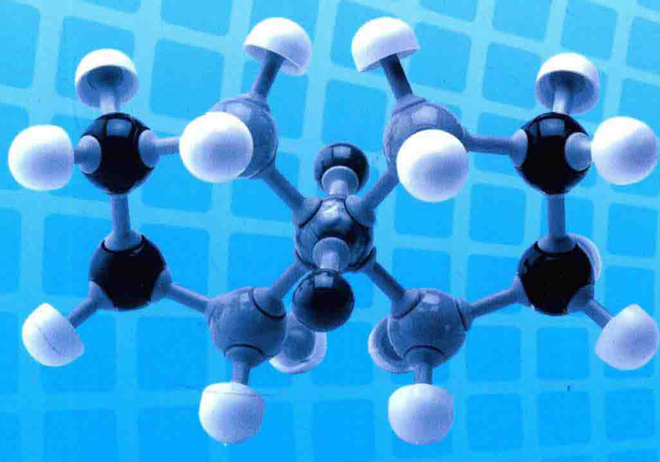
"十二五"高等职业教育精品教材

高职应用数学

（高分子、环监类）

主编 杨显中 王学荣



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等职业教育精品教材

高职应用数学

（高分子、环监类）

主编　杨显中　王学荣

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

为满足高职院校各专业对数学知识的需要，考虑到不同专业对数学内容提出的要求，编者对高等数学课程进行新的教学改革，编写了本套教材。

本系列教材内容包括预备知识、极限初步、导数与微分及其应用、积分初步、概率论与数理统计初步、数据处理、正交试验等。

本书可作为高职高专院校高分子、环境监测专业的《高职应用数学》教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高职应用数学 ：高分子、环监类 / 杨显中，王学荣主编. -- 上海 ：上海交通大学出版社，2014
ISBN 978-7-313-11994-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②王… Ⅲ. ①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 198691 号

高职应用数学：高分子、环监类

主　　编：杨显中　王学荣
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：北京市科星印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：16　　字　　数：270 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版　　印　　次：2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-11994-0/O
定　　价：39.80 元

前言

随着我国高等职业教育的快速发展，培养生产一线高素质技能人才已成为高等职业教育根本性的战略任务。高等数学作为高职院校的一门重要基础课，是一年级学生的必修课程，该课程的开设为学生以后学习专业知识奠定了坚实的数学基础。为满足高职院校各专业对数学知识的需要，考虑到不同专业对数学内容提出的要求，编者对高等数学课程进行新的教学改革，编写了本套适用于高分子、环境监测专业的《高职应用数学》教材，其中带“*”号的章节不要求高分子专业掌握。

本套教材以培养实用型人才为目标，贯彻必需、够用为度的原则。其特点为：

（1）以专业需求为导向，改变高职数学教学现状，调整现有的教材体系，使高职数学教学更好地为专业课服务。

（2）根据高职教育和生源的特点，突破传统的高等数学教材的编写方法，重构了新的数学教学体系，形成了崭新的、适合于培养实用型人才的体系，做到精简内容、降低难度、突出应用，以体现夯实基础、够用为度的高职教育新理念。

（3）注重实际应用，不追求复杂的计算和理论推导；注重揭示抽象概念的本质，强化与实际的联系，以凸显高等数学的“基础性”“工具性”“应用性”等特点。

（4）特别需要指出的是，目前国内以应用化工、食品、制药、化工分析与检验、化工环保、化工材料等专业为支撑的化工类专业群，专业设置涵盖化工行业生产的全过程，而这些专业都会涉及通过大量的试验和实验数据来摸索生产工艺和配方。本套教材详细阐述了如何科学地设计试验，并对众多的实验数据进行合理的分析和处理，从而达到通过较短的时间、有限的人力和财力获得最优试验方案。而国内现行的高职数学教材主要偏重于传统的微积分教学，很少涉及试验设计和数据处理方面的内容。

本套教材由杨显中、王学荣担任主编，邹成担任副主编，张艺婷、叶菁、曾安平参编。具体章节分配如下：

杨显中负责统稿，并编写了第 2、4 章及附录中的部分内容；王学荣编写第 3 章的第 3-5、3-6、3-7 节和 5、6 章及附录中的部分内容以及全书的作图；邹成编写了第 1 章的第 1-1 节和第 3 章的第 3-1 至 3-4 节；张艺婷编写了第 1 章第 1-2 节的内容；叶菁编写了第 7 章内容；曾安平整理了附录中的所有表格。

本书在组织编写和统稿过程中，参考了大量高等数学相关的资料和教材，在此向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢。由于水平有限，成书时间也比较仓促，书中存在的不足之处，敬请读者指正。

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登录北京金企鹅文化发展中心的网站（www.bjjqe.com）下载。

编　者

2014 年 8 月

目　　录

第1章

预备知识

本章主要是为学习高等数学和专业知识做准备，先复习指数、对数的有关知识以及几个常见函数，由此引入基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数和多元函数的概念.

§1-1　指数与对数

知识目标：1．掌握指数幂、对数、常用对数、自然对数的概念；

2．掌握指数幂、对数的运算法则、对数恒等式，对数的换底公式.

能力目标：1．会进行对数与指数的互化；

2．会用指数幂、对数的运算法则进行简单的计算和化简.

指数和对数是数学中一个非常重要和基本的概念，在许多数学和实际问题中，人们经常会用指数或对数进行计算或整理化简.

例如，某机器现价值50万元，每年的折旧率为10%（即每年减少其价值的10%），问：

（1）10年后它的剩余价值是多少？

（2）经过多少年后，其价值为原来的一半？

如何回答这个问题呢？这就是本节要解决的内容——指数与对数.

1.1.1　指数幂的概念

1．a的n次幂（方）

当$a \neq 0$时，规定

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{共n个a},$$

读作“a的n次幂（方）”，其中$n \in \mathbf{N}$，a称为底数，n称为幂（或方次）.

例如，$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$，$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$等.

进一步，当 $n=0$ 时，规定

$$a^{0}=1,$$

其中 $a\neq 0$．例如，$\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1$ 等．

2. 负整数指数幂

当 $a\neq 0$ 时，规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}},$$

称为负整数指数幂，读作“a 的负 n 次幂（方）”，其中 $n\in\mathbf{N}$．特殊地，

$$a^{-1}=\frac{1}{a}.$$

例如，$3^{-2}=\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{9}$，$2^{-1}=\frac{1}{2}$ 等．

注　负指数幂实际上表示一个数的倒数．反之，一个数的倒数可以化成分数指数幂，这点在今后的整理化简中常用到．例如，$\frac{1}{81}=\frac{1}{3^{4}}=3^{-4}$，$\frac{1}{5}=5^{-1}$ 等．

3. 正分数指数幂

当 $a>0$ 时，规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}},$$

称为正分数指数幂，读作“a 的 $\frac{m}{n}$ 次幂（方）”，其中 $m\in\mathbf{N}^{+}$，且 $n>1$．特殊地，

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

例如，$2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^{2}}=\sqrt[3]{4}$，$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 等．

注　正数的正分数指数幂表示一个根式．反之，一个根式也可以化成正分数指数．例如，$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^{6}}=2^{\frac{6}{3}}=2^{2}=4$，$\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}$ 等．

4. 负分数指数幂

当 $a>0$ 时，规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

称为负分数指数幂．读作“a 的负 $\frac{m}{n}$ 次幂（方）”，其中 m，$n\in\mathbf{N}^+$，且 $n>1$．特殊地，

$$a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

例如，$5^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$，$3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 等．

注　正数的负分数幂表示一个根式分之一．反之，一个根式分之一也可以化成负分数指数．例如，$\frac{1}{\sqrt[4]{64}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2^6}}=2^{-\frac{6}{4}}=2^{-\frac{3}{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$ 等．

1.1.2　指数幂的运算法则

有了上面的规定，不难得到以下关于指数幂的运算法则：

（1）$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$，其中 $a>0$，r，$s\in\mathbf{R}$；

（2）$(a^r)^s=a^{rs}$，其中 $a>0$，r，$s\in\mathbf{R}$；

（3）$(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$，其中 a，$b>0$，$r\in\mathbf{R}$．

注　以上法则不但要学会顺着用，还需学会逆着用．

例 1　计算下列各值．

（1）$27^{\frac{2}{3}}$；　　（2）$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$；　　（3）$0.125^{-\frac{2}{3}}$．

解　（1）$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=9$；

（2）$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-\frac{3}{4}}=(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}=2^{(-4)\times(-\frac{3}{4})}=2^3=8$；

（3）$0.125^{-\frac{2}{3}}=(0.5^3)^{-\frac{2}{3}}=0.5^{3\times(-\frac{2}{3})}=0.5^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=(2^{-1})^{-2}=2^{(-1)\times(-2)}=2^2=4$．

例 2　化简下列各式.

（1）$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{a\sqrt{a}}$；　　　（2）$\left(\frac{3}{4}x^{2}\cdot y^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{3}{2}}\right)$.

解　（1）原式$=a^{\frac{1}{4}}\cdot(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot(a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=a^{1}=a$；

（2）原式$=\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}\right)\cdot x^{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}x^{\frac{11}{6}}\cdot y^{-\frac{4}{3}}$.

1.1.3　对数的概念

1. 对数的定义

由指数的定义可知 2 的 3 次幂等于 8，即 $2^3=8$．在许多实际问题中经常会遇到相反的问题，例如，2 的多少次幂等于 8，即 $2^?=8$．像这种已知底数 2 和幂 8，求指数的问题，简单的容易回答，但如果问 $2^?=0.15$，用已学过的知识是求不出的，因此需要引入新的概念.

定义 1　如果 $a^b=N(a>0,\ a\neq1)$，则称 b 为以 a 为底 N 的对数，记为 $\log_a N$，即

$$b=\log_a N.$$

其中 a 称为底数，N 称为真数，符号“log”是拉丁文 logarithm 的缩写.

$a^b=N$ 称为指数式，$b=\log_a N$ 称为对数式．这两个式子表示的是 a，b，N 三个数之间的同一种关系，二者是等价的，即

$$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N.$$

例 3　把下列指数式写成对数式.

（1）$3^4=81$；　　　（2）$4^{-2}=\frac{1}{16}$；　　　（3）$\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$.

解　由对数定义得

（1）$4=\log_3 81$；　　　（2）$-2=\log_4\frac{1}{16}$；　　　（3）$2=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}$.

例 4　将下列对数式写成指数式.

（1）$\log_5 125=3$；　　　（2）$\log_{10}0.0001=-4$.

解　由对数定义得

（1）$5^3=123$；　　　（2）$10^{-4}=0.0001$.

2. 对数的性质

根据对数的定义，不难得到对数具有如下 3 个性质：

（1）零和负数没有对数，即真数 $N>0$；

（2）1 的对数为零，即

$$\log_a 1=0\,(a>0，a\neq 1)；$$

（3）真数与底数相同时，对数为 1，即

$$\log_a a=1\,(a>0，a\neq 1).$$

注　（1）性质 1 常用于求对数函数的定义域；

（2）性质 2，3 常用于求解对数不等式.

把 $b=\log_a N$ 代入 $a^b=N\,(a>0，a\neq 1)$，得

$$a^{\log_a N}=N\,(a>0，a\neq 1)，\tag{1-1}$$

把 $N=a^b$ 代入 $\log_a N=b\,(a>0，a\neq 1)$，得

$$\log_a a^N=N\,(a>0，a\neq 1).\tag{1-2}$$

由式（1-1）和式（1-2）可以看出，指数与对数运算是互为逆运算的. 式（1-1）和式（1-2）式都称为对数恒等式.

1.1.4　常用对数、自然对数

在生产实际和科学研究中，常用到以 10 和 e 为底的对数，其中 e 是一个无理数，其值为 2.718 281 828 459 045….

定义 2　（1）以 10 为底的对数 $\log_{10} N$ 称为常用对数，简记为 $\lg N$；

（2）以 e 为底的对数 $\log_{\mathrm{e}} N$ 称为自然对数，简记为 $\ln N$.

注　前面的对数性质、对数恒等式对常用对数、自然对数仍成立，即

$$\lg 1=0；\ \lg 10=1；\ \lg 10^x=x；\ 10^{\lg x}=x；$$

$$\ln 1=0；\ \ln \mathrm{e}=1；\ \ln \mathrm{e}^x=x；\ \mathrm{e}^{\ln x}=x.$$

1.1.5　对数的运算法则

由于指数与对数运算是互为逆运算，因此，由指数的运算法则不难得到对数有以下三条运算法则.

法则 1　两个正整数积的对数等于同一底数的这两个对数之和，即

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N\,(M>0，N>0).$$

此法则可以推广到有限个乘积的情况，即

$$\log_a(M_1 \cdot M_2 \cdots M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \cdots + \log_a M_n,$$

其中M_1，M_2，…，$M_n > 0$.

法则 2　两个正整数商的对数等于同一底数的被除数的对数减去除数的对数，即

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \ (M > 0，N > 0).$$

法则 3　一个正整数幂的对数等于幂的底数的对数乘以幂指数，即

$$\log_a N^{\mu} = \mu \cdot \log_a N \ (N > 0).$$

注　以上三条法则在今后计算、整理化简中经常用到，不但要学会顺着用，还需学着逆用.

例 5　求下列各式值.

（1）$\log_2(32 \times 4^3)$；　　（2）$\log_3 \frac{1}{3} + \log_3 \frac{1}{81}$.

解　（1）原式$= \log_2[2^5 \times (2^2)^3] = \log_2 2^5 + \log_2 2^6 = 5\log_2 2 + 6\log_2 2 = 5 + 6 = 11$；

（2）原式$= \log_3 3^{-1} + \log_3 3^{-4} = (-1)\log_3 3 + (-4)\log_3 3 = -1 - 4 = -5$.

例 6　化简$\log_a \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{z^6}$.

解　原式$= \log_a \dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{z^6} = \log_a(x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}}) - \log_a z^6 = \dfrac{1}{2}\log_a x + \dfrac{2}{3}\log_a y - 6\log_a z$.

例 7　1889 年，阿累尼乌斯（Arrhenius Svante August，1859—1927，瑞典化学家）根据实验结果，总结出了反应速率与温度之间的定量关系式为

$$k = A\exp\left(-\frac{E_\alpha}{RT}\right),$$

其中，k是反应的速率常数，A是一个与具体反应有关的常数，R是气体常数，E_α是反应的活化能，T是反应的温度，试把它写成对数式.

解　由指数、对数的关系以及对数法则得

$$\ln k = -\frac{E_\alpha}{RT} + \ln A.$$

令$y = \ln k$，$x = \dfrac{1}{T}$，$b = \ln A$，则上式可变为

$$y = -\frac{E_\alpha}{R}x + b,$$

上式在今后的专业学习中要用到.

注　在工程和其他学科中，指数e^b常写成$\exp(b)$.

1.1.6 换底公式

由对数与指数的互换关系，不难得到不同底数的对数之间可以互相转化. 一般地，有下面公式

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \tag{1-3}$$

其中，$a>0$，$b>0$ 且 $a\neq 1$，$b\neq 1$，$N>0$. 式（1-3）称为对数的换底公式.

注　用换底公式可将任意对数化成常用对数或自然对数来计算，即

$$\log_a N = \frac{\lg N}{\lg a} \text{或} \log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}.$$

例如，

$$\log_7 27 = \frac{\lg 27}{\lg 7} \approx \frac{1.431\,363\,764}{0.845\,098\,04} = 1.693\,725\,102,$$

或

$$\log_7 27 = \frac{\ln 27}{\ln 7} \approx \frac{3.295\,836\,866}{1.945\,910\,149} = 1.693\,725\,102.$$

下面回答本节开始提出的问题.

例 8　某机器现价值 50 万元，每年的折旧率为 10%（即每年减少其价值的 10%）. 问：

（1）10 年后它的剩余价值是多少？

（2）经过多少年后，其价值为原来的一半？

解　由题意可得，经过 x 年后机器的剩余价值是

$$y = 50(1-10\%)^x,$$

即

$$y = 50\times 0.9^x.$$

（1）所以，当 $x=10$ 时，则

$$y = 50\times 0.9^{10} \approx 50\times 0.348\,7 \approx 17.43;$$

（2）当 $y = 50\times\frac{1}{2} = 25$ 时，则

$$25 = 50\times 0.9^x,$$

即

$$0.5 = 0.9^x,$$

两边取对数，整理得

$$x = \frac{\lg 0.5}{\lg 0.9} \approx 6.6,$$

即约 6 年半左右机器的价值为原来的一半.