续性	209
习题 5.1	216
5.2 偏导数与全微分	216
习题 5.2	226
5.3 二元函数的极值	227
习题 5.3	229
5.4 二重积分	229
习题 5.4	240
主要参考文献	242
附录 A 本教程中一些定理和例子的证明	243
附录 B 复习题及试卷示例	268
附录 C 习题提示与参考答案	280
附录 D 常用数学公式和数学归纳法	335
附录 E 希腊字母表	340
附录 F 微积分创始人牛顿和莱布尼茨简介	341
索引	345

第1章 函 数

函数的概念起源于对运动与变化的定量研究. 伽利略 (G. Galilei) 的落体运动定律, 爱因斯坦 (A. Einstein) 的质能转换公式都是用函数概念表达的. 微积分学的主要研究对象是函数. 本章将对中学已讲过的函数的概念和性质进行较系统的复习, 并作一些必要的补充, 为以后各章的学习作准备.

1.1 集 合

本节简要介绍集合的基本概念、表示方法和本书常用的逻辑符号.

我们把具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体称为**集合**, 通常用大写字母 A, B, C 等表示. 集合中的事物称为**元素**, 常用小写字母 a, b, c 等表示. 若 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A , 记作 $a \in A$; 若 a 不是集合 A 的元素, 则称 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$.

不含元素的集合称为**空集**, 记作 $\emptyset$. 若集合 A 只含有限个元素, 则称 A 是**有限集**. 若集合含无限多个元素, 则称它为**无限集**.

若集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$. 若 $A \subseteq B$, 且存在 $b \in B$, 而 $b \notin A$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A \subsetneq B$. 空集是任何非空集合的真子集.

若集合 A 与 B 所含的元素完全相同, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$. 显然, 对于集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

集合一般有两种表示方法:

- (1) **列举法**: 把集合所包含的元素列举出来, 例如, $B = \{-1, 1\}$, $C = \{0, 1, 2, \cdots\}$;
- (2) **示性法**: 给出集合的元素具有的性质, 写成

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\},$$

例如,

$$D = \{x \mid x \text{ 是满足方程 } x^2 - 1 = 0 \text{ 的实数}\},$$

$$E = \{x \mid x \text{ 是自然数}\},$$

$$F = \{x \mid x^2 < 0, x \text{ 是实数}\},$$

显然, $B = D$ 是有限集, $C = E$ 是无限集, F 是空集.

对于集合 A 与 B , 定义如下集合:

集合 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$;

集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$;

集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$.

集合 A 与 B 的并集、交集及差集如图 1.1.1 阴影部分所示.

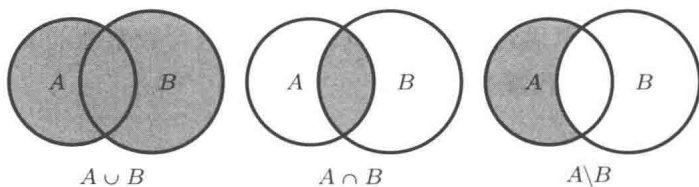


图 1.1.1

例如, 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad A \setminus B = \{1, 2\}.$$

以下是本书常用的一些集合:

(1) 正整数集 $\mathbf{N}^+ = \{x \mid x \text{ 为正整数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

(2) 实数集 $\mathbf{R}$ (或称实直线) $= \{x \mid x \text{ 为实数}\} = (-\infty, +\infty)$, 这里符号 ∞ ^① 读作“无穷大”或“无穷”, $+\infty$ 读作“正无穷大”或“正无穷”, $-\infty$ 读作“负无穷大”或“负无穷”.

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 则 $\mathbf{R}$ 及以下 (1) ~ (8) 所表示的集合统称为区间:

(1) 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

(2) 开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$;

(3) 左闭右开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$;

(4) 左开右闭区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;

(5) $(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}$;

(6) $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a, x \in \mathbf{R}\}$;

(7) $(-\infty, a) = \{x \mid x < a, x \in \mathbf{R}\}$;

(8) $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a, x \in \mathbf{R}\}$,

其中 a 和 b 均称为区间的端点, a 称为左端点, b 称为右端点, 区间 (1) ~ (4) 称为有限区间, $\mathbf{R}$ 及区间 (5) ~ (8) 称为无限区间, $\mathbf{R}$ 、(5) 以及 (7) 也称为无限开区间.

二维欧氏平面 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$.

① 符号 ∞ 是英国数学家约翰·沃利斯 (John Wallis, 1616 ~ 1703) 于 1655 年首次使用的 (很可能取自表示 1 亿的罗马数码).

三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$.

$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 的元素也称为点.

$\mathbf{R}^2$ 的点 (x, y) 常用 $P(x, y)$ 或 $M(x, y)$ 等来表示, 简记为 P 或 M .

$\mathbf{R}^3$ 的点 (x, y, z) 常用 $P(x, y, z)$ 或 $M(x, y, z)$ 等表示, 在不发生混淆的情况下, 也简记为 P 或 M .

邻域和空心邻域是本书常用的概念, 现定义如下, 并设 $\delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$.

设 $a \in \mathbf{R}$. 点 a 的 δ 邻域是指集合

$$U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \text{ (见图1.1.2).}$$

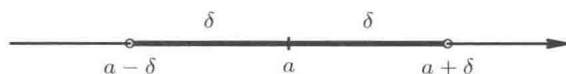


图 1.1.2 $|x - a| < \delta$

该集合是以 a 为中心, δ 为半径, 长为 2δ 的开区间, 表示与 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体, 即 $\mathbf{R}$ 中满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的点 x 的全体.

点 a 的空心 δ 邻域是指集合

$$U_\delta^\circ(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \text{ (见图1.1.3).}$$

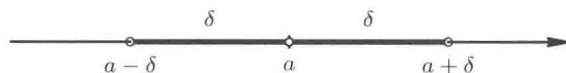


图 1.1.3 $0 < |x - a| < \delta$

设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. 点 P_0 的 δ 邻域是指集合

$$U_\delta(P_0) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, x, y \in \mathbf{R}\},$$

见图 1.1.4.

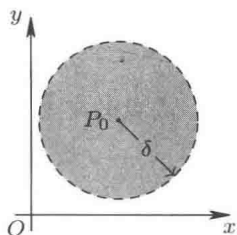


图 1.1.4

设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$, 点 P_0 的 δ 邻域是指集合

$$U_\delta(P_0) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta, x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

以下是本书常用的逻辑符号:

(1) “ $\forall$ ” 表示“对每一个”或“对任意一个”. 例如,

“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ” 表示“对任意一个实数 x ”.

(2) “ $\exists$ ”表示“存在某个”或“至少存在一个”. 例如,

“ $\exists n \in \mathbf{N}^+$ ”表示“在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 中存在这样的数 n ”.

(3) “ $\Leftrightarrow$ ”表示“充分必要”或“等价于”. 例如,

“ $P_1 \Leftrightarrow P_2$ ”表示“ P_2 是 P_1 成立的充分必要条件”或“ P_1 等价于 P_2 ”.

又如, 设 $\delta, a \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$, 则

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta), \\ 0 < x - a < \delta &\Leftrightarrow a < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in (a, a + \delta), \\ 0 < a - x < \delta &\Leftrightarrow a - \delta < x < a \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a), \\ |x - a| \leq \delta &\Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta]. \end{aligned}$$

在一般的微积分教材中, ε 表示一个小正数, 所以 $\{x \mid |x| < \varepsilon\}$ 表示以 0 为中心, 以 ε 为半径的开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$, 即点 0 的 ε 邻域 $U_\varepsilon(0)$. 以下是一个简单而重要的原理:

若 $\forall \varepsilon > 0$, 都有 $|x| < \varepsilon$, 则 $x = 0$.

也就是说, 如果 $|x|$ 比任何正数都小, 那么 x 就是 0, 因为包含在每个以 0 为中心的开区间内的唯一的点是 0.

1.2 函数的概念

一、函数的定义

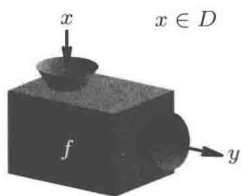


图 1.2.1

定义 1.2.1 (映射) 给定非空集合 D 和 M , 若按对应法则 f , D 中每个元素 x , M 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 是 D 到 M 的映射, 记作

$$f: D \rightarrow M \quad \text{或} \quad y = f(x), x \in D,$$

其中 $y = f(x)$ 称为 x 在 f 下的像, x 称为 y 的原像 (见图 1.2.1). 有时也将 $y = f(x)$ 记为 $y = y(x)$.

定义 1.2.2 设 $f: D \rightarrow M$.

(1) 若对于不同的 $x_1, x_2 \in D$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是单射;

(2) 若对于每一个 $y \in M$, 有 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$, 则称 f 是满射;

(3) 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是双射或一一对应.

定义 1.2.3 设 $f: D \rightarrow M$, $M \subseteq \mathbf{R}$.

(1) 若 $D \subseteq \mathbf{R}$, 则称 f 是 D 上的一元函数^①, 称 x 为自变量, y 为因变量.

(2) 若 $D \subseteq \mathbf{R}^2$, 则称 f 是 D 上的二元函数, 记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D \quad \text{或} \quad z = f(P), P \in D,$$

其中 P 表示点 $P(x, y)$, 称 x, y 为自变量, z 为因变量.

(3) 若 $D \subseteq \mathbf{R}^3$, 则称 f 是 D 上的三元函数, 记为

$$u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D \quad \text{或} \quad u = f(P), P \in D,$$

其中 P 表示点 $P(x, y, z)$, 称 x, y 和 z 为自变量, u 为因变量.

以上三种情况中, 集合 D 称为函数 f 的定义域. 对于 $x \in D$, $y = f(x)$ 称为 f 在点 x 的函数值, 全体函数值的集合

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

称为函数 f 的值域.

设函数 f 的定义域为 D , 我们称 f 在集合 E 上有定义是指 $E \subseteq D$. 特别地, 当 f 是一元函数, E 为开区间 (a, b) 、 $(a, +\infty)$ 、 $(-\infty, a)$ 、 $\mathbf{R}$ 以及某点的邻域或空心邻域时, f 在 E 上有定义通常也称为 f 在 E 内有定义.

如果函数用一个分析式 $y = f(x)$ 表达, 当没有标明它的定义域时, 我们就认为 f 的定义域是使这一表达式有意义的全体 x 的集合, 通常称它为自然定义域.

例如,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{和} \quad h(x) = \cos x$$

的自然定义域分别为 $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ 和 $\mathbf{R}$.

若函数 f 与 g 有相同的定义域 D , 而且对于任意 $x \in D$, 有 $f(x) = g(x)$, 则称 f 与 g 相等.

例如, $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 相等, $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = x$ 不相等, $f(x) =$

^① 函数的概念最早由苏格兰数学家和天文学家格雷果里 (J. Gregory, 1638 ~ 1675) 在 1667 年定义: “函数是这样的一个量: 它是从一些其他量经过一系列的代数运算而得到的, 或者经过任何其他可以想象到的运算得到的”. 当时的数学家们主要研究具体函数、具体计算, 不大考虑抽象问题. 1667 ~ 1837 年, 函数的概念经过了一系列的演变. 德国数学家狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805 ~ 1859) 用一种新观点来观察数学, 在 1837 年给出了 (一元) 函数的定义: “如果给定区间上的每一个 x 值, 都有唯一的 y 值与它对应, 那么 y 是 x 的函数”. 从此, 人们开始考察和研究函数的各种性质, 数学实现了从具体到抽象、从研究计算到研究性质、从研究现实世界到研究理想世界的三个转变. 直到 19 世纪集合论诞生后, 才出现比函数概念更一般的映射的概念. 映射的概念是德国数学家戴德金 (J. W. R. Dedekind, 1831 ~ 1916) 在 1887 年给出的.

$\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x) = x+1$ 也不相等.

设一元函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 则 $\mathbf{R}^2$ 的子集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的图像.

图 1.2.2 的三个图中, 前两个是一元函数的图像, 第三个不是.

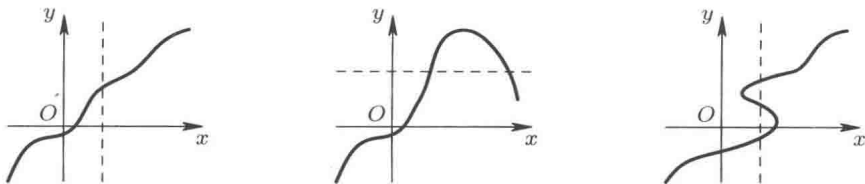


图 1.2.2

注 一条垂直于 x 轴的直线与一个一元函数的图像至多相交于一点 (当此直线通过定义域 D 的点时交于一点, 否则不交).

本书的前四章主要研究一元函数, 第 5 章主要研究二元函数, 相关结论有些可推广到三元或更多元函数的情形.

二、函数的表示法

一元函数最常用的表示法有如下三种:

(1) 解析法: 即自变量和因变量之间的函数关系借助公式 (或解析式) 表达, 例如, $y = x^2$, $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \sqrt{1+\sin x}$ 等. 本书主要讨论用解析法表示的函数, 这对理论研究很方便.

(2) 表格法: 即将一系列自变量的值与对应的函数值列成表, 如对数表、三角函数表等. 此表示法不但可以避免函数研究中麻烦的计算, 而且可以表示不知解析表达式的函数, 在社会实践中经常使用, 例如,

2011 年上半年我国消费者物价指数 (CPI) 表^①

x (月份)	1	2	3	4	5	6
y (CPI)	104.90	104.90	105.40	105.30	105.50	106.40

(3) 图示法: 即函数可由坐标平面上的曲线来表示, 如自动记录器, 可以把大气压力与时间的关系用曲线表示出来.

^① 数据来自国家统计局网站 <http://www.stats.gov.cn/>.

有些函数在其定义域不同部分用不同的公式表达, 我们称这类函数为分段函数.

$$\text{例 1.2.1 } y = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

此函数称为符号函数^①, 记作 $y = \operatorname{sgn} x$, 其图像见图 1.2.3.

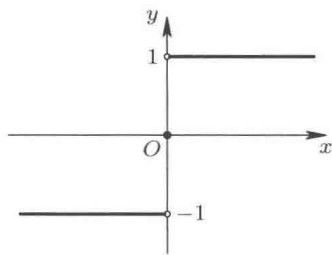


图 1.2.3

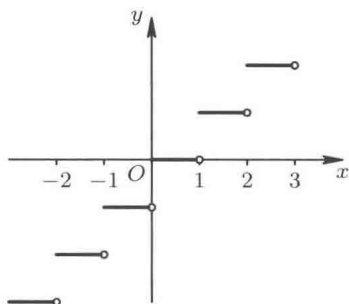


图 1.2.4

例 1.2.2 取整函数:

$$y = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

显然, 当 $x \in [n, n+1)$ (n 为整数) 时, $y = n$, 其图像见图 1.2.4.

有些函数只能用语言来描述.

例 1.2.3 狄利克雷^②函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

此函数的定义域为 $\mathbf{R}$ (其示意图见图 1.2.5).

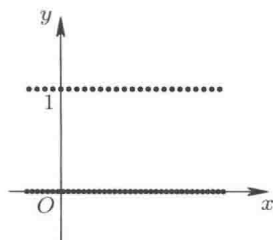


图 1.2.5

例 1.2.4 设 $A \subseteq \mathbf{R}$, 定义函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus A, \end{cases}$$

此函数称为数集 A 上的特征函数.

特别地, 当 A 是有理数集时, 函数 $\chi_A(x)$ 就是狄利克雷函数 $D(x)$.

当

$$A = (-\infty, -1), \quad A = [0, 1] \quad \text{和} \quad A = (1, 2)$$

时, 函数

$$\chi_{(-\infty, -1)}(x), \quad \chi_{[0, 1]}(x) \quad \text{和} \quad \chi_{(1, 2)}(x)$$

^① sgn 是拉丁文 *signum* (符号) 的缩写.

^② 狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet) 在 1829 年给出这个函数. 它是历史上第一个间断函数, 没有解析式, 图像不能准确显示, 无实际背景, 它的出现使函数的概念从解析式、几何直观以及客观世界的束缚中解放出来.

的图像分别见图 1.2.6 中的左图、中图和右图.

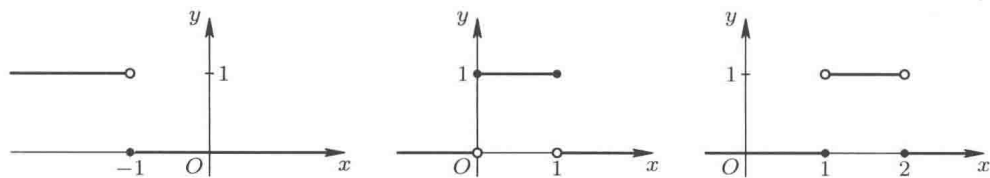


图 1.2.6

例 1.2.5 黎曼^①函数:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in (0, 1) \text{ (} m, n \text{ 为正整数, } \frac{m}{n} \text{ 为既约分数),} \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 或 } (0, 1) \text{ 中的无理数,} \end{cases}$$

其示意图如图 1.2.7 所示.

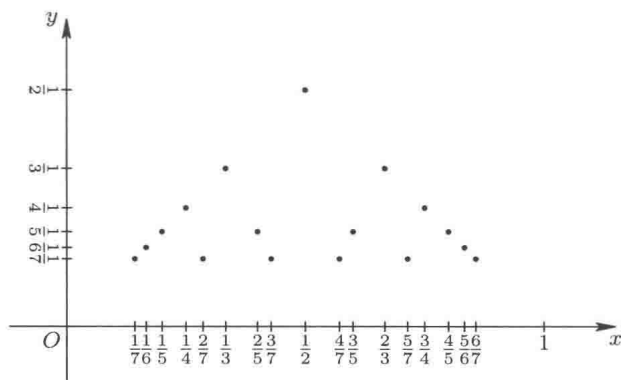


图 1.2.7

三、函数的四则运算

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2 , 且 $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差及积的运算如下:

$$F(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D,$$

$$G(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D,$$

$$H(x) = f(x)g(x), \quad x \in D.$$

当 $D^* = D \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$ 时, 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商如下:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D^*.$$

^① 黎曼 (B. Riemann, 1826 ~ 1866) 是德国数学家.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $\frac{\sin x}{x}$;

(2) $\frac{2x}{\cos x}$;

(3) $x^2 + \sqrt{x-1}$;

(4) $\cos x + \cot x$;

(5) $\frac{5x+1}{x^2-3x+2}$;

(6) $\sqrt{2+x-x^2}$;

(7) $\lg(x^2-9)$;

(8) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

2. 求下列函数的值域:

(1) $5 + \cot x$;

(2) $\sqrt{x} - 1$;

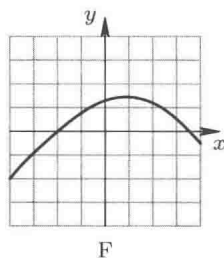
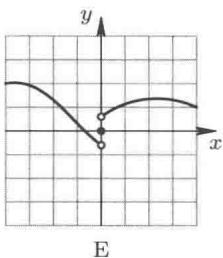
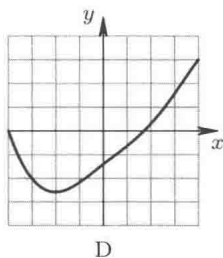
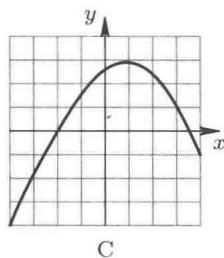
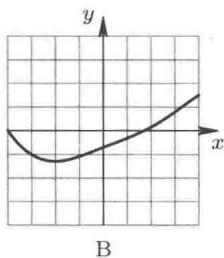
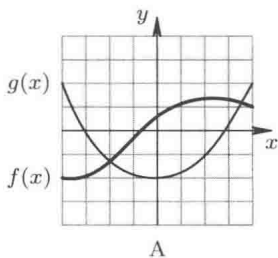
(3) $2 - 3^{-x}$;

(4) $\sqrt{1-x^2}$.

3. 设函数 $f(x) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(-1)$, $f(-x)$, $f(x+h)$.4. 作出函数 $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ 的图像.5. (1) 设函数 $f(x) = |x|$, $h > 0$. 求 $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(h) - f(0)$, $f(-h) - f(0)$;(2) 作出函数 $y = |x|$ 的图像, 并用其作出 $y = |x| - 1$, $y = |x| + 1$, $y = -|x|$, $y = -|x| + 1$, $y = |x-1|$, $y = |x+1|$ 以及 $y = |x-1| + 1$ 的图像.6. 设函数 $f(x) = |x|$, $g(x) = x$, 试作出函数

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \frac{f^2(x)}{g(x)} \text{ 以及 } \frac{f(x)}{g^2(x)}$$

的图像.

7. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图像如第 7 题图 A. 确定下列空格中的字母: $f(x) + g(x)$ 的图像符合 (), $f(x) - g(x)$ 的图像符合 (), $\frac{1}{2}[f(x) - g(x)]$ 的图像符合 (), $f(x) \cdot \operatorname{sgn} x$ 的图像符合 ().

第 7 题图