·普通高等学校规划教材·

GAILÜLUN YU SHULITONGJI XUEXI ZHIDAOSHU

概率论与数理统计学习指导书

张　雷　赵磊娜　邹昌文◎主　编

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Zhidaoshu

概率论与数理统计学习指导书

张　雷　赵磊娜　邹昌文　主　编

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书按照浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计》(第四版)的框架结构和顺序,每一章编排了六部分内容:教学基本要求、重点与难点(疑难分析)、主要内容总结、典型例题分析、基础练习题和提高练习题。为了让学生对概率论与数理统计的发展历史有所了解,本书还整理汇编了概率史和统计史的有关资料。

本书可供高等学校理工科和经管类专业师生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导书 / 张雷,赵磊娜,邹昌文主编. — 北京 : 人民交通出版社股份有限公司,2017.7

ISBN 978-7-114-13958-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… ②赵… ③邹… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 152886 号

书　　名: 概率论与数理统计学习指导书
著 作 者: 张　雷　赵磊娜　邹昌文
责任编辑: 富砚博　郭红蕊
出版发行: 人民交通出版社股份有限公司
地　　址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址: http://www.ccpress.com.cn
销售电话: (010)59757973
总 经 销: 人民交通出版社股份有限公司发行部
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 北京盈盛恒通印刷有限公司
开　　本: 787×1092　1/16
印　　张: 7.5
字　　数: 174 千
版　　次: 2017 年 7 月　第 1 版
印　　次: 2017 年 7 月　第 1 次印刷
印　　数: 0001—3000 册
书　　号: ISBN 978-7-114-13958-1
定　　价: 25.00 元

前 言

概率论与数理统计作为一门探索和研究客观世界随机现象规律性的数学学科,是高等学校理工科和经管类专业学生必修的公共基础课,也是全国硕士研究生入学考试数学科目的必考内容之一。概率论与数理统计课程具有内容丰富、技巧性强、应用广泛等特点,要求学生不仅能掌握课程的基本概念、基本理论,还需要在课外进行一定数量习题练习以拓展课堂知识,掌握解题方法与技巧。

为了给学生提供一本全面的课后学习参考资料,给讲授这门课程的教师提供教学参考书,由数位教学经验丰富且长年工作在教学一线的中青年教师,结合长期的教学实践和教学经验,按照浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计》(第四版)的框架结构和顺序编写了本书。本书信息量较大,针对每一章编排了六部分内容:教学基本要求、重点与难点(疑难分析)、主要内容总结、典型例题分析、基础练习题和提高练习题。为了让学生对概率论与数理统计的发展历史有所了解,本书还整理汇编了概率史和统计史的有关资料。

本书的编写工作由张雷、赵磊娜、邹昌文完成:张雷编写第1~4章,赵磊娜编写第5~7章,邹昌文编写第8章,全书由邹昌文负责统稿和校对。

本书编写过程中参考了相关的教材和书籍,并得到了重庆交通大学教务处、数学与统计学院以及相关部门领导的大力支持。在此仅向关心和支持本书出版的所有领导和同仁表示衷心的感谢!

限于编者水平,书中疏漏、不妥之处在所难免,恳请各位专家、同行、读者批评指正,在此深表谢意!

编 者

2017年3月

目　录

第1章 概率论的基本概念

1.1 教学基本要求

(1)理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握随机事件之间的关系与运算;

(2)理解事件频率、概率概念,掌握概率的基本性质,会运用性质进行概率的计算;

(3)理解条件概率的定义,掌握概率的加法公式、乘法公式,会应用全概率公式和贝叶斯公式;

(4)理解事件独立性的概念,会用事件独立性进行概率计算的方法。

1.2 重点与难点

重点:

(1)随机事件及事件间的运算关系;

(2)概率的公理化定义及概率的基本性质的应用;

(3)乘法定理及条件概率公式;

(4)事件的独立性及应用独立性进行有关概率的计算。

难点:

(1)概率的公理化定义及概率的基本性质的应用;

(2)条件概率、全概率公式和贝叶斯公式的应用。

1.3 主要内容

1.3.1 主要内容结构

主要内容结构如图1.1所示。

1.3.2 知识点概述

1)随机试验、样本空间、随机事件

(1)随机现象:事先无法准确预知其后果的现象。

(2)随机试验:对随机现象的观测称为随机试验,记为 E。随机试验一般应满足如下三个

条件:相同条件下可以重复试验;试验的结果是可以观察的,所有可能结果是明确的;每次实验将要出现的结果是不确定的,事先无法准确预知。

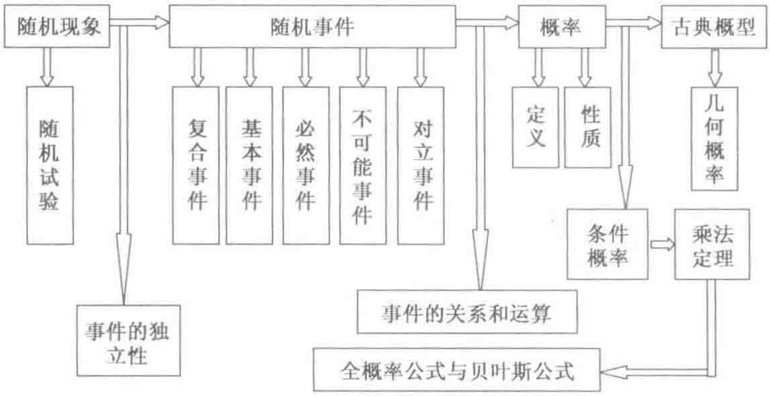

图 1.1　主要内容结构图

(3)样本点:随机试验的每个可能的结果称为该试验的一个样本点。

(4)样本空间:一个随机实验所有样本点构成的集合称为该试验的样本空间,记为 S。

(5)随机事件:随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件,记为 A, B,…。

(6)基本事件:由一个样本点组成的单点集。

(7)必然事件:在试验中一定发生的事件,记为 S。

(8)不可能事件:在每次试验中都不发生,记为 $\varnothing$。

2)事件间的关系与事件的运算

(1)包含:如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

(2)相等:如果 $A\subset B$,且 $B\supset A$,则称事件 A 与 B 相等,记作 $A=B$。

(3)事件的并(和):“两个事件 A 与 B 中至少有一个事件发生”这一事件称为事件 A 与 B 的并(和),记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

(4)事件的交(积):“两个事件 A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与 B 的交(积),记作 $A\cap B$ 或 AB。

(5)事件的差:“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与 B 的差,记作 $A-B$。

(6)互不相容(互斥):如果两事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的,或互斥的。

(7)对立事件:“事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的对立事件,记作 $\bar{A}$。事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当满足 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$。

【备注】 事件 A 与事件 B 互逆可推出事件 A 与事件 B 互斥,反之不对。

3)事件的关系与运算性质

(1)基本性质

①$\varnothing\subset A\subset S$;

②$A-B=A\overline{B}=A-AB$；

③$\overline{A}=S-A$；

④$A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup(B-A)\cup(AB)$；

⑤$\overline{\overline{A}}=A$。

(2)运算律

①交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

②结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

③分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

④德摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

4)频率的定义和性质

(1)频率的定义:事件 A 在 n 次试验中出现的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$。

(2)频率的性质:

①$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

②$f_n(S)=1$；

③若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

5)概率的定义和性质

(1)概率的定义:设 E 为随机试验,S 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

非负性:对于每一事件 A,均有 $P(A)\geqslant 0$；

规范性:对于必然事件 S,有 $P(S)=1$；

可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,即对于 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

(2)概率的性质:

①$P(\varnothing)=0$；

②有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

③若 $A\subset B$,则有 $P(B)\geqslant P(A)$,且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

【注】 一般地,对任意事件 A、B,有减法公式

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B\overline{A})$$

④对任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

⑤对任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

⑥对任意两事件 A、B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

对任意三个事件 A、B、C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

6）古典概率

（1）古典概型的假设条件：

①实验的样本空间只包含有限个元素；

②实验中每个基本事件发生的可能性相同。

（2）古典概型的概率计算公式：

设 S 是一个古典概型样本空间，则对任意事件 A，有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中的样本点数}}{S\text{ 中的样本点数}}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}$$

7）条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的概率。

条件概率具有如下性质：

①$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$；

②$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$。

【备注】 在固定 A 的条件下 $P(B|A)$ 为概率，故有关概率的其他性质对条件概率也成立。

8）乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式

（1）乘法公式：

①两个事件：设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$；

②n 个事件：设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})。$$

（2）全概率公式：

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，即 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，$B_iB_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n)$$

（3）贝叶斯公式：

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}i=1,2,\cdots,n$$

9）独立性

（1）若两个事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立。

（2）若事件 A 与 B 相互独立，则事件 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

（3）事件 A、B、C，若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$、$P(AC)=P(A)P(C)$、$P(BC)=P(B)P(C)$，且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则三个事件相互独立。

（4）若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任何事件 B 都独立。

(5)若 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 相互独立,则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$。

【备注】 独立的本质就是两事件中一事件的发生与否不影响另一事件发生的概率,即条件概率等于无条件概率:$P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)$。

1.4 典型例题分析

1.4.1 有关事件的关系与运算的例题

【例 1.1】 一个工人生产了3个零件,以事件 A_i 来表示他生产的 i 个零件是合格品($i=1,2,3$),试用 $A_i(i=1,2,3)$ 表示下列事件:

(1)只有第一个零件是合格品 B_1;

(2)三个零件中只有一个合格品 B_2;

(3)第一个是合格品,但后两个零件中至少有一个次品 B_3;

(4)三个零件中最多只有两个合格品 B_4;

(5)三个零件都是次品 B_5;

(6)三个零件中最多有一个次品 B_6。

【解】 (1)B_1 等价于:"第一个零件是合格品,同时第二个和第三个都是次品",故有 $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$。

(2)B_2 等价于"第一个是合格品而第二、三个是次品"或"第二个是合格品而第一、三个是次品"或"第三个是合格品而第一、二个是次品",故有 $B_2=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$。

(3)$B_3=A_1(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)$。

(4)(方法一) 事件 B_4 的逆事件是"三个零件都是合格品",故 $B_4=\overline{A_1A_2A_3}$。

(方法二)与 B_4 等价的事件是"三个零件中至少有一个次品",于是 $B_4=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$。

(5)$B_5=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,可以利用事件"三个零件中至少有一个次品"的逆事件与 B_5 等价,得出 $B_5=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$。

(6)B_6 等价于"三个事件中无次品"或"三个零件中只有一个次品",故有 $B_6=A_1A_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$。

另外,也可以利用 B_6 与事件"三个零件中至少有两个合格品"等价,知 $B_6=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$。 【解毕】

【例 1.2】 设随机事件 A、B、C 满足 $C\supset AB$,$\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$,证明:$AC=C\overline{B}\cup AB$。

【思路】 要证 $AC=C\overline{B}\cup AB$。由于左边没有 B 出现,故可利用 B 和 $\overline{B}$ 构成 S 的一个划分,将 AC 写成 $AC=ACS=AC(B\cup\overline{B})=ACB\cup AC\overline{B}$再利用题设的条件来证明。

【证】 由于 $\overline{C}\supset\overline{A}\,\overline{B}$,故 $C\subset A\cup B$,从而

$$C\overline{B}\subset(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}$$

$$CA\overline{B}=C\overline{B}\cap A\overline{B}$$

$$ACB=C\cap AB=AB$$

故

$$AC = AC(B\cup\overline{B}) = ACB\cup AC\overline{B} = C\overline{B}\cup AB$$ 【证毕】

【技巧】 类似问题,可首先利用图来考查,从而可直观地给出事件之间的关系。

1.4.2 利用概率性质进行计算

【例 1.3】 已知 $P(A)=p, P(B)=q, P(A\cup B)=p+q$,求 $P(\overline{A}\cup B)$的值。

【解】 由概率公式直接计算:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\cup B) &= P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}B) \\ &= P(\overline{A}) + P(B) - [P(B) - P(AB)] \\ &= P(\overline{A}) = 1-p \end{aligned}$$ 【解毕】

【备注】 由题设及加法法则知 $P(AB)=0$,尽管 AB 一般不等于$\varnothing$,但在概率计算时,视其为$\varnothing$也不会影响计算结果。在求填空题时,这是一种很好的技巧。

由于 $P(A)=p, P(B)=q, P(A\cup B)=p+q$,故

$$B\subset\overline{A}$$

从而

$$P(\overline{A}\cup B) = P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-p$$

【例 1.4】 已知 $P(AB)=0.2, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.6$,求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$的值。

【解】 由于 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1-P(A+B)$

又因为

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

所以

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= 1-[P(A)+P(B)-P(AB)] \\ &= 1-[P(AB)+P(A\overline{B})+P(B)-P(AB)] \\ &= 1-0.6-0.4=0 \end{aligned}$$ 【解毕】

【例 1.5】 设 A、B 为两事件,且 $P(A)=p, P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,求 $P(B)$。

【解】 由于

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

又由于 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,故

$$P(B) = 1-P(A) = 1-p$$ 【解毕】

1.4.3 古典概型的概率计算

【例 1.6】 (袋中取球问题)一袋中有 9 个球,其中 4 个黑球,5 个白球,现随机地按下列方式从袋中取出 3 个球,试求取出的球中恰好有 2 个黑球、1 个白球的概率。

(1)一次取三个;

(2)一次取一个,取后不放回;

(3)一次取一个,取后放回。

【思路】 这是古典概型中的一类最基本的问题,许多问题都可归结为此类问题。问题的特点是所考虑的事件中只涉及球的颜色,不涉及取球的顺序。

【解】 设三种方式下对应的三个事件分别为 A_1、A_2、A_3,由古典概型得

(1)$P(A_1)=\dfrac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}$;

(2)$P(A_2)=\dfrac{P_4^2P_5^1C_3^2}{P_9^3}=\dfrac{5}{14}$;

(3)$P(A_3)=\dfrac{C_3^1\times 4^2\times 5}{9^3}=\dfrac{80}{243}$。 **【解毕】**

【备注】 在抽球问题中,"一次取出 k 个球"与"逐个无放回取出 k 个球"所对应事件的概率是相同的,但与"有放回取出 k 个球"是不同的。

【例 1.7】 (排序问题)在整数 0 ~9 这 10 个数中任取 4 个不同的数,能排成一个四位偶数的概率是多少?

【解】 记事件 A 为"能排成一个四位数",据题意按两种情况分析,按个位、千位、百位、十位的次序进行排序,个位为 0 的情况有 $1\times9\times8\times7$ 种排法,个位不为 0 的情况有 $4\times8\times8\times7$ 种排法,故

$$P(A)=\frac{1\times9\times8\times7+4\times8\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\frac{41}{90}$$ **【解毕】**

【备注】 四位偶数有两个要求,即个位必须是偶数,且千位不能为 0。

1.4.4 条件概率的计算

【例 1.8】 某种机器按设计要求使用寿命超过 20 年的概率为 0.8,超过 30 年的概率为 0.5,该机器使用 20 年后,将在 10 年内损坏的概率为多少?

【思路】 该问题是一个典型的条件概率的题目,直接由条件概率的定义计算可得。

【解】 设 $A=\{$该机器使用寿命超过 20 年$\}$,$B=\{$该机器使用寿命超过 30 年$\}$。

现求在事件 A 发生的条件下,事件 $\overline{B}$ 发生的条件概率,由定义得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.8}=\frac{5}{8}$$

进而

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$ **【解毕】**

【例 1.9】 一次掷 10 颗骰子,已知至少出现一个一点,问至少出现两个一点的概率是多少?

【思路】 由于"至少出现两个一点"包含了在同一条件下恰好出现"两个一点","三个一

点”,……,“10 个一点”9 种情形,因此转而考虑其逆事件较为简便地。

【解】 设 $A=\{$至少出现一个一点$\}$,$B=\{$至少出现两个一点$\}$。则所求概率为

$$P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid A)=1-\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}$$

因为 $B=\{$至少出现两个一点$\}$,故 $\overline{B}A=\{$恰好出现一个点$\}$,于是

$$P(\overline{B}A)=\frac{10\times 5^9}{6^{10}}\approx 0.3230$$

且

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5^{10}}{6^{10}}\approx 0.8385$$

所以 $$P(B|A)=1-\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}\approx 1-\frac{0.3230}{0.8385}=0.6148$$ 【解毕】

1.4.5 有关乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式的计算

【例 1.10】 一批产品共 100 件,对产品进行不放回抽样检查,整批产品不合格的条件是:在被检查的 5 件产品中至少有一件是次品,如果在该批产品中有 5% 是次品,求该批产品被拒绝接受的概率。

【思路】 设 $A=\{$该批产品被拒绝接受$\}$;$A_i=\{$被检查的第 i 件产品是次品$\}$,$i=1,2,\cdots,5$,则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$,要直接利用加法公式计算很复杂,因而转为考虑求其逆事件的概率,而后者可由乘法公式来计算。

【解】 由于 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$,故

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_5\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)\end{aligned}$$

又

$$P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=\frac{95}{100}$$

$$P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{94}{99},P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{93}{98}$$

$$P(\overline{A}_4\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{92}{97},P(\overline{A}_5\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=\frac{91}{96}$$

故

$$P(A)=1-\frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{93}{98}\times\frac{92}{97}\times\frac{91}{96}=0.23$$ 【解毕】

【注】 其实,此题也可以直接用古典概型来计算 $\overline{A}$ 的概率,因为 $\overline{A}$ 只有一种情况,即所取第 5 件均为正品,故 $P(\overline{A})=\frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}$,从而

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{95}^5}{C_{100}^5} = 0.23$$

【例 1.11】 对某一目标依次进行了三次独立的射击,设第一、二、三次射击的命中率分别为0.4、0.5 和0.7,试求:

(1)三次射击中恰好有一次命中的概率;

(2)三次射击中至少有一次命中的概率。

【解】 令 $A_i=\{$第 i 次射击命中目标$\}$,$i=1,2,3$

$B=\{$三次中恰好有一次命中$\}$;$C=\{$三次中至少有一次命中$\}$

则

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

由 A_1、A_2、A_3 的独立性知

(1)$P(B)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$

$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$

$=0.36$

(2)$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})$

$=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91$ **【解毕】**

【技巧】 通常积事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 的概率计算需要通过乘法公式来进行,但一旦知道了它们是相互独立的,那么,只要知道 $P(A_i)$,不仅它们的积事件的概率能直接求出,而且和事件、差事件等的概率也可容易地求得。例如:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$P(A_1 - A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2)$$

【例 1.12】 设有白球和黑球各4只,从中任取4只放入甲盒,余下4只放入乙盒,然后分别在两盒中各任取一只,颜色正好相同,试问放入甲盒的4只球有几只白球的概率最大,且求出此概率。

【解】 设 $A=\{$从甲、乙两盒中各取一球,颜色相同$\}$,

$$B_i=\{\text{甲盒中有 } i \text{ 只白球}\},i=0,1,2,3,4$$

显然 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 构成一完备事件组,又由题设知

$$P(B_i) = \frac{C_4^iC_4^{4-i}}{C_8^4}, i = 0,1,\cdots,4$$

且

$$P(A\mid B_1)=\frac{3}{8},P(A\mid B_2)=\frac{4}{8},P(A\mid B_3)=\frac{3}{8}$$

$$P(A\mid B_0)=P(A\mid B_4)=0$$

从而由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{5}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}\times\frac{3}{8}+\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}\times\frac{4}{8}+\frac{C_4^3C_4^1}{C_8^4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{7}$$

从而再由贝叶斯公式得

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{35}\times\frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{5}$$

$$P(B_2\mid A)=\frac{P(B_2)P(A\mid B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{18}{35}\times\frac{4}{8}}{\frac{3}{7}}=\frac{3}{5}$$

$$P(B_3\mid A)=\frac{P(B_3)P(A\mid B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{35}\times\frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{5}$$

$$P(B_0\mid A)=P(B_4\mid A)=0$$

即放入甲盒的4只球中只有两只白球的概率最大,最大值为$\frac{3}{5}$。 【解毕】

【例1.13】 设有甲、乙、丙三门炮,同时独立地向某目标射击,各炮的命中率分别为0.2、0.3和0.5,目标被命中一发而被击毁的概率为0.2,被命中两发而被击毁的概率为0.6,被命中三发而被击毁的概率为0.9,求:

(1)三门炮在一次射击中击毁目标的概率;

(2)在目标被击毁的条件下,只由甲炮击中的概率。

【思路】 设事件A_1、A_2、A_3分别表示甲、乙、丙炮击中目标,D表示目标被击毁,H_i表示由i门炮同时击中目标($i=1,2,3$),则由全概率公式有

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(D\mid H_i)$$

式中$P(H_i)$要由题设条件及独立性来求,而第二问可利用贝叶斯公式来处理。

【解】 设D、A_i、H_i($i=1,2,3$)同上所设,且由题设知

$$P(A_1)=0.2,P(A_2)=0.3,P(A_3)=0.5$$

$$P(D\mid H_1)=0.2,P(D\mid H_2)=0.6,P(D\mid H_3)=0.9$$

由于A_1、A_2、A_3相互独立,故

$$
\begin{aligned}
P(H_1) &= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\
&= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) +\\
&\quad P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\
&= 0.2\times 0.7\times 0.5 + 0.8\times 0.3\times 0.5 + 0.8\times 0.7\times 0.5\\
&= 0.47
\end{aligned}
$$

同理

$$P(H_2) = P(A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3) = 0.22$$

$$P(H_3) = P(A_1A_2A_3) = 0.03$$

(1)由全概率公式得

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(D\mid H_i) = 0.47\times 0.2 + 0.22\times 0.6 + 0.03\times 0.9 = 0.253$$

(2)由贝叶斯公式得

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\mid D) = \frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3D)}{P(D)} = \frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(D\mid A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)}{P(D)} = 0.0554$$ **【解毕】**

1.4.6　有关事件独立性的计算

【例 1.14】　设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，而 $P(A_k) = p_k(k=1,2,\cdots,n)$，试求：

(1)各事件至少发生一次的概率；

(2)各事件恰好发生一次的概率。

【解】　(1)

$$
\begin{aligned}
P(\text{至少发生一次}) &= P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\
&= 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)\\
&= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)\\
&= 1 - (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P(\text{恰好发生一次}) &= P(A_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) + P(\overline{A}_1A_2\cdots\overline{A}_n) + \cdots + P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots A_n)\\
&= p_1(1-p_2)\cdots(1-p_n) + (1-p_1)p_2\cdots(1-p_n) + \cdots +\\
&\quad (1-p_1)(1-p_2)\cdots p_n
\end{aligned}
$$

【解毕】

【技巧】　至少发生其一的问题，通常转化为其对立事件来考虑。多个事件相互独立的性质在概率的计算中有重要的应用。

1.5　基础练习题

一、判断题(在每题后的括号中对的打"√"错的打"×")

1. 概率论与数理统计是一门研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科。　(　　)