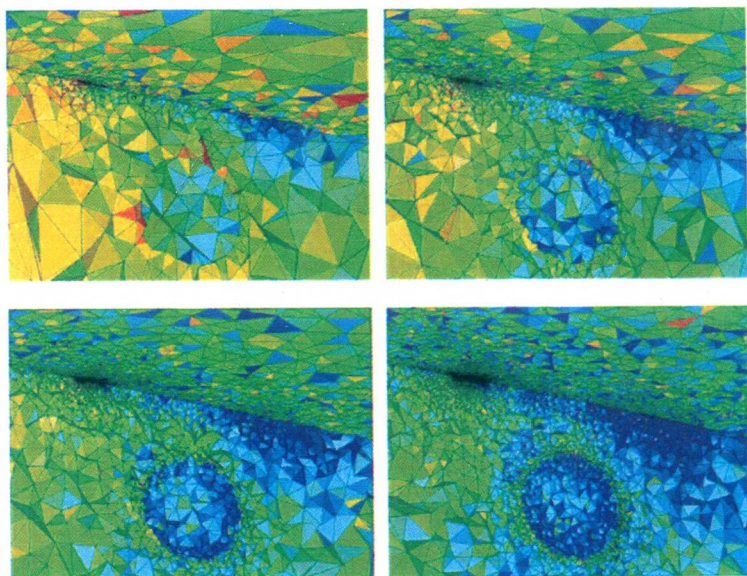


直流电阻率 有限单元法及进展

任政勇 汤井田 潘克家 邱乐稳 王飞燕 著



科学出版社

直流电阻率有限单元法及进展

任政勇 汤井田 潘克家 邱乐稳 王飞燕 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了直流电阻率的有限单元法模拟技术。全书共 7 章, 书后含附录。第 1 章介绍了直流电阻率法数值模拟的背景、有限单元法在该领域的应用现状及基本策略; 第 2 章对标准的有限单元法进行了详细的阐述, 分析了其各个过程所存在的缺陷, 包含边值问题的处理、网格单元的离散、大型稀疏方程组的求解及数值模拟结果的评价; 第 3 章介绍了基于非结构网格的自适应加密有限元法; 第 4 章引入了外推瀑布式多网格的有限元法; 第 5 章和第 6 章对面向目标的自适应有限元法做了详细的介绍, 其中第 5 章针对各向同性介质, 而第 6 章延伸到各向异性介质; 第 7 章总结全文; 附录为一些基本模型的电场解析解。

本书可供地球物理专业的本科生、研究生及从事这方面工作的科研、工程技术人员阅读, 也可作为计算数学专业师生的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

直流电阻率有限单元法及进展/任政勇等著. —北京: 科学出版社, 2017.9

ISBN 978-7-03-054497-1

I. ①直… II. ①任… III. ①直流-电阻率-有限元法 IV. ①O441.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 224494 号

责任编辑: 王 运/责任校对: 张小霞

责任印制: 张 伟/封面设计: 铭轩堂

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年9月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2017年9月第一次印刷 印张: 11 插页: 2

字数: 252 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

直流电阻率法是一种得到广泛认可的地球物理探测方法，可以有效探测浅地表的电导率结构，在 19 世纪早期就被应用于寻找地下电阻率异常体。对于地下露出的浅层电导率或电阻率结构，直流电阻率法是最简单的方法。由于其具有低消耗和高效率的特点，直流电阻率法被广泛应用在工程和环境地球物理、水文地球物理、野外采矿、地热探测等领域。

直流电阻率法在不同的电极排列装置下测量地表的电位，再转换成视电阻率值，以更加清晰地反映地下的电阻率结构。电阻率成像技术的基础是直流电阻率正演，对于一些简单的地下构造，存在相应的解析表达式，然而对于复杂模型尤其带起伏地形时，只能采用数值解去模拟，为了真实再现地下的物性结构，我们需要寻求精确的解，为了快速甚至实时地实现电阻率成像，我们需要开发非常高效的算法。随着野外采集仪器的发展和计算水平的提高，高精度和高效地求解三维带地形复杂模型是时下的难点和热点。

当前，广泛应用于稳定电流场的数值模拟方法主要有以下四种：边界单元法、积分方程法、有限差分法、有限元法。对于带任意地形的复杂电阻率模型，基于非结构化网格的有限元法是最合适的选择。本书阐述了直流电阻率数值模拟的有限元法及其进展。我们简要地说明了直流电法的发展历史及有限元法的应用现状，重点介绍了电阻率模拟的标准有限元法存在的一些问题以及我们的解决策略，并采用一些综合的模型验证了我们的算法。在直流电阻率正演中，为了更好地模拟边界上场的变化，我们推荐使用第三类混合边界条件；为了解决复杂的地形问题并且去除源附近的奇异性，我们推荐应用“虚拟场”的求解策略；为了模拟带起伏地形的复杂模型结构，我们建议采用单元质量可控的非结构化网格；为了改善标准有限元法的数值精度，我们提出了局部网格加密技术；为了降低人工网格剖分可能带来的误差，我们开发了自适应的网格加密策略以得到更为合理的网格密度分布，并且比较了不同的后验误差估计策略的特性；为了进一步提高观测点的数值解精度，并考虑计算成本，我们应用了面向目标的概念以自适应地加密测点附近区域；为了使算法更能符合地下构造的实际情况，我们考虑了地下介质的各向异性。

本书第 1 章、第 2 章大部分、第 3 章、第 5 章、第 7 章由任政勇撰写，第 4 章由潘克家撰写，第 6 章由邱乐稳撰写，王飞燕撰写了第 2 章的一部分，相应部分的数值例子也分别由各自作者负责验证。全书由汤井田统稿。本书的附录来源于李金铭编写的《地电场与电法勘探》一书，在此表示衷心的感谢。

本书得到了中南大学创新驱动项目（2016CX005, 2015CX008）、国家自然科学基金项目（41574120, 41474103）的资助，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有错误或不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

作 者

2017 年 6 月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 直流电阻率发展历史: 简史及现状	1
1.2 电位的数值解法概述	4
1.3 有限单元法的应用现状	6
1.4 任意复杂地电模型计算	6
1.5 电阻率有限元法的基本策略	8
第 2 章 电阻率模拟的有限单元法	11
2.1 边值问题	11
2.1.1 3D 边值问题	11
2.1.2 2.5D 边值问题	13
2.2 3D 边值问题的求解策略	14
2.2.1 总场法求解策略	14
2.2.2 二次场法求解策略	15
2.2.3 三维地形的处理策略	17
2.2.4 开域边界条件	21
2.3 2.5D 边值问题的求解策略	23
2.3.1 总场法求解策略	23
2.3.2 最佳波数及反 Fourier 变换的求解策略	24
2.3.3 最佳波数数值验证	25
2.4 单元离散化技术	27
2.4.1 结构化网格生成技术	27
2.4.2 非结构化网格生成技术	28
2.5 有限元单元分析	29
2.5.1 三角形单元	29
2.5.2 四边形单元	32
2.5.3 四面体单元	34
2.5.4 六面体单元	36
2.6 大型稀疏方程求解	38

2.6.1	对称正定性	38
2.6.2	稀疏矩阵的压缩存储	39
2.6.3	直接法和求解器	41
2.6.4	预处理共轭梯度法和求解器	42
2.7	数值模拟结果与评价	45
2.7.1	数值模拟的评价标准	46
2.7.2	单元形状与数值解精度的关系	46
2.7.3	网格加密技术与数值解精度的关系	47
2.7.4	求解器性能对比	54
2.8	本章小结	56
第3章	基于非结构化网格的自适应有限元法	57
3.1	传统有限元法不足之处	57
3.2	Z-Z 后验误差估计方法	58
3.3	h 型自适应有限元方法	61
3.4	数值计算结果及评价	63
3.4.1	3D 结果	63
3.4.2	2.5D 结果	68
3.4.3	自适应加密与带地形复杂模型	78
3.5	本章小结	82
第4章	外推瀑布式多网格有限元法	83
4.1	外推瀑布式多网格法	84
4.1.1	Richardson 外推	84
4.1.2	二维网格外推	87
4.1.3	三维网格外推	87
4.1.4	EXCMG 算法步骤	89
4.1.5	EXCMG 算法测试	90
4.2	边值问题及有限元分析	92
4.2.1	边值问题	92
4.2.2	有限元分析	93
4.3	数值模拟及评价	94
4.3.1	EXCMG 速度分析	94
4.3.2	EXCMG 精度分析	96
4.4	本章小结	100
第5章	面向目标的自适应有限元法	101
5.1	背景概述	101

5.2	虚拟电位的边值问题	102
5.3	虚拟电位的误差	105
5.4	面向目标的网格自适应计算	107
5.5	数值模拟及评价	108
5.5.1	虚拟场法对比总场方法	108
5.5.2	多电极系统	110
5.5.3	收敛速度	110
5.5.4	处理复杂地电模型的性能	112
5.6	本章小结	114
第 6 章	电阻率各向异性问题的自适应有限元法	115
6.1	理论背景	115
6.2	基于虚拟场的边值问题	117
6.3	后验误差估计及面向目标自适应方案	121
6.4	数值模拟及评价	125
6.4.1	各向异性悖论	125
6.4.2	最优化后验误差估计选择	127
6.4.3	带地形各向异性模型适应性	130
6.4.4	处理复杂各向异性模型的性能	133
6.5	本章小结	135
第 7 章	总结及后续工作	136
7.1	总结	136
7.2	后续工作	139
参考文献		141
附录	简单模型解析解	153
A.1	点电流源电流场中球体的电场	153
A.2	在垂直接触面不同岩石中的点源电场	157
A.3	多层水平地层地面点电流源的电场	159
A.4	点电流源中均匀非各向同性无限介质的电场	163

第 1 章 绪 论

1.1 直流电阻率发展历史：简史及现状

早在 20 世纪, 直流电阻率法(direct current resistivity method, DC)就已经被应用于寻找地下电导率异常体。1912 年, Conrad Schlumberger 引入开创性的电阻率探测技术, 几乎在同时, Wenner 提出了类似的方法。基于 Schlumberger 与 Wenner 的经典方法, 直流电法被广泛应用到矿产资源勘探、地下水检测、工程地质和水文地质勘探中。

Dahlin (2001) 综述了近年直流电阻率成像技术, 表明电阻率成像法被广泛应用于环境与工程勘探中。Denis 等(2002)使用直流电法进行城市隧道探测, 通过对比已知地质资料, 指出电阻率成像法在城市隧道探测的可靠性。Dahlin 等(2002)使用电阻率成像法对污染的污泥处理厂进行探测, 得到的电性结构与地质资料十分吻合, 并指出三维探测和三维反演技术对工程与环境勘察十分有效。Bentley 和 Gharibi (2004)使用二维和三维电阻率成像法高效、高精度地探测了天然气厂选址地的电性结构。Chambers 等(2006)在某废物处理站使用二维和三维电阻率成像法进行水文地质探测, 有效地确定了采石场的埋藏位置。Wilson 等(2006)在新爱尔兰某海岸进行直流电阻率法勘探, 通过两侧的电阻率差异, 借助二维电阻率剖面图有效地分辨出盐水界面。Tsokas 等(2008)在雅典教会教堂附近进行直流电阻率法勘探, 借助反演技术, 查明了地下可能存在的古井和其他人造建筑。Jones 等(2009)使用三维电阻率成像法圈定了断层位置, 并比较了四极装置和偶极装置对于圈定断层的优劣, 表明二者相结合能更高精度地对地下介质成像。Brunet 等(2010)使用直流电法监测了法国某地区的土壤含水量。Rucker 等(2010a)在某油库使用长电极进行直流电阻率成像探测, 有效地查明该油库周围的横向污染物的范围。Muchingami 等(2012)使用直流电法进行地下水探测, 表明直流电法适合地下水探测和长时间的监测。

许新刚等(2004)以徐州市某废弃的人防工程勘察项目为例, 介绍了三维直流电法勘探的施工技术及其在工程勘察领域的良好应用效果。刘小军等(2006)将概率成像技术应用到高密度电法中, 展示了高密度电法在堤防隐患探测的作用。马德锡等(2008)采用高密度电法对隐伏角砾岩筒、隐伏矿体进行了探测。龚胜平等(2008)通过对一地下人工洞室进行多种装置的直流电阻率法勘探, 综合分析了各

种装置类型探测结果的视电阻率及场的特征,论述了直流电阻率法探测地下人工洞室的有效性。刘挺(2008)结合大伙房输水隧道涌水的工程实际问题,使用高密度电阻率法查明了涌水的原因与来源,为封堵方案设计提供了准确的科学依据。宋希利等(2010)应用高密度电法探测地下空洞,推测了楼房开挖地基上的空洞位置,用人工探槽、机器开挖等方式进行验证,实践证明高密度电法是地下空洞等地质灾害调查及工程勘察领域的有效手段之一。孟贵祥等(2011)将高密度电法技术引入到石材矿探测中,结果表明高密度电法能清晰地刻画出具有高电阻率特征的石材矿体三维空间形态。郭延明(2012)在鲁南地区采用高密度电阻率法和对称四极电阻率测深法对地下水进行了探测,反演出该地区各电性层的电阻率和厚度信息。董茂干等(2015)借助高密度电阻率法分析了云山溶洞、地面溶蚀洼地、溶沟和山体内暗河在地电断面上显示的特征和相对位置,并总结了云山岩溶发育的特点和分布规律,探讨了云山岩溶生成的机理。刘向红等(2012)利用三维直流电阻率法进行地下水资源勘查,根据反演结果立体地确定了水源井的大体位置和合理深度,并得到了很好的验证。杨天春等(2016)应用高密度电阻率法勘察隐伏岩溶溶洞。

在环境领域,直流电法可以用于调查近地表的生物化学现象(Reynolds, 2011),对于环境的保护管理具有深远影响。典型应用如电阻率法被用于监控经过清理和补救措施之后污染物的聚集情况(Bentley and Gharibi, 2004; Slater and Binley, 2003; Chambers et al., 2010)。在农业和土壤科学领域,电导率参数是容易获取且有效提高农作物产量的土壤空间特征指标之一(Corwin and Lesch, 2003; Corwin and Lesch, 2005; Samouëlian et al., 2005),其对于土壤含水量、盐分、黏粒粒级的灵敏度可以很好地反映和评价农业用地属性及价值、监控生态水文过程及养分循环和储存的土壤特性。在考古和文化遗产领域,电阻率成像与考古调查密切相关(Noel and Xu, 1991)。电阻率断面图可以用于辨别大的考古选址及区分埋藏的人造建筑(Gaffney, 2008)。电阻率成像对于文化遗产的结构评估、重建、保存(Mol and Preston, 2010)也起着重要的作用(Capizzi et al., 2012)。

直流电阻率法也被应用于深部探测几米到几千米的电性结构:Storz等(2000)使用大尺度直流电阻率测深法来探测地球地壳的电性特征,了解地壳的地质结构,理解构造过程,电阻率模型深度范围从地表到地下4km。直流电法还被应用到矿井、海洋及河流勘探问题:胡雄武等(2010)在坑道安全掘进中使用矿井直流电阻率法进行超前探测,分析了多极供电观测数据处理和成果表达及其应用效果,表明矿井电阻率法在坑道安全掘进高分辨率超前预测预报中发挥着重要的作用。Loke和Lane(2004)介绍了一种在海水覆盖地区使用二维直流电阻率法的反演方法,从而得到该地区的电性结构。Rucker等(2010b)在巴拿马运河进行直流电阻率法勘探,有效地评估岩性变化,服务于疏浚工程。何玉海(2016)利用高密度电

法研究海水入侵,成功划定了莱州湾地区的海水入侵界面,为灾害治理等提供了一定程度的技术支持。直流电法与其他物探方法被同时使用,进行综合物探勘察: Bayrak 和 Senel (2012) 使用直流电阻率法和甚低频(VLF)方法来探测表层电性结构,并精确地确定出硼矿床的边界。Seher 和 Tezkan (2007) 使用 RMT 和直流电阻率法提高地表成像精度,很好地成像了土壤的特征,解决了对应的水文地质问题。高密度电阻率法和瞬变电磁法被应用于煤田采空区勘查及注浆检测(杨镜明等, 2014),取得了较好的效果,但也存在探测深度与分辨率的矛盾及人文噪声的干扰问题。

直流电法勘探各项技术的进步,更扩展了其应用空间。除地面、井中、水下以外,井-地、孔间电阻率成像技术以及 3D 电阻率成像技术的应用(Perri et al., 2012; 雷旭友等, 2009; 杨镜明等, 2014),使直流电法的探测精度得到很大提高。基于多通道传感器的电容电阻率成像技术在实验室被成功应用于监控岩石冰冻试验过程(Kuras et al., 2012),这种方法将有望于研究冰冻圈科学,用于监控冻土条件下的岩石和土壤状态(De Pascale et al., 2008; Krautblatter et al., 2010)。自动监控系统包含数据采集、检索、存储、质量评价以及反演(Ogilvy et al., 2009; Chambers et al., 2012)等也逐步完善以应对数据的自动采集以及大规模数据流的产生,其对于电阻率变化的实时监测将在探测起始问题比如山体滑坡、大坝渗流中发挥更加重要的作用。优化的测量设计算法可自动确定非传统的高效的测量阵列,从而在相同数量的测点中获得更高的图像分辨率(Stummer et al., 2004; Wilkinson et al., 2006)。对于存在大量地下基础设施的区域,常规电极的测量存在困难,而井中长电极可以极大地改善测量精度(Rucker et al., 2010a, 2011, 2012),其与一定数量的地表电极的组合(Zhu and Feng, 2011)可以尽可能保真地还原地下导电体的延伸。

直流电阻率法基本装置如图 1.1 所示,在供电电极(source electrodes, 图中 AB) 供入稳态电流,注入电流产生初始电场,进而在地下产生传导电流,在测量电极(potential electrodes, 图中 MN) 上形成电位差。测量电极的电位差包含了地下电导率分布的信息,通过分析电位差可以推断出地下未知电导率分布,对地下未知地质结构进行成像。为了能够定性判断地下电导率,定义一新变量,即视电阻率(apparent resistivity):

$$\rho = K \frac{U_M - U_N}{I} \quad (1.1)$$

式中, K 为与电极 $ABMN$ 的排列有关的系数,通常被称为装置系数; U_M 为 M 点的电位(单位为 V); U_N 为 N 点的电位; I 为供入 AB 电极的电流强度(单位为 A)。采用 4 电极的装置系数 K 一般表达式为

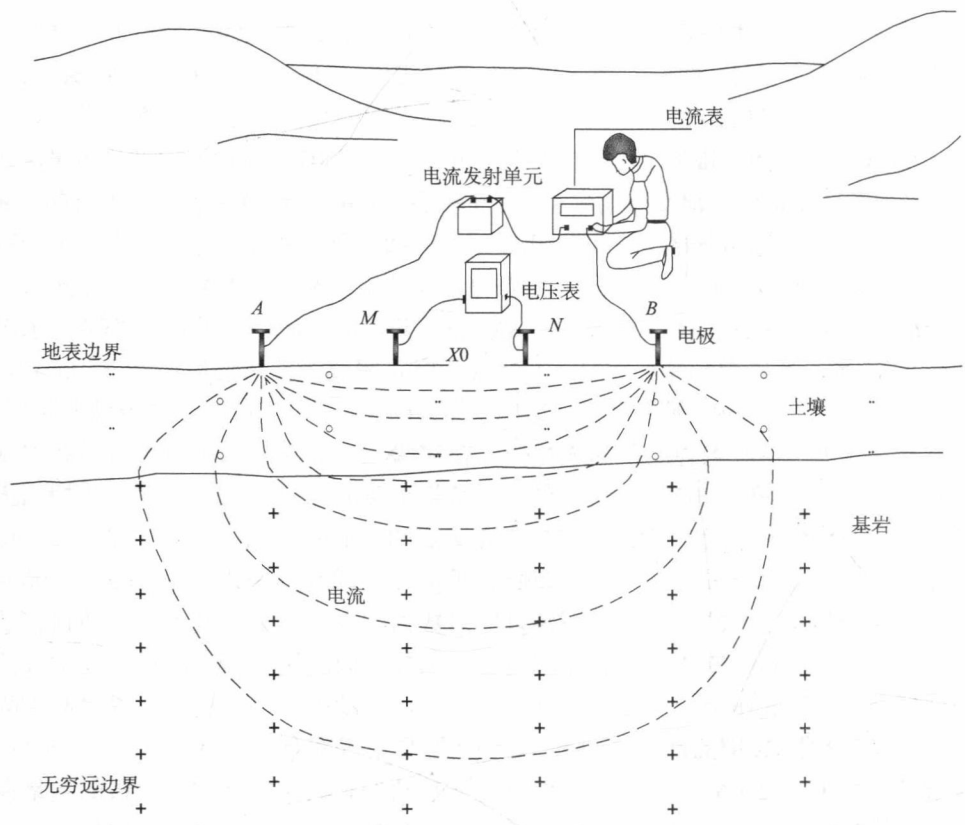


图 1.1 直流电阻率原理和野外数据采集示意(引自 Dahlin, 2001)

$$K = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}} \tag{1.2}$$

式中， AM 为 A 点到 M 点的距离； AN 为 A 点到 N 点的距离； BM 为 B 点到 M 点的距离； BN 为 B 点到 N 点的距离。装置系数转换观测电位为视电阻率，装置系数的推导一般为确保均匀半空间模型的视电阻率是地下真实电阻率。

1.2 电位的数值解法概述

如图 1.1 所示，结合式 (1.1)，可转换观测电位差为视电阻率值，进而预测地下电阻率的分布。这种通过观测视电阻率值进行地下电性结构推测的方法称为直流电法反演。直流电法反演需要在给定电导率模型上计算视电阻率响应，并与实际观测的视电阻率响应对比，当两者在一定程度上吻合时，把当前电导率模型作为最佳模型，结合地质等岩石物理性质，获得地下结构。在给定电导率模型上计

算视电阻率响应的过程通常称为正演计算,由此可见反演过程需要多次正演计算。由式(1.1)可知,获得当前模型视电阻率值的核心任务为求解电位的分布。然而,实际地下模型非常复杂,既包含不规则分布的电阻率异常体,又包含任意起伏的地形,电位分布通常很复杂,并不能够轻松获得。种种的不规则性使得仅仅简单模型拥有解析的电位分布,复杂电阻率模型上的电位不能够用解析函数来描述。

虽然电位不存在简单的解析解,但幸运的是,我们可以寻求一组偏微分方程来描述电位 U :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla U &= f & U \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} &= g_1 & U \in \Gamma_0 \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + g_2 U &= g_3 & U \in \Gamma_\infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

式(1.3)为定义在地下求解区域的泊松方程, σ 为地下电导率分布(可以是标量或各向异性张量), 函数 f 与供电电极位置、电流大小有关。 Ω 代表包含起伏地形的地下结构, Γ_0 为起伏地形界面, Γ_∞ 为无穷远边界, $\mathbf{n}$ 为边界 Γ_0 或 Γ_∞ 上的单位外法向向量。函数 g_1, g_2, g_3 表达式取决于不同的边界条件近似策略, 并被用来确保电位的唯一性(Nabighian, 1988)。

由式(1.3)可以看出,直流电阻率的控制方程为二阶椭圆偏微分方程,在电源点处,电位存在奇异性。寻求式(1.3)的解析表达式存在相当大的困难,因此往往只能寻求数值解。当前,较为成熟的数值解方法大致可以归纳为积分方程法、有限差分法和有限单元法(finite-element method)。积分方程法仅仅对异常体进行剖分求解,进而求解消耗低,曾广泛用于直流电阻率数值模拟中(Dieter et al., 1969; Okabe, 1981; Xu et al., 1988, 2000; Li and Uren, 1997a; Xu et al., 2012; Ma, 2002; Boulanger and Chouteau, 2005)。然而,积分方程法需要计算复杂的奇异积分,且仅仅适合于简单模型,因此,目前积分方程法并没有得到快速的发展。有限差分法是古老的数值计算方法,有限差分法求解地球物理问题始于20世纪60年代,成熟于90年代(Mufti, 1976; Dey and Morrison, 1979; Lowry et al., 1989; Zhang et al., 1994; Spitzer, 1995; Zhao and Yedlin, 1996; Li and Spitzer, 2002; Wu, 2003; Loke and Barker, 2006; Mufti, 2012)。有限差分法要求模型能够被剖分成规则的单元如四边形、六面体等,这一要求严重制约了有限差分法处理复杂地球物理模型的能力。

有限单元法在早期并没有像积分方程法与有限差分法一样,得到足够的重视与应用(Coggon, 1971; Bibby, 1978; Fox, 1980; Pridmore, 1981; Holcombe, 1984),主要因为有限元的线性矩阵比有限差分复杂,相应的线性方程求解器求解能力不足。近年来,越来越多的研究人员关注求解更为复杂的地电模型,有限单

元能够有效地处理复杂模型, 因此有限单元法获得了越来越多的应用(Queralt et al., 1991; Sasaki, 1999; Bing and Greenhalgh, 2001; Yi et al., 2001; Li and Spitzer, 2002; Wu et al., 2003; Li et al., 2005; Marescot et al., 2006; Rücker et al., 2006)。

1.3 有限单元法的应用现状

Coggon(1971)首次应用有限单元法求解了直流/激发极化电阻率问题并验证其适用性, 采用了简单的边界条件及规则的网格, 获得了相对误差不超过 20% 的数值解。接着, Bibby(1978)成功地应用基于 Fourier 级数的有限单元法求解三维简单的轴对称模型, 不久, Pridmore 等(1981)应用了简单的规则六面体有限单元进行三维电阻率数值模拟, 并且尝试着将简单的六面体划分为几个不规则的四面体来提高数值解的精度。后来, Holcombe(1984)运用了能够真实地表达实际电场分布的由 Dey 和 Morrison(1979)提出的混合边界条件, 并且采用不规则的六面体进行复杂边界的处理及地形改正。

进入 21 世纪后, 有限单元法得到快速的发展。Bing 和 Greenhalgh(2001)讨论了不同的线性方程组求解算法的求解能力, 并且指出简单四面体单元的精度要强于六面体单元。接着, Li 和 Spitzer(2002)对比了有限单元法与有限差分法的性能, 得出了有限单元法优于有限差分法的结论, 并且成功地应用有限单元法求解了三维各向异性的电阻率模型(Li and Spitzer, 2002, 2005)。同时, 有限单元法也被用于求解一些简单的起伏地形和复杂的电阻率模型(Fox, 1980; Holcombe, 1984; Yi et al., 2001; Loke and Barker, 2006; Marescot et al., 2006; Rücker et al., 2006)。另外, 研究人员投入了大量的精力寻求有限元线性方程组的快速求解(Zhang et al., 1994; Spitzer, 1995; Bing and Greenhalgh, 2001; Wu, 2003)。对于 2.5D 模型或者一般中等规模 3D 模型, 采用直接求解器可以获得满意的效果, 如基于 LU 分解法的 Pardiso 求解器(Schenk and Gärtner, 2004), 基于波前法的 MUMPS 直接求解器(Amestoy et al., 2001)。对于特大规模(如上千万, 上亿未知数)模型, 可以采用共轭梯度法获得满意效果, 为了进一步加速迭代法的收敛速度, 可以采用基于不完全 LU 分解或者不完全 Cholesky 分解的预处理矩阵(Saad, 2003)。

1.4 任意复杂地电模型计算

近几年, 非结构化网格加密技术得到了快速的发展。由于非结构化网格能够有效地模拟任意复杂模型(包含任意复杂地形情况), 基于非结构化网格的任意复杂直流电阻率问题的有限元法获得了空前的突破。2006 年德国研究学者(Günther

et al., 2006)开展了基于非结构化四面体单元的直流电阻率三维模拟计算,以德国一矿山建模为例展示了四面体网格模拟带起伏地形模型的能力(如图 1.2 所示)。

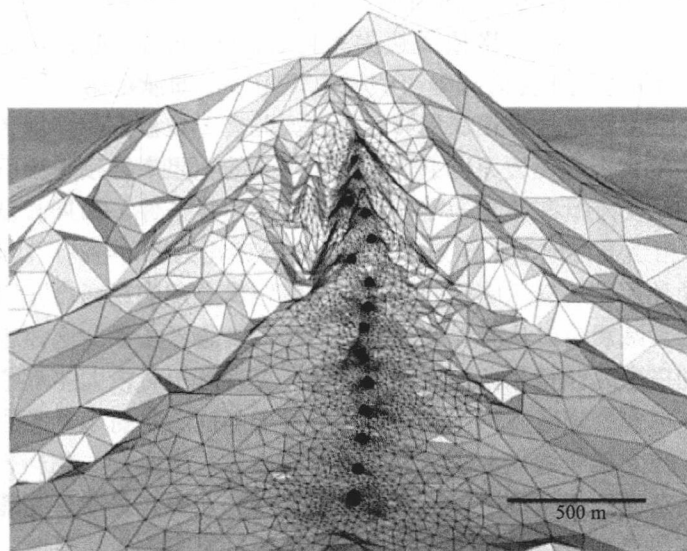
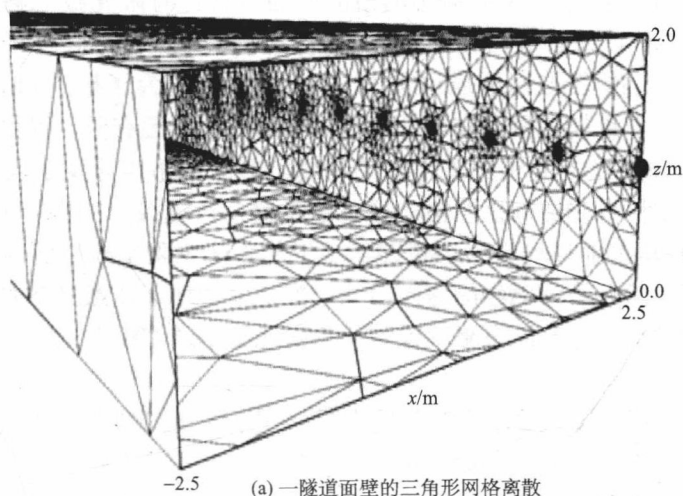


图 1.2 复杂直流电阻率地电模型的非结构化网格离散化(引自 Günther et al., 2006)

非结构化网格能够生成任意单元密度的正演模拟网格,在供电电极处能够采用密实网格来逼近快速变化的电位,在测量电极处也能够采用合理的网格来提高观测电位的精度,在远离观测电极和电导率异常体的区域能够采用较为稀疏的网格来近似变化缓慢的电位。网格密度不均匀的非结构网格能在提高观测电极处数

值解的精度同时,大幅度减少单元数量、降低计算消耗,从而寻求最优化的精度和速度平衡点,为实现大规模复杂地区地下成像提供核心动力。

全自动设计最优化的非结构化网格能够通过估计有限元数值解的单元误差实现,单元误差估计或者单元后验误差可用来驱动自适应加密有限元算法。目前,复杂直流电阻率模型的自适应网格加密策略逐步成为了研究潮流。Ren 和 Tang (2010) 基于非结构化网格实现了直流电阻率法自适应有限元模拟,加密供电电极处网格单元密度提高了数值电位的精度。对于地下电导率各向异性情况,Wang 等 (2013) 利用非结构化网格实现了任意复杂地电模型的高精度计算。Ren 和 Tang (2014) 基于虚拟场提出了带起伏地形的直流电阻率模型面向目标的自适应有限元计算。随着后续工作的深入,如研究带地形地下任意复杂电导率各向异性模型的高精度计算,直流电阻率模型的有限元正演计算逐渐接近实用。

1.5 电阻率有限元法的基本策略

边界条件的选取。电位的边值问题共存在三类边界条件:第一类狄利克雷边界条件 (Dirichlet), 第二类诺依曼边界条件 (Neumann), 第三类混合边界条件 (Mixed)。距离供电电极无限远处可假设电位为零,即满足第一类边界条件,满足这一假设需要将截断边界设在足够远处,如此会造成极大的计算区域,从而增大计算量且误差大。地表边界由于空气中无限大的电阻率导致电流不能穿过,此时电流密度的法向分量在地表为零,满足第二类边界条件。如果假设截断边界满足该条件,则相当于将地下延伸无穷远处的电导率设为零,不满足实际地质情况。第三类边界条件假设远离源电极的区域电位随距离成反比衰减,即相当于均匀半空间下电位的衰减规律,从而得到无穷远处的混合边界条件。这种边界条件对于带层状介质的模型的计算存在远离源的区域计算误差相对较大的问题,此时考虑将层状介质下电位的衰减规律作为无穷远边界上电位满足的边界条件,则可以解决这一问题,因此截断边界上适合采用第三类边界条件。

带地形复杂模型的处理。起伏地形的处理方法主要有总场求解策略与虚拟场求解策略。总场求解策略要求在地表边界上需要足够密集的网格剖分去无限逼近复杂的起伏地形表面,只要找到合适的离散网格,有限元可以实现这一效果。二次场的求解策略中将总场分为一次场和二次场,传统的二次场法需要一次场满足背景的边值问题,在背景模型复杂情况下需要额外的数值方法来求解一次场,数值成本过高,因此传统的二次场法难以处理地形。二次场求解策略的提出是为了去除源附近的奇异性,即找到能够模拟奇异值现象的一次场。我们考虑简单的一次场,其遵循奇异性的衰减规律但不需要满足背景模型上的边界条件,从而实现带地形的复杂模型的求解,与总场策略相比,其去除了源附近的奇异性从而提高

了该处的数值精度,此时的二次场不再满足地表的诺依曼边界条件被称为虚拟场。从处理地形的角度来说,总场法和虚拟场法均能很好地解决这一问题。

网格剖分。对同一模型采用不同的网格单元进行离散直接影响数值模拟的精度,现在用于离散的网格单元分为结构化网格和非结构化网格。结构化网格通用的单元类型一般为结构化的六面体、矩形单元,这些单元类型在模型结构不复杂时得到的精度是可以接受的。一旦加入复杂地形或者不规则的异常体,采用上述网格单元进行离散就会使最终计算结果产生较大的离散误差。非结构化网格具有单元质量可控、允许局部加密、能够模拟复杂几何模型等优点,使得三维非结构有限单元法求解效率大幅提高。在达到相同精度的情况下,相对于结构化网格,非结构化网格的计算时间和存储量均可下降约一个数量级。非结构化网格能够生成任意单元密度的正演模拟网格,在供电电极处能够采用密实网格来逼近快速变化的电位,在远离电导率异常体的区域能够采用较为稀疏的网格来近似变化缓慢的电位。网格密度不均匀的非结构网格能在提高数值精度的同时大幅度减少单元数量,从而寻求最优化的精度和速度平衡点,为实现大规模高精度的正演提供基础。

线性方程组的求解。对于中小规模的大型线性方程组,采用直接求解器可以获得满意的效果,如基于 LU 分解法的 Pardiso 求解器、基于波前法的 MUMPS 直接求解器。对于大规模模型,可以采用迭代法求解,如共轭梯度法。为了加速迭代法的收敛速度以获得满意的求解效率,可以采用基于不完全 LU 分解或者不完全 Cholesky 分解(IC)的预处理矩阵。预处理共轭梯度法的速度明显快于传统的共轭梯度法,其中 SSOR 共轭梯度法既能节约内存,还具有快速的收敛性。ILU 共轭梯度法和 IC 共轭梯度法具有出众高效的求解速度。

标准有限元数值精度的改善。有限元数值解精度依赖于网格的单元质量、单元形状函数阶数,线性单元需要较小体积的网格单元,其相对于二次单元理论更简单、更容易实现,二次有限元在较粗网格上也能取得相对满意的结果,其具有显著的误差收敛性,相对而言可以保证高精度结果。对于更高阶次单元,可能存在数值震荡等问题,故不考虑。有限元数值解精度还依赖于网格单元密度分布,通过加密求解区域的单元密度能够改善有限元数值精度。而网格加密依赖于准确的先验信息,对于复杂的模型而言,先验信息变得很难确定。如果通过传统有限元的误差收敛理论来保证复杂模型下数值解的精度,那必须保证所有有限单元的大小无限小以及其对应的形函数阶次足够高,这一假设需要巨额的计算成本。而人为地改善局部网格,很难保证精确性而且需要高额的计算成本。所以我们需要寻求另一种思路来解决这一问题。采用迭代法的思想,首先选取合适的指标估计单元误差及全局网格的相对误差,然后通过保证每一次网格上的单元误差值及相对单元误差值越来越小并最终收敛于某一给定值,这将得到更精确的数值解,这种思想被称为自适应有限元法。自适应有限元法通过保证每一次迭代的网格越来越