国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

DIRICHLET APPROXIMATION THEOREM AND KRONECKER APPROXIMATION THEOREM

Dirichlet 逼近定理和 Kronecker 逼近定理

朱尧辰　著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

DIRICHLET APPROXIMATION THEOREM AND KRONECKER APPROXIMATION THEOREM

Dirichlet逼近定理和Kronecker逼近定理

朱尧辰 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是一本关于丢番图逼近论的简明导引，主要涉及数学界公认的“划归”丢番图逼近论的论题，着重实数的有理逼近等经典结果和方法，适度介绍一些新的进展和问题.

本书适合大学师生及相关专业人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

Dirichlet 逼近定理和 Kronecker 逼近定理/朱尧辰著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978-7-5603-7091-0

Ⅰ. ①D… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①逼近论
Ⅳ. ①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 293449 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 23.5 字数 254 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7091-0
定 价 58.00 元

代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,"终身不复鼓琴".那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄．我真入迷了．从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事．

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生．如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来．我这一生，也许会走另一条路．人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂．

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆．好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书．抄，总抄得起．我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份．人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍．

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说："康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也．"可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即"涉猎"）相结合．

在先后次序上，我认为要从精于一开始．首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精．年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益．简言之，即"始于精于一，返于精于博"．正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

前　　言

丢番图逼近论是数论的重要而古老的分支之一,圆周率π的估计、天文研究和古历法的编制,以及连分数展开,等等,都是它的催生剂.近代和现代数学的发展,特别是丢番图方程和超越数论的研究,以及一致分布点列在拟Monte Carlo方法中的应用等,又使它发展成为一个活跃的当代数论研究领域. 实际上,丢番图逼近论与超越数论的研究常常互相交织在一起,不少数论专业会议或专著往往以两者为公共主题. 本书是一本关于丢番图逼近论的简明导引,主要涉及数学界公认的“划归”丢番图逼近论的那些论题,着重实数的有理逼近等经典结果和方法,适度介绍一些新的进展和问题.本书前身是作者的大学数论专业课程的讲稿,主要供大学理工科有关专业高年级学生和研究生阅读,也适当兼顾有关科研人员的参考需求.

本书含六章和一个附录.各章内容如下:第 1 章以Dirichlet逼近定理为中心展开,包括定理的扩充、改进和对实数无理性判定的应用,并基于实数的最佳逼近给出实数的连分数展开,以及Markov谱的简介等.第2章讲述一维和多维 Kronecker定理,包括定性和定量两种形式. 第3章研究不同类型的逼近问题间的关系 ,着重于Mahler转换定理及其应用.第4章的主题是与代数数有关的逼近问题,包括对代数数的逼近和用代数数的逼近两个方面,并且应用Schmidt逼近定理构造某些超越数. 第5章是度量数论的基本引论,以Khintchine定理为中心展开讨论,给出实数有理逼近的度量性结果.第6

章给出模1一致分布理论的基本结果,以及一致分布点列与数值积分的关系. 结束语中简单介绍了本书没有涉及的丢番图逼近问题,如复数的丢番图逼近、p-adic丢番图逼近以及矩阵的丢番图逼近等.附录汇集了正文中多处用到的数的几何的基本结果.

限于作者的水平,书中谬误和不妥在所难免,欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰

2016年6月

于北京

符号说明

(按CTex通用符号)

1° $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ (依次) 正整数集,整数集,有理数集,实数集,复数集.

$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\mathbb{R}_+$ 正实数集.

$|S|$ 有限集S所含元素的个数(也称S的规模).

$|A|,\mu(A)$ 集合A的Lebesgue测度.

2° $[a]$ 实数a的整数部分,即不超过a的最大整数.

$\{a\}=a-[a]$ 实数a的分数部分,也称小数部分.

$\|x\|$ 实数x与距它最近的整数间的距离.

$\overline{x}$ 表示$\max\{|x|,1\}$,此处x为实数.

$\delta_{i,j}$ Kronecker符号,即当$i=j$时其值为1,否则为0.

$\mu(n)$ Möbius函数.

$\phi(n)$ Euler函数.

$\ll,\gg$ Vinogradov符号.例如,$f(x)\ll g(x)$表示$|f(x)|\leqslant c|g(x)|$, $f(x)\gg g(x)$表示$|f(x)|\geqslant c|g(x)|$,其中c是一个常数.

$\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)$ 复数z的实部和虚部系数.

$\mathrm{sgn}(a)$ 非零实数a的符号.

3° $\log_b a$ 实数$a>0$的以b为底的对数.

$\log a$(与$\ln a$同义) 实数$a>0$的自然对数.

$\lg a$　实数$a>0$的常用对数(即以10为底的对数).

$\exp(x)$　指数函数e^x.

$[v_0;v_1,v_2,\cdots]$　(简单)连分数.

4° $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$　向量$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n),\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$的内积(数量积), 即$x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

$|\mathbf{x}|_0$　表示$\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_n$, 其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$|\mathbf{x}|$　表示$|x_1||x_2|\cdots|x_n|$, 其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$\overline{|\mathbf{x}|}$　表示$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, 其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$\{\mathbf{x}\}$　表示向量$(\{x_1\},\cdots,\{x_s\})$,其中$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_s)\in\mathbb{R}^s$.

$\mathbf{a}<\mathbf{b}$(或$\mathbf{a}\leqslant\mathbf{b}$)　表示$a_i<b_i$(或$a_i\leqslant b_i$)$(i=1,\cdots,s)$,其中$\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_s),\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_s)\in\mathbb{R}^s$.

$[\mathbf{a},\mathbf{b})$(或$[\mathbf{a},\mathbf{b}]$)　表示$\{\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\in\mathbb{R}^s,\mathbf{a}\leqslant\mathbf{x}<\mathbf{b}$(或$\mathbf{a}\leqslant\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$)$\}$($s$维长方体),其中$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^s$.

$(a_{i,j})_{m\times n}$　第i行、第j列元素为$a_{i,j}$的$m\times n$矩阵.

$(a_{i,j})_n$　第i行、第j列元素为$a_{i,j}$的n阶方阵,不引起混淆时可记为$(a_{i,j})$.

$\mathbf{I}_n$　n阶单位方阵,不引起混淆时可记为$\mathbf{I}$.

$\mathbf{O}_n$　n阶零方阵,不引起混淆时可记为$\mathbf{O}$.

$\det(\mathbf{A}),\det(a_{ij}),|\mathbf{A}|$　方阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$ 的行列式.

5° $\deg(\theta)$　代数数θ的次数.

$H(\theta);L(\theta)$　代数数θ的高;长.

$H_K(\theta)$　代数数θ对于数域K的高.

$H(P); L(P)$　多项式P的高;长.

目　　录

第0章 引　　言

用有理数近似一个给定的实数,其误差可以小到什么程度,这就是所谓实数的有理逼近问题.它是丢番图逼近论中最早被研究的一个基本问题.虽然作为数论的一个分支,丢番图逼近论通常是大学数论专业的一门基础课程,但实际上,对于喜好数学的青年,早在他们大学低年级(甚至高中)学习时期, 就已或多或少地接触到某些本质上涉及丢番图逼近论的数学问题.我们容易在各类大学生(甚至中学生) 的数学竞赛题或竞赛备考题中找到这样的例子.

例1 (Putnum试题,1949)　以开区间$(0,1)$中的每个有理数p/q(其中p,q是互素的正整数) 为中心作一个长度为$1/(2q^2)$的闭区间,则数$\sqrt{2}/2\in(0,1)$不属于任何一个这样的闭区间.

解　因为$p/q\in(0,1)$,所以$0<p<q$.以p/q为中心且长度为$1/(2q^2)$的闭区间是集合

$$\left\{x\in(0,1)\ \middle|\ \left|x-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2}\right\}.$$

因此问题的结论等价于:对于任何互素的整数$p,q,0<p<q$,有

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{4q^2}.$$

用反证法.如果存在$p/q\in(0,1)$(其中整数$p,q>0$互素)满足

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{4q^2},$$