



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

WOLSTENHOLME THEOREM

Wolstenholme 定理

刘培杰数学工作室 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



WILEY-INTERSCIENCE

WILEY-INTERSCIENCE
JOHNSON CITY, N.Y. 13790-2100

WILEY-INTERSCIENCE

Wolstenholme 定理

Wolstenholme's Theorem



WILEY-INTERSCIENCE



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

WOLSTENHOLME THEOREM

Wolstenholme 定理

刘培杰数学工作室 编著

内 容 简 介

Wolstenholme 定理是数论中与素数有关的著名定理,可以利用多种方法对其进行证明.例如,多项式的方法,幂级数的方法以及群论的方法.本书利用初等数论的知识给出了它的一个简单证明,并对其进行了推广.

本书适合大学生、研究生以及数论爱好者阅读、钻研.

图书在版编目(CIP)数据

Wolstenholme 定理/刘培杰数学工作室编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6687-6

I. ①W… II. ①刘… III. ①初等数论
IV. ①O156.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 136900 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 19.75 字数 211 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6687-6
定 价 138.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.

真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了我的极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片。

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此。一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇，诚绝唱也。《论语》束身严谨，勇于面世，“己所不欲，勿施于人”，有长者之风。司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句：“人生自古谁无死，留取丹心照汗青”“休言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书；有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

第 1 编 推广加强编

第 1 章 Wolstenholme 定理及其推广 //3

- § 0 引言 //3
- § 1 符号分数及其性质 //6
- § 2 调和级数和的整除性质 //10
- § 3 利用 Catalan 恒等式给出的
简单证明 //16
- § 4 Catalan 恒等式与级数
求和 //21
- § 5 哈代论 Wolstenholme
定理 //29
- § 6 Wolstenholme 定理的
一个证明 //32
- § 7 Wolstenholme 定理的
推广 //36
- § 8 Wolstenholme 定理的一个
 p -adic 证明及其推广 //40

- § 9 一个中学教师给出的 Wolstenholme 定理的推广 // 48
- § 10 若干数论问题的注记 // 51
- § 11 数论史专家 Dickson 对 $1, 2, \dots, p-1$ 模 p 的对称函数相关结果的综述 // 58

第 2 编 基础编

第 2 章 整除性的基本性质, 整除的特征 // 73

- § 1 整除性: 一般定理 // 73
- § 2 整除的特征 // 79

第 3 章 最大公约数, 最小公倍数 // 90

- § 1 最大公约数 // 90
- § 2 最小公倍数 // 100

第 4 章 素数 // 108

第 5 章 分数 // 125

- § 1 分数的初始定义 // 125
- § 2 分数的第二个定义, 等式, 化成同分母 // 133
- § 3 加法和减法 // 139
- § 4 乘法 // 148
- § 5 除法 // 163
- § 6 重分数 // 167

§ 7 比例,成比例的数 //173

第 6 章 十进分数 //189

§ 1 十进分数,定义,运算 //189

§ 2 普通分数转换为十进分数 //198

§ 3 循环的十进分数 //210

§ 4 一个已知数以 α 为误差的近似值 //220

§ 5 小数除法 //224

第 7 章 数论初步 //234

§ 1 某些整数列的余数的周期性 //234

§ 2 一元同余式(I) //244

§ 3 余数周期性的新成果, Fermat 定理 //253

§ 4 Fermat 定理又一证法, Wilson 定理,
二次余数 //256

§ 5 互反律 //262

§ 6 不超过一已知数而跟它互素的数的
个数 //277

§ 7 一元同余式(II) //280

§ 8 一元同余式,模为素数的情况 //285

§ 9 幂的余数,元根,指数理论,二项
同余式 //291

编辑手记 //299

第 1 编

推广加强编



Wolstenholme 定理及其推广

第

1

章

§ 0 引 言

我们先来看一道 2017 年北京市中学生数学竞赛高一年级复赛试题:

试题 A 设

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016} = \frac{a}{b}$$

其中 a, b 为自然数, 且 $(a, b) = 1$, 证明: $2017^2 \mid a$.

证明 由

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016}\right) \times 2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2016}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2015}\right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2016} + 1\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2\ 017}{1 \times 2\ 016} + \frac{2\ 017}{2 \times 2\ 015} + \cdots + \frac{2\ 017}{2\ 015 \times 2} + \frac{2\ 017}{2\ 016 \times 1} \quad (*)$$

对每个 $i \in \{1, 2, \dots, 2\ 016\}$, 不定方程 $ix + 2\ 017y = 1$ 有整数解 (x_0, y_0) , 所以

$$ix_0 \equiv 1 \pmod{2\ 017}$$

设

$$x_0 \equiv i' \pmod{2\ 017}$$

其中

$$i' \in \{1, 2, \dots, 2\ 016\}$$

因此, 对每个 $i \in \{1, 2, \dots, 2\ 016\}$, 都存在唯一的 $i' \in \{1, 2, \dots, 2\ 016\}$, 使得 $i \times i' \equiv 1 \pmod{2\ 017}$, 且当 $i \neq j$ 时, $i \neq j'$.

对每一项

$$\frac{1}{i(2\ 017 - i)} = \frac{(i')^2}{i' \times i \times (2\ 017 - i) \times i'} = \frac{(i')^2}{M_i}$$

其中

$$i = 1, 2, \dots, 2\ 016$$

$$M_i = i' \times i \times (2\ 017 - i) \times i'$$

显然 $M_i \equiv -1 \pmod{2\ 017}$.

于是由式 (*) 得

$$\begin{aligned} \frac{2a}{2\ 017 \times b} &= \frac{1}{1 \times 2\ 016} + \frac{1}{2 \times 2\ 015} + \cdots + \frac{1}{2\ 015 \times 2} + \frac{1}{2\ 016 \times 1} \\ &= \sum_{i=1}^{2\ 016} \frac{(i')^2}{M_i} \\ &= \sum_{i=1}^{2\ 016} \frac{(i')^2 \times M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \cdots \times M_{2\ 016}}{M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{2\ 016}} \end{aligned}$$

