计算方法丛书·典藏版——5

样条函数与计算几何

孙家昶 著

科学出版社

[redacted]书 · 典藏版　5

样条函数与计算几何

孙家昶　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

由于航空、造船、机械设计和制造等行业应用计算机作辅助设计的需要，逐步形成了一个新的计算数学分支——计算几何．这个分支与样条函数有着密切联系．本书叙述样条函数和计算几何的基本理论和方法，同时，总结了作者几年来在该领域中的研究成果．可供从事计算几何理论与应用研究的工作者，航空、造船、机械设计等部门的工程技术人员及大学有关专业的师生参考．

图书在版编目(CIP)数据

样条函数与计算几何 / 孙家昶著. —北京：科学出版社，2005.11
(计算方法丛书)
ISBN 978-7-03-025446-7
Ⅰ.样… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①样条函数 ②计算几何 Ⅳ.①O242.23
中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第277059号

责任编辑：向安全 张鸿林／责任校对：鲁 素
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1982年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2016年 1月印 刷 印张：11 5/8
字数：304 000
定价：79.00元

《计算方法丛书》编委会

前　　言

样条函数与计算几何是目前计算数学中两个非常活跃又彼此相连的分支.

长期以来，几何外形数学模型与数据平滑化问题一直是促使样条方法发展的主要因素;反过来，样条理论和方法的建立,又为计算几何提供了重要的依据和工具，样条曲线（曲面）——作为目前计算几何研究的主要对象之一,可以看成是所谓样条函数“几何化”后的产物. 现在,样条函数的应用已经渗透到不少领域. 尽管如此,计算几何仍是应用样条函数方法最成功的领域之一(尤其在我国更是如此).

本书叙述样条函数和计算几何这两个分支所用的基本理论和方法,并介绍它们目前的发展概况. 全书共分九章. 前五章阐述样条函数线性空间理论的建立和发展，重点介绍对样条理论发展影响最大的几位美国数学家的工作. 样条函数始于 Schoenberg 1946 年的杰出工作[1],后来,许多工作都来源于他的思想. 可惜的是,十几年后，人们才逐渐认识到 Schoenberg 工作的价值. 为了便于读者了解样条的基本思想和产生的背景，本书把这个开创性工作放在第一章介绍.

为了改进收敛性,特别是为了确保计算稳定,从插值和逼近理论的角度，应用分片多项式是很自然的. 第二章从叙述分片解析思想在逼近理论上的重要性出发,引出分片多项式插值,着重讨论分片 Hermite 插值,其中二次 Hermite 插值是作者为以后求解二次样条及误差估计而引入的.

三次样条是应用最广的一种样条函数. Ahlberg 等三人(1967)的书[23]对三次样条的特性作了准确的描述，曾对样条的发展有过较大的影响. 后来,发现二次样条也很有用,苏联 Стечкин 等(1976)

的书着重讨论二次样条. 鉴于这两类插值样条在方法上极为类似,所用到的系数矩阵都是三对角线阵,差别在于主对角线上的常数. 因此,我们从研究这类三对角阵的特性出发,在第三章中统一处理二次样条与三次样条. 因为国内已有不少书刊介绍过三次样条的计算[48,9],本章只介绍二次样条计算,并侧重作各种条件下的误差估计,所得的许多系数估计比文献 [14, 15] 发表的结果有所改进. 最后一节简要地介绍一般多项式样条的理论,主要取材于 1969 年 Greville 的讲演[19]. 从六十年代中期到七十年代末,这十多年是 B-样条理论及应用的一个大发展时期. de Boor (1976) 的综述报告[31] 以及 1978 年出版的书[29] 总结了这个时期的工作,而 B-样条一般理论的基础则是由 Schoenberg 1947 年的工作[25] 奠定的(虽然其论文发表于 1966 年). 本书第四章叙述 B-样条从等距节点向一般节点(包括重节点)推广的思路和推导,并介绍了 B-样条的主要理论结果.

相对于单变量样条而言,多变量样条函数起步要晚一些,成熟程度也较差. 目前的工作大部分是由单变量的结果作形式推广而得的,只适用于规则区域. 因而本书第五章也只介绍"张量法"、"布尔和" 等用于规则区域上的二维样条函数方法以及它们的误差估计. 考虑到叙述的连贯性和避免重复,将原应属于后四章的 Coons 曲面也放在这里介绍.

后四章介绍有关计算几何方面目前国内外所关心的某些主要工作.

计算几何,作为一门学科,目前还相当年轻. 尽管计算几何的某些方法一直在实际生产中使用,但直到 1971 年,英国的 A. R. Forrest[102] 才首次提出这样的定义: 计算几何讨论的是用计算机表示以及用计算机控制有关形状信息的问题. 苏步青教授进而提出,计算几何是代数几何、微分几何、逼近论、计算数学和数控技术的边缘学科[68]. 计算几何与计算机辅助设计 (CAGD) 的关系无疑是很密切的. 但是,它们的侧重点有所不同,前者偏重学科,后者侧重工程.

B-样条曲线（曲面）、Bézier 曲线（曲面）以及 Coons 曲面，是目前计算几何中采用的三种主要曲线（曲面）模型. Coons 曲面已在第五章介绍，其余两种模型都在第九章中讨论. 作者在那里从一个更一般的观点出发，提出由给定控制顶点构造曲线（曲面）模型的一般准则，研究相应系数矩阵的元素结构，从而把 B-样条曲线（曲面）与 Bézier 曲线（曲面）在计算方法上统一起来（当然，从重节点 B-样条理论看，两者均是特例）. 本章的结果指出，除了上述两种模型外，在参数三次曲线范畴内，仅存在另一种可供实际应用的样条曲线（暂称 C-样条）介于这二者之间. 这个结果已经为设计和计算的实践所证实[85,109].

苏步青教授把古典的代数几何方法引入计算几何，在计算几何中开创了一个新的方向. 本书第八章扼要介绍他以及他的学生们在这方面的成果[64—69]. 想进一步研究的读者可阅读他们 1981 年出版的专著[70].

第六、七两章分别介绍局部坐标样条、圆弧样条、三角曲线样条与几何样条等这一类与作者本人工作直接有关的内容.

对于前几年国内外流行的某些样条曲线方法（如张力样条，单拐曲线，有理参数曲线，广义二次、三次曲线，Mehlum 曲线等），书中也分别作了不同程度的介绍.

总之，本书是从计算数学角度选材，介绍样条函数和计算几何中目前有代表性的几个方向的工作. 对读者只要求具有数学分析和线性代数的知识. 由于篇幅所限，有些重要内容，例如，用样条方法求解微分方程、函数最优恢复以及曲面修顺等问题. 本书几乎没有提到. 这方面的内容读者可参阅文献[7,14,48,52]等. 另外，在计算机软件应用程序库中，样条函数已逐渐替代传统的插值方法，有兴趣的读者可参阅文献[29,32,105,111].

本书在写作过程中得到中国科学院计算所原三室和现在中国科学院计算中心领导张克明、冯康等的大力支持. 苏步青教授以及杨彭基、熊振翔和唐荣锡等教授给予了有益的指导和鼓励. 此外计算中心刘容光、李善庆两同志校核了部分原稿，作者在此一并

表示感谢.

由于作者水平所限，加上时间仓促，书内难免存在不当之处，恳请读者指正.

孙家昶

1981年4月2日

目　　录

第一章　无穷区间上等距节点样条的引入

样条函数最早是美国数学家 I. J. Schoenberg 在 1946 年的一篇文章[1]中提出的. 当时他是以研究无穷区间上等距节点数据的平滑问题为背景引入样条函数的. 该文的理论不仅在样条函数发展史上是一项奠基的工作,而且其中所用的思想和工具,例如样条与平滑的关系、样条与 Fourier 变换以及概率论之间的内在联系等,对近代样条函数理论和应用的发展仍有其指导意义.

§ 1. 数据平滑化的定义与离散平滑公式

我们考虑无限个整数节点处型值

$$\{y_\nu\} \qquad (\nu = \cdots, -1, 0, 1, \cdots)$$

的平滑问题,设平滑后的型值由原型值线性迭加而成,即

$$F_n = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_\nu L_{n-\nu}, \tag{1}$$

其中权因子 $\{L_\nu\}$ 是偶序列 $L_{-\nu} = L_\nu$.

之所以要求 $\{L_\nu\}$ 是偶序列,是由于实际应用与理论两方面的需要. 在实际应用中,希望原来对称的型值经(1)变换后对称性保持不变;理论上则可对公式(1)运用下面的 Fourier 变换.

显然,并非是任给一个偶序列,公式 (1) 都能起平滑作用. 为此,首先要确定这里所用的“平滑”概念的含义,并弄清公式(1)要成为平滑公式,对于权因子 $\{L_\nu\}$ 应有哪些要求?

所谓数据 $\{F_n\}$ 比 $\{y_\nu\}$“平滑”,直观上就是新数据 $\{F_n\}$ 的“波动”不超过原数据的“波动”. 对于整数节点处的型值而言,这种“波动”自然可用各阶差分度量.

特别，当 y_v 恒为常数时，很自然要求 F_n 也等于同一个常数，这相当于规定

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} L_v = 1. \tag{2}$$

在一般情况下，希望新数据 $\{F_n\}$ 任意一阶差分在所有节点上的平方和不超过原数据 $\{y_v\}$ 同阶差分在所有节点上的平方和，即对任意自然数 j，恒有不等式

$$\sum_n (\Delta^j F_n)^2 \leqslant \sum_n (\Delta^j y_n)^2 \tag{3}$$

成立，且等号只是对很大的 i 或当 y_n 为常数时才允许成立.

为把不等式(3)转化为对权因子 $\{L_v\}$ 的要求，下面应用离散 Fourier 变换. 令以 2π 为周期的复值函数

$$T(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} y_v e^{ivu}, \tag{4}$$

称 $T(u)$ 为序列 $\{y_v\}$ 的特征函数(这里已假定

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} |y_v| < \infty,$$

即级数 $\{y_v\}$ 绝对收敛). 于是，一阶差分列 $\{\Delta y_v\}$ 的特征函数为

$$(e^{-iu} - 1)T(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \Delta y_v e^{ivu}.$$

一般，任意阶差分序列 $\{\Delta^i y_v\}$ 的特征函数是

$$(e^{-iu} - 1)^i T(u) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \Delta^i y_v e^{ivu}$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots).$$

两边乘以自身的共轭函数，然后在 $[0, 2\pi]$ 上积分，注意到序列 $\{e^{ivu}\}$在 $[0, 2\pi]$ 中的正交性质，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ivu} \cdot e^{-i\lambda u}$$

$$du = \delta_{v\lambda} = \begin{cases} 0, & v \neq \lambda; \\ 1, & v = \lambda. \end{cases}$$

于是，原序列 $\{y_v\}$ 任意阶差分在所有节点上的平方和可用特征函数 $T(u)$ 的积分形式来表示，

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty}(\Delta^j y_v)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\sin\frac{u}{2}\right]^{2j}|T(u)|^2du. \tag{5}$$

为了得到新序列 $\{F_n\}$ 的类似公式，先要导出权因子 $\{L_v\}$ 的特征函数．当

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty}|L_v|<\infty$$

时，偶序列 $\{L_v\}$ 的特征函数

$$\phi(u)=\sum_{v=-\infty}^{+\infty}L_v e^{ivu}=L_0+2L_1\cos u+2L_2\cos 2u+\cdots \tag{6}$$

是实值函数．将两个 Fourier 级数相乘，由(1)，

$$T(u)\cdot\phi(u)=\sum_{v=-\infty}^{+\infty}F_v e^{ivu}. \tag{7}$$

因而，与(5)相仿，可得

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty}(\Delta^j F_v)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2\sin\frac{u}{2}\right]^{2j}|T(u)|^2\phi^2(u)du. \tag{8}$$

因此，“平滑”所要求的不等式(3)满足的一个充分条件是权因子 $\{L_v\}$ 的特征函数 $\phi(u)$ 满足不等式

$$-1\leqslant\phi(u)\leqslant 1\qquad(0\leqslant u\leqslant 2\pi). \tag{9}$$

于是，可以这样来叙述数据平滑化的定义．

定义 1.1. 由偶序列 $\{L_v\}$ 给出的公式 (1) 称为离散平滑公式，是指该序列构成的级数绝对收敛，且该序列之和等于 1，而它的特征函数(6)之值均介于 -1 与 $+1$ 之间．

实际应用时不单要求经公式(1)处理后的数据要较前平滑，往往同时要求前后两组数据的“偏离”也不能过大．

由(4)，(7)式，这时的“偏离”可表示为

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty}(y_v-F_v)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|T(u)|^2(1-\phi^2(u))^2du. \tag{10}$$

于是，一方面由(8)可知，$\phi(u)$ 的绝对值越小，通过 (1) 式处理后

的数据平滑程度愈好，另一方面，根据上式，$\phi(u)$ 愈接近于 1，公式(1)的“偏离”程度愈小。这就清楚地表明，对于同一个平滑公式，其平滑性好与偏离程度小这两个要求是相互矛盾的.

根据上面的定义，我们可以直接构造出一类特殊的平滑公式.

定理 1.1. 如果对于所有的 n 均有

$$L_n \geqslant 0, \text{ 且 } \sum_{v=-\infty}^{+\infty} L_v = 1,$$

那么，由这样的偶序列 $\{L_v\}$ 所构成的公式(1)必然是一个平滑公式.

事实上，只需指出

$$|\phi(u)| \leqslant \sum_v |L_v| = 1.$$

除了平滑度与偏离之外，平滑公式(1)还有另一个常用的标准：精确度.

定义 1.2. 平滑公式(1) 称为 m 次精确，是指它对于任意一组不超过 m 次的多项式的型值 $\{y_v\}$ 是精确的.

由(6)，有展开式

$$\phi(u) = 1 + \frac{u^2}{2!}\phi'' + \frac{u^4}{4!}\phi^{(4)} + \cdots,$$

将它代入

$$e^{inu}\phi(u) = \sum_v e^{ivu} L_{n-v}$$

的左边，比较两边 u^s 项的系数，可得有关 n 的恒等式

$$n^s - c_s^2\phi'' n^{s-2} + c_s^4\phi^{(4)} n^{s-4} - \cdots = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} v^s L_{n-v}$$

$$(s = 0, 1, \cdots).$$

根据定义 1.2，这时平滑公式(1)为 $2p+1$ 阶精确等价于下面 $2p+2$ 个关系式成立：

$$n^s = \sum_v v^s L_{n-v} \qquad (s = 0, 1, \cdots, 2p+1).$$

定理 1.2. 平滑公式(1) 为 $2p+1$ 次精确的充要条件是函数

$\phi(u)-1$ 在 $u=0$ 处为 $2p+2$ 重零点.

§ 2. 基型插值公式的平滑理论

平滑公式中的权因子 $\{L_n\}$ 可以看作是由一组特殊数据平滑后得到的值. 事实上，若把下面这组称之为“初等点列”的特殊点列

$$y_0^*=1,\ y_n^*=0 \qquad (n \neq 0)$$

代入 §1 平滑公式(1)，即可给出 $F_n=L_n$. 考虑把所得到的偶序列 $\{L_n\}$ 延拓为整个实轴上的偶函数，且 $L(n)=L_n$. 这样，对于任意给定的一组离散数据 $\{y_v\}$，利用类似的平滑公式得到一个平滑函数

$$F(x)=\sum_v y_v L(x-v). \tag{1}$$

这时我们称 $L(x)$ 为上式的基本函数. 对于大多数只用到一系列等距离散点处型值的插值函数都可以表示成以上这种形式.

经典意义下的插值公式要求在插值节点处插值函数值严格等于给定的型值，这就必须且只须要求 $L(x)$ 满足条件

$$L(0)=1,\ L(n)=0 \qquad (n\neq 0). \tag{2}$$

否则，(1)式就是一种拟合公式，或按 Schoenberg 在 [1] 中的用语，是一种“平滑基型插值公式”.

设 $L(x)$ 已延拓到全实轴，与离散时的情况相仿，现在应用 Fourier 积分，称函数

$$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} L(x)e^{iux}dx \tag{3}$$

为权函数 $L(x)$ 的特征函数. 由于 $L(x)$ 是偶函数，$g(u)$ 也为偶函数，且表达式(3)是可逆的.

注意，一般并不假定 $L(x)$ 绝对可积，因而广义积分 (3) 的逆变换

$$L(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{iux}du \tag{4}$$

一般只是理解为在 Cauchy 意义下收敛，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}.$$

很容易把上节关于离散的平滑公式概念推广到这里来．如果(1)式中连续变量 x 代之为离散变数 n 后所得到的是 §1 离散形式下的平滑公式，则称(1)式为平滑的基型插值公式，或简称为平滑公式．

如果(1)式对于次数不超过 $k-1$ 次的多项式 $P_{k-1}(x)$ 是精确的，则称该基型插值公式具有 $k-1$ 次精度，即

$$P_{k-1}(x) = \sum_n P_{k-1}(n)L(x-n).$$

这等价于要求对于 $v=0, 1, \cdots, k-1$ 成立

$$x^v = \sum_n n^v L(x-n). \tag{5}$$

还存在另一种比 $k-1$ 次精度要求较弱的逼近概念，这就是所谓的 $k-1$ 次保存：平滑公式(1)能把任一个次数不超过 $k-1$ 次的多项式仍变成同一次数的多项式，且首项系数保持不变，即有关系式

$$\sum_n P_{k-1}(n)L(x-n) = P_{k-1}(x) + P_v(x)$$

$$(v < k-1).$$

显然，这等价于要求对于 $v=0, 1, \cdots, k-1$，有

$$Q_v(x) = \sum_n n^v L(x-n) \tag{6}$$

其中，$Q_v(x)$ 的形式为

$$Q_v(x) = x^v + a_{1v}x^{v-1} + \cdots + a_{vv}.$$

在上述这些概念的基础上，Schoenberg 在[1]中建立了以下有关基型插值公式的一般定理：

定理 1.3. 如果基型插值公式(1)中的权函数对一切 x 满足

$$|L(x)| < Ae^{-B|x|}. \tag{7}$$

这里 A, B 是两个正常数，那么，有以下的结论成立：

a. 与(1)式相应的离散平滑公式

$$F(n)=\sum_{v} y_{v} L(n-v) \tag{8}$$

的特征函数为

$$\phi(u)=\sum_{v} g(u+2\pi v),$$

其中 $g(u)$ 是 $L(x)$ 的特征函数.

b. 当下面两个条件成立时，平滑公式(1)具有 $k-1$ 次精度:

$$g(u)-1=u^{k} h(u) \quad (h(0) \neq 0),$$

$$g(u)=(u-2\pi v)^{k} h_{1}(u)$$

$$(h_{1}(2\pi v) \neq 0,\ v=\pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{9}$$

c. 如果 b 中只是满足第二个条件，且有 $g(0)=1$，平滑公式(1)具有 $k-1$ 次保存.

证明. 1) 条件(7)保证了 $L(x)$ 的特征函数 $g(u)$ 在复平面的一个无限长窄条（$-B<\operatorname{Im} u<B$）内解析，因而下面运算中的积分号可与求和号相交换:

$$L(x)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} du=\lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi(2p+1)}^{\pi(2p+1)} g(u) e^{iux} dx$$

$$=\lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-p}^{p} \int_{-\pi}^{\pi} g(u+2\pi v) e^{iux} \cdot e^{i2\pi vx} du$$

$$=\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{v=-\infty}^{+\infty} g(u+2\pi v) e^{i2\pi vx}\right\} e^{iux} du.$$

特别当 $x=n$ 是整数时即得证 a.

2) 为证明 b，我们引用数学分析中的 Poisson 公式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x-n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi nx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{-i2\pi vn} dv.$$

取 $f(x)=e^{-ixu} L(x)$，并利用上面证明的结论 a，对于一切实值 x 和 $g(u)$ 的正则域中的复值 u，有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inu} L(x-n)=e^{ixu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(u+2\pi n) e^{i2\pi nv}.$$