GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

高等数学

练习与提高（三）

李志明 李少华 主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

高等数学练习与提高

（三）

GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

李志明　李少华　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习与提高.三/李志明,李少华主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.2
ISBN 978-7-5625-4227-8

Ⅰ.①高…
Ⅱ.①李…②李…
Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 020457 号

高等数学练习与提高(三)　　李志明　李少华　主编

责任编辑:郑济飞　龙昭月　　责任校对:周　旭

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　　邮政编码:430074
电　话:(027)67883511　　传真:67883580　　E-mail:cbb@cug.edu.cn
经　销:全国新华书店　　http://cugp.cug.edu.cn

开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16　　字数:154 千字　印张:6
版次:2018 年 2 月第 1 版　　印次:2018 年 2 月第 1 次印刷
印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4227-8　　定价:15.00 元

目　录

第七章　微分方程

第一节　微分方程的基本概念

了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解的概念，会验证某函数是否为微分方程的解.

知识要点

1. 微分方程的基本概念，什么是微分方程的阶，什么是微分方程的解，通解的定义和特解的定义；

2. 微分方程的初始条件和初值问题，利用初始条件确定通解中的任意常数从而得到特解.

典型例题

例 1　求曲线族 $x^2+Cy^2=1$ 满足的微分方程，其中 C 为任意常数.

分析： 对原方程求导，消参数 C，得到函数和导函数间的关系.

解： 在等式 $x^2+Cy^2=1$ 两边对 x 求导，得 $2x+2Cyy'=0$.

再从 $x^2+Cy^2=1$ 解出 $C=\dfrac{1-x^2}{y^2}$，代入上式得

$$2x+2\,\frac{1-x^2}{y^2}yy'=0,$$

得所求的微分方程为 $xy+(1-x^2)y'=0$.

例 2　验证函数 $y=(x^2+C)\sin x$（C 为任意常数）是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\cot x-2x\sin x=0$$

的通解，并求满足初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ 的特解.

分析： 将函数代入微分方程，方程恒成立即为解；将初始条件代入求的常数 C 的值，即得对应的特解.

解： 将 $y=(x^2+C)\sin x$ 求一阶导数，得

$$\frac{dy}{dx}=2x\sin x+(x^2+C)\cos x,$$

把 y 和$\frac{dy}{dx}$代入方程左边得

$$\frac{dy}{dx}-y\cot x-2x\sin x=2x\sin x+(x^2+C)\cos x-(x^2+C)\sin x\cot x-2x\sin x\equiv 0.$$

因方程两边恒等,且恰含有一个任意常数,故 $y=(x^2+C)\sin x$ 是题设方程的通解.

将初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ 代入通解 $y=(x^2+C)\sin x$ 中,得 $0=\frac{\pi^2}{4}+C$,$C=-\frac{\pi^2}{4}$.

从而所求特解为 $y=\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$.

A 类题

1. 判断正误:

(1)方程 $x(y')^2-2yy'+x=0$ 是一阶微分方程.　　(　　)

(2)方程 $x\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+5xy=0$ 是二阶微分方程.　　(　　)

(3)$y=C_1x+2C_2x$ 是微分方程 $y''+xy'-y=0$ 的通解.　　(　　)

(4)$y=C(\sin x+\cos x)$是方程 $y''+y=0$ 的通解.　　(　　)

2. 验证 $y=x^2-\frac{x}{2}$是微分方程 $x^2y''-2y=x$ 的解.

3. 确定函数 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$ 中所含参数,使函数满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=2$.

4. 一曲线经过点(0,4),且曲线上任意一点(x,y)处的切线的斜率等于该点的横坐标,试确定此曲线的方程.

B 类题

1. 设曲线上任意一点(x,y)的切线在两坐标轴间线段均被切点平分，试求曲线所满足的微分方程.

2. 验证$\begin{cases} x=te^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$是微分方程$(1+xy)y'+y^2=0$的解.

第二节　可分离变量的微分方程

理解可分离变量的微分方程的特点，掌握其求解方法.

知识要点

1. 可分离变量微分方程的判定；
2. 可分离变量微分方程的求解步骤.

典型例题

例 1　求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3xy$的通解.

分析： 此方程为可分离变量方程，将变量分离后求解.

解： 分离变量后得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=3x\mathrm{d}x,$$

两边积分得
$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 3x\mathrm{d}x,$$

即
$$\ln|y|=\frac{3}{2}x^2+C_1$$

从而
$$y=Ce^{\frac{3}{2}x^2}.$$

例 2 求微分方程$\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$ 的通解.

分析:将方程右边的因式分解,可知此方程为可分离变量方程,将变量分离后求解.

解:方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=(1+x)(1+y^2),$$

分离变量得

$$\frac{1}{1+y^2}dy=(1+x)dx,$$

两边积分得

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\int(1+x)dx,$$

即

$$\arctan y=\frac{1}{2}x^2+x+C.$$

于是原方程的通解为 $y=\tan(\frac{1}{2}x^2+x+C)$.

A 类题

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'=-\frac{x}{y}$;

(2) $y'=-\lambda y$;

(3) $\frac{dy}{dx}-2y=1$;

(4) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$；

(5) $y'=y\cos x$；

(6) $(1+x)y'+1=2e^{-y}$.

2. 求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=y(6x^2+4x+1)$，　$y|_{x=0}=1$；

(2) $\frac{x}{1+y}dx-\frac{y}{1+x}dy=0$，　$y|_{x=0}=1$；

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$，$y(0)=1$；

(4) $\tan x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y,y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0.$

B 类题

1. 用适当变量代换将下列方程化为可分离变量方程,然后求出通解.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$;

(2) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;

(3) $y'=\sin^2(x-y+1)$.

2. 设 $f(x)=2x+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,$f(x)$ 为可微函数,求 $f(x)$.

3. 已知 $\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}f(x)+1$,求 $f(x)$的函数表达式.

4. 曲线 $y=f(x)$(函数 $f(x)\geqslant 0, f(0)=0$)围成一个以$[0,x]$为底的曲边梯形,其面积与 $f(x)$的立方成正比,已知 $f(1)=1$,求这条曲线的方程.

C类题

1. 若 $x\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\mathrm{d}t$, 求 $y(x)$.

2. 已知函数 $y=y(x)$满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$,且 $y(2)=0$,求 $y(x)$的极大值与极小值.

第三节　齐次方程

掌握齐次方程的解法,了解可化为齐次方程的微分方程的解法.

知识要点

1. 齐次方程的判定;
2. 齐次方程的解法,作换元化为可分离变量微分方程求解.

典型例题

例 1　求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$满足初始条件$y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$的特解.

分析: $\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$是$\frac{y}{x}$的函数,此微分方程是齐次方程,作换元 $u=\frac{y}{x}$化为可分离变量微分方程求解,将初始条件代入得特解.

解：设 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，

得 $$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u,\ \cot u du=\frac{1}{x}dx.$$

积分得 $$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|,\sin u=Cx,$$

得通解为 $$\sin\frac{y}{x}=Cx.$$

$$y|_{x=1}=\frac{\pi}{6},$$

得 $C=\dfrac{1}{2}$. 从而所求特解为 $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$.

例 2 求解微分方程 $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$.

分析：将方程整理变型，可知为齐次方程，作换元 $u=\dfrac{y}{x}$ 化为可分离变量微分方程求解.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，方程化为 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2u^2-u}{1-u+u^2}$，

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]du=\frac{dx}{x},$$

得 $$\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C,$$

得 $$\frac{u-1}{\sqrt{u}\,(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx.$$

所求的解为 $$(y-x)^2=Cy\,(y-2x)^3.$$

A 类题

求下列齐次方程的通解：

(1) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$；

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=y(\ln y-\ln x)$；

(3) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$；

(4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$；

(5) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；

(6) $\left(2x\sin\dfrac{y}{x}+3y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx-3x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

B 类题

1. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

(1) $x^2dy+(xy-y^2)dx=0$， $y(1)=1$；

(2) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$， $y(1)=2$；

(3) $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$, $y(1)=1$;

(4) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0, y(0)=1$.

2. 设有连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$,对于曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$,曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围面积为 $\frac{1}{4}x^2$,求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

第四节　一阶线性微分方程

掌握一阶线性微分方程的解法,理解一阶线性非齐次微分方程的解的结构.

知识要点

1. 线性方程的判定;

2. 齐次线性方程的解法;

3. 利用常数变易法求非齐次线性方程的通解;

4. 非齐次线性方程的通解是其对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和.

典型例题

例 1 求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

分析: 此微分方程是一阶非齐次线性微分方程,可直接代入通解公式.

解: $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=e^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln x}dx+C\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.

例 2　求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

$$x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0,\quad y\big|_{x=\mathrm{e}}=1.$$

分析：此微分方程整理后可知是一阶非齐次线性微分方程，可直接利用公式得到通解，再将初始条件代入得到相应特解.

解：将方程化为 $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{1}{x}$，

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\ln\ln x}\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\ln\ln x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2x+C\right).$$

由 $y\big|_{x=e}=1$ 得 $C=\dfrac{1}{2}$，所求特解为 $y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

A 类题

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy'+y=2x\mathrm{e}^x$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(\cot x)y=\csc x$；

(3) $(x^2+y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$；

(4) $y'+(\tan x)y=\sec x$；

(5) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=3x^2$.

2. 求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0, y|_{x=0}=1$;

(2) $xy'=2x-y, y|_{x=1}=0$;

(3) $\frac{dy}{dx}-y=e^{2x}, y|_{x=0}=1$;

(4) $y'+y=\cos x, y|_{x=0}=0$.

3. 若连续函数 $y(x)$满足方程 $y(x)=\int_0^x y(t)dt+e^x$，求 $y(x)$的表达式.

B 类题

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^3e^y}$；

(2) $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{y}=\sin x-\cos x$；

(3) $\cos y\dfrac{dy}{dx}+\sin y=x$.

2. 求一曲线的方程，该曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于$2x+y$.

C 类题

设$F(x)=f(x)g(x)$，其中函数$f(x)$、$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且$f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求$F(x)$所满足的一阶微分方程；(2)求出$F(x)$的表达式.