XIAN XING DAI SHU

YU DIAN LU FANG CHENG

线性代数

与电路方程

戴 宏 戴 琳 / 编著

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X=AX+Bf$$

$$x=\eta^*+\xi=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_l\xi_l$$

科 学 出 版 社

线性代数与电路方程

戴　宏　戴　琳　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书内容包含线性电路与线性代数基础知识、行列式与解的表示、秩与解的存在性和结构、相似变换与微分方程等4章，各章均配有相当数量的习题，书末附有习题答案。本书的主要特点是将线性代数直接应用于线性电路分析中电压、电流的求解计算。数学方面除了经典的行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、线性代数方程组、矩阵的对角化与相似变换等内容外，增加了复数和一元多项式等内容，目的是为求解常系数线性微分方程进行铺垫。电路分析计算的方程组主要是针对直流激励和正弦交流激励的实数线性代数方程组、复数线性代数方程组和常系数线性微分方程等，其内容包括解的存在性、唯一性和稳定性，以及解的表示和结构等。全部内容教学时数约48学时。

本书可供高等院校电类和涉电类工科专业使用，包括电子信息类、电气工程类、无线通讯类、自动控制类、机电工程类、光电技术类、能源类、网络类、仪器仪表类等，也适用于理工交叉学科物理工程、生化检测分析、空间和地理信息探测等专业，还可供研究生、教师和科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与电路方程/戴宏，戴琳编著. —北京:科学出版社，2017.12
ISBN 978-7-03-056088-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戴… ②戴… Ⅲ.①线性代数-教材 ②线性电路-教材 Ⅳ.①O151.2②TN710

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第322597号

责任编辑：张 展 黄 桥/责任校对：韩雨舟
责任印制：罗 科/封面设计：墨创文化

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017年12月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2017年12月第一次印刷 印张：7 1/2
字数：180千字

定价：35.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

在高等教育中，线性代数越来越多地被理科和工科以外的众多学科作为一门重要的专业基础课程所开设。人们深刻地认识到，线性代数的理论与方法不仅在自然科学、工程科学、社会科学等多个领域有广泛的应用，而且在人才计算技能培养方面也是不可或缺的。

线性代数的基本概念、基本理论和基本方法具有较强的逻辑性、抽象性、综合性和实用性，这些特点常常使初学者望而生畏。《线性代数与电路方程》是专门为工程技术应用型普通高等院校编写的。在编写过程中，本书遵循本学科的系统性与科学性，内容尽量少而精，书中概念的引入、理论的展开、篇章的过渡，基本都从学生熟知的实例或将要解决的实际问题出发，并选择与中学所学知识相连贯的内容作为切入点，让学生能更好地由浅入深、循序渐进地学习，易于知识的融会贯通。对于较难的理论证明，本书作了适当的弱化处理，代之以通俗直观的举例或类比加以说明。

例如，在中学所学电阻的串并联电路中仅新增了一个电阻便引出了使用线性方程组求解所需要解决的问题。再如，通过照明、动力电路电流的计算问题引入了复数的概念及其四则运算规则，从而为正弦激励作用于线性电路的响应分析及其计算开辟了一条通道。还有，应用对电子仪器装置、电气控制设备进行频繁开关操作将缩短其寿命的统计结果，提出了用微分方程来定量分析开关前后电压、电流的剧烈波动问题。

对于初学者难以理解的向量组的线性相关性、秩、极大线性无关组等概念，本书直接引入了线性代数系统加法运算封闭性和数乘运算封闭性的定义，并通过电路方程组中行与行的元素和列与列的元素之间的关系明确了线性齐次性和线性叠加性的意义。本书每章中都讨论了具有实用价值的电路方程的相关内容，生动地展示了线性代数作为表达、分析和计算工具在解决电路系统问题中的强大功能。

本书经作者反复推敲编创而成，力求突出直观性、形象化和应用性的教学构想。全书结构流畅，主次分明，论述条理清晰、通俗易懂、易教易学、具有一定的学科针对性。

本书除了传统的行列式、矩阵理论、线性方程组解的结构等内容以外，增加了复数和多项式的相关知识介绍，并在矩阵相似变换的基础上加入了电路一阶微分方程组的求解过程和分析。云南大学戴宏编写了全书约三分之二的内容，昆明理工大学戴琳编写了约三分之一的内容。全书由戴宏统稿而成，教学约需 48 学时。建议第 1 章至第 4 章的教学学时依次为 12、12、14 和 10 学时。

限于编者水平，不足之处在所难免，恳请广大读者和师生批评指正。

作　者

2017 年 7 月

目　录

第 1 章　电路与线性代数基础

近代以来，人们在研究自然界、社会和思维的规律时，普遍引用了系统的概念、理论和方法。通常，系统是指由若干相互联系、相互作用的事件组合而成的具有某种功能的整体。太阳系、生态系统和动物的神经系统等属于自然系统；供电网、运输系统、互联网等属于人工系统；生物系统、化学系统、政治体制系统、经济结构系统、生产组织系统等属于非物理的系统。物理系统一般认为由力、热、声、光、电磁等系统组成。这些系统的运动变化规律通常用变量来描述，如果变量由线性方程决定，则称该系统为线性系统；如果变量由非线性方程决定，则称该系统为非线性系统。

物理系统中与电磁现象联系紧密的实际电路系统在满足集总参数假设的前提下，可以将组成实际系统的导线、开关、器件、装置、设施等的能量表现形式抽象为参数或模型等效描述。例如，电阻是电能消耗或使用的表现形式，所以可用电阻值 R 集中描述耗能或使用电能的现象。而实际的电阻器被制作后其主要的特性是耗能或用能，则该电阻器就可用电阻值 R 表示。所有电路中的能量现象对应地使用参数或模型描述后，可用理想导体将它们连接组成系统，这样的系统被称为模型电路系统。

当选取电压、电流作为变量描述电路系统的特性时，它们各自受到基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）的约束，这被称为拓扑约束。另一方面，模型元件电压、电流之间还必须遵从一定的线性关系（VCR，即电压电流关系或伏安关系），这被称为元件约束。遵从拓扑约束和元件约束的电路系统称为模型电路系统，描述电路系统特性的电压、电流随时间变化，其变化规律由拓扑约束和元件约束决定。

1.1　线性电路方程

所谓方程，也称约束，是指那些含有未知量的等式，它表达了未知量所必须满足的条件。例如在电路中，未知电压、电流所必须满足的条件是 KCL、KVL、VCR 方程或约束。方程的种类繁多，一般按未知量的类型和对未知量所施加的数学运算进行分类。如果在一个方程中的未知量是数，这样的方程就是代数方程；如果在一个方程中的未知量是函数，这样的方程就是函数方程，如果在一个函数方程中含有未知函数的求导运算或微分运算，这样的函数方程就称为微分方程。在人们探求物质世界运动规律的过程中，一般很难全靠实验观测认识清楚运动规律，因为人们不太可能观察到运动的全过程。然而，运动物体（相当于变量）与它的瞬时变化率之间，通常在运动过程中按照某种已知定律存在着联系，而这种联系用数学语言表示出来，其结果往往会形成一个微分方程。

一般来说，微分方程就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数的等式。如果其中的未知函数只与一个自变量有关，则称为常微分方程；如果未知函数是两个或两个以上自变量的函数，并且在方程中出现偏导数，则称为偏微分方程。本书中的变量电压和电流在集总参数假设下只与时间有关，即只与一个自变量有关，所以是常微分方程。另外，如果电路中没有电容元件和电感元件时，未知电压、电流是实数或函数，则受代数方程或函数方程约束。

1.1.1 线性电路元件

实际电路是由开关、器件、芯片、装置、设施等用导线连接组成的，通常按能量的高低分为强电系统和弱电系统。强电系统的作用主要是传输和转换电能，而弱电系统的主要作用则是传递和处理信号。电能由电源提供，而信号在电路系统中亦被视为能量的源泉，因此将电源和电信号统称为激励。所以，当我们说“电路”一词时，应该明确是由激励和实际电路两部分构成。

由激励和实际电路构成的电路并不能直接进行计算，其特性难以被定量描述，因此需要对电路中发生或出现的每一种物理现象或过程进行分析，并给每一种物理现象赋予确定的集总参数，称之为物理建模。电路中发生的物理现象分为电能的消耗、存储和转换，所以对应建立了电阻模型、电容/电感模型和受控源模型。由这些模型构成的电路统称为模型电路。本书仅针对模型电路讨论其分析计算问题。

电阻模型也称电阻元件，它表示电路中耗能或用能的现象，用参数 R 描述，国际单位为欧姆（Ω）。实际的电阻器件在近似情况下可视为电阻元件，即理想元件。

电感模型和电容模型也称电感元件和电容元件，它们描述电路中发生的储能现象。电感元件表示能将电能转换为磁场进行存储，又能将存储的磁场转换为电能返回电路的现象，用参数 L 描述，国际单位为亨利（H）。电感分为自感和互感，本书只讨论自感，亦称为电感。电容元件表示能将电能转换为电场进行存储，又能将存储的电场转换为电能返回电路的现象，用参数 C 描述，国际单位为法拉（F）。

受控源模型也称受控源元件，用于描述弱的电能能够控制电源将其电能转化为一个强的电能的现象。因为电能可以等效用电压表示，也可以等效用电流表示，所以有四种受控源元件，它们分别是电压控制的电压源（VCVS），电压控制的电流源（VCCS），电流控制的电压源（CCVS）和电流控制的电流源（CCCS）。

上述模型中，电阻、电感和电容等同于一个二端元件，可用中学学过的图形符号表示。受控源元件等同于两个二端元件，亦可用图形符号表示。另外，激励也可用模型表示，称为理想电源元件，它描述电路中提供电能的现象。理想电源元件分为理想电压源元件（用参数 $u_s(t)$ 描述）和理想电流源元件（用参数 $i_s(t)$ 描述），它们都是二端元件。

应该指出，只要电路中发生或出现的每一微小物理现象都能被捕捉并被表示为模型参数，则这样的模型电路便能准确地反映电路的任何特性。集成电路的研发成功充分证明了这一点。

1.1.2　元件约束方程

为了能够定量、准确地描述电路特性，需要按电路的结构特点和守恒律来选取电路变量。根据电路系统中电荷守恒定律和能量守恒定律，应该选取电荷量 $q(t)$ [①]和电能 $w(t)$ 作为基本变量。但因其不便于测量，所以选取电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 作为表征电路特性的基本变量。它们与电荷量 $q(t)$ 和电能 $w(t)$ 的关系是 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 和 $u(t)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}$。电流的国际单位为安培（A），电压的国际单位为伏特（V）。

电阻元件的约束方程，即电压电流关系是我们熟悉的欧姆定律。可以写为两种形式，一种是 $u_R=Ri_R$，另一种是 $i_R=Gu_R$，G 为电导，它等于电阻 R 的倒数，国际单位为西门子（S）。

电感元件的电流 $i_L(t)$ 在其周围产生磁通总链数 $\varPsi(t)=Li_L(t)$，若 $\varPsi(t)$ 连续，则有关系 $\dfrac{\mathrm{d}\varPsi}{\mathrm{d}t}=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$，即 $u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$。这就是电感元件的电压电流关系。该关系也可写为积分形式。

电容元件的电荷量 $q(t)$ 与两极板的电压 $u_C(t)$ 存在关系 $q(t)=Cu_C(t)$，若 $u_C(t)$ 连续则有关系 $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$，即 $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$。这就是电容元件的电压电流关系。该关系也可写为积分形式。

受控源元件的电压电流关系与电阻元件类似。对于 VCVS 为 $i_1=0$，$u_2=\alpha u_1$；对于 VCCS 为 $i_1=0$，$i_2=gu_1$；对于 CCVS 为 $u_1=0$，$u_2=ri_1$；对于 CCCS 为 $u_1=0$，$i_2=\beta i_1$。其中 α、g、r、β 为实常数，可正可负，但 R、L、C 则为非负实常数。

上述四类元件的电压电流关系合称为实际电路的数学模型。这些关系因为具有线性特性，所以也称为线性电路模型。考虑到激励可以用理想电压源或理想电流源模型等效描述，所以实际电路可被模型化，但需要注意的是，激励的电压电流关系由其自身和外电路确定。本书中主要讨论激励为直流和正弦交流这两种情况，它们均是已知量。此外，下面的讨论中提到的电路都指模型电路。

1.1.3　拓扑约束方程

所谓拓扑，是指由特定意义的点、线连接构成的图形，也称拓扑结构。在电路中，“线”代表上述二端元件中的任何一种，称之为支路，一个二端元件就是一条支路，一条支路用一个电流描述其特征。“点”代表“线”与“线”连接的位置，称为节点，一个节点用一个电位描述其特征。电位是指选取零电位点后的电压，具有相对性。

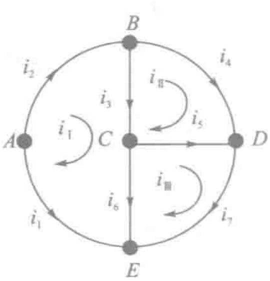
图 1-1 是惠斯通电桥电路的拓扑图。它由七个二端元件组成，分别用七个电流 i_1，i_2，…，i_7 描述，如图 1-1(a)所示。二端元件的连接点有 A、B、C、D、E 五个，用五个节点电位 u_A，u_B，…，u_E 描述，如图 1-1(b)所示。若选取 u_E 为参考零电位，即 $u_E=0$，

① 本书中用小写字母表示变量，且 $q(t)$ 与 q 相同；用大写字母表示常量，例如 U、I、P 等。

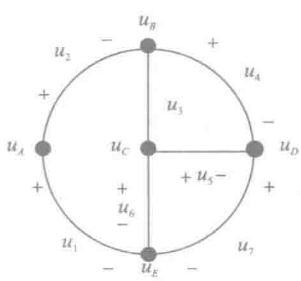
则七个支路电压u_1，u_2，…，u_7与节点电位u_A，u_B，…，u_E的关系是：

$$\begin{cases} u_1 = u_A - u_E = u_A \\ u_2 = u_A - u_B \\ u_3 = u_B - u_C \\ u_4 = u_B - u_D \\ u_5 = u_C - u_D \\ u_6 = u_C - u_E = u_C \\ u_7 = u_D - u_E = u_D \end{cases} \tag{1-1}$$

显然，求出了节点电位便可确定支路电压。通常，使用计算机软件对电路进行分析时，给出的结果一般是节点电位。在第 3 章中我们将看到，式(1-1)是基尔霍夫电压定律的矩阵形式，是电路的拓扑约束之一。



(a) 支路电流与网孔电流



(b) 支路电压与节点电位

图 1-1 惠斯通电桥的拓扑图

基尔霍夫电流定律简称 KCL，对于任何集总参数电路，在任意时刻流入或流出节点的电流代数和等于零。数学表述为

$$\sum_{m=1}^{k} i_m(t) = 0$$

其中k是流入流出某一节点的支路数，$i_m(t)$是第m条支路的电路。

KCL 是电荷守恒定律在电路中的表现形式，它表征了电流之间的约束关系。在图 1-1(a)的拓扑图上对未知电流任意标出其流向，称为参考方向。规定流入节点的电流取正号，流出节点的电流取负号，可依次对 5 个节点A、B、C、D、E列出 KCL 方程：

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 = 0 \\ i_4 + i_5 - i_7 = 0 \\ i_1 + i_6 + i_7 = 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

基尔霍夫电压定律简称 KVL，对于任何集总参数电路，在任意时刻沿回路的电压降或电压升的代数和等于零。数学表述为

$$\sum_{m=1}^{l} u_m(t)=0$$

其中 l 是某一回数所含的支路数，$u_m(t)$ 是第 m 条支路的电压。

回路是由拓扑图上的“线”连接构成的闭合路径，所以 KVL 表征了“线”之间，即电压之间的约束关系。它是能量守恒定律在电路中的表现形式。在图 1-1(b) 的拓扑图上对未知电压任意标出其正负极性，称为参考极性，为统一起见，从正极性指向负极性的方向称为电压的参考方向。要用 KVL 列出方程，首先需要对回路假设一个绕行方向。对于平面电路，一般假设沿顺时针方向绕行一圈来确定电压的正负极列出 KVL 方程，即沿绕行方向从负极性到正极性的电压取正号，称为电压升，而从正极性到负极性的电压取负号，称为电压降，这样可列出图 1-1(b) 拓扑图中七个回路的 KVL 方程：

$$\begin{cases} u_1-u_2-u_3-u_6=0 \\ u_3-u_4+u_5=0 \\ -u_5+u_6-u_7=0 \\ u_1-u_2-u_4-u_7=0 \\ u_3-u_4+u_6-u_7=0 \\ u_1-u_2-u_4+u_5-u_6=0 \\ u_1-u_2-u_3-u_5-u_7=0 \end{cases} \tag{1-3}$$

从方程(1-2)和方程(1-3)可以看出，电压和电流并不存在联系，需要元件的电压电流关系作为桥梁。方程(1-2)和方程(1-3)都存在零解，是否有非零解？方程(1-2)中，未知量多于方程数，能否求解？方程(1-3)中，未知量等于方程数，是否有唯一解？这些问题都是本书将要讨论的内容。

例 1-1　某电路根据 KCL、KVL、VCR 列出了电流 I_1、I_2、I_3 满足的方程：

$$\begin{cases} I_1-I_2-I_3=0 \\ (\mu-1)I_1-I_2=-5 \\ -\mu I_1+I_2-2I_3=U_s \end{cases}$$

其中，参数 μ 和 U_s 可以调节。试求解电流 I_1、I_2、I_3。

解　使用中学所学代入消元法可得

$$\begin{cases} (2\mu-5)I_1=U_s-15 \\ (2\mu-5)I_2=(\mu-1)U_s-5(\mu+2) \\ (2\mu-5)I_3=(2-\mu)U_s-5(1-\mu) \end{cases}$$

(1) 当 $2\mu-5\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{U_s-15}{(2\mu-5)} \\ I_2=\dfrac{(\mu-1)U_s-5(\mu+2)}{(2\mu-5)} \\ I_3=\dfrac{(2-\mu)U_s-5(1-\mu)}{(2\mu-5)} \end{cases}$$

(2) 当 $2\mu-5=0$，$U_s\neq15$ 时，将出现 $0=-\frac{1}{2}U_s+\frac{15}{2}$ 的矛盾结果，方程组无解。

(3) 当 $2\mu-5=0$，$U_s=15$ 时，原方程组变为

$$\begin{cases}\frac{3}{2}I_1-I_2=-5\\-\frac{5}{2}I_1+I_2-2I_3=15\end{cases}$$

两个方程求解三个未知量，方程组有无穷多解。若设电流 $I_2=c$，称其为自由未知量，c 为任意数，则可得出方程组解的一种表示形式：

$$\begin{cases}I_1=\frac{2}{3}c-\frac{10}{3}\\I_2=c\\I_3=-\frac{2}{3}c+\frac{20}{3}\end{cases}$$

可见，无穷多解由两部分构成。一部分与自由未知量有关，是可变的，另一部分则是确定的。

从该例题可知，对于方程组的求解需要解决三个问题。首先是解的存在性，其次是唯一解的表示，最后是解的结构或构成。

在电路中，除了上述的代数方程，更多的是含有电感元件或电容元件的微分方程。因为电感、电容的电压电流关系含有对时间的一阶导数，所以方程组的解将随时间变化，因此把电感元件和电容元件合称为动态元件。当电路中含有 n 个动态元件时，描述电路特性的微分方程一般含有对时间的 n 阶导数，因此是一个 n 阶微分方程。一般地，设激励为 $f(t)$，则电路中的电压或电流 $y(t)$ 受下述微分方程约束：

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_0y=b_m\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}f}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_0f \tag{1-4}$$

在线性电路中，a_n，a_{n-1}，…，a_0，b_m，b_{m-1}，…，b_0 是由电路参数和结构确定的实常数。其求解的方法将在第 4 章给出。

关于电路中状态方程的问题，也留到第 4 章进行讨论。

例 1-2 电阻 R、电感 L 和电容 C 串联后接于电源 $u_s(t)$ 上。试求电容电压的约束方程。

解 因串联电路，电流相同，设为 $i(t)$。

根据电阻 R、电感 L 和电容 C 的电压电流关系，可得

$$u_R=Ri,\quad u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\quad i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

根据 KVL 可得

$$u_R+u_L+u_C=u_s$$

联合求得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_s(t)$$

这就是电容电压的约束方程。因为有电感、电容两个动态元件，所以是二阶微分方程。

1.2　线性代数基础

代数学可以划分为初等代数和高等代数。高等代数通俗地说是中学所学初等代数的继续和提高，研究的主要对象是带有代数运算的集合，也称代数系统。本书中涉及的集合是数的集合，主要是实数、复数的集合。集合可以由数、数列或向量组成，还可以是数表或矩阵组成。代数运算是指加法、减法、乘法和除法这四种运算，一般认为减法不是一种独立的运算，通常被归为加法运算。

在高等代数中，将基本的代数系统归为群、环和域三类。群是一种相对简单但是最重要的代数系统，它仅带有乘法的运算。环是带有加法、减法和乘法运算的代数系统。而域是在环的基础上增加了一种类似于除法运算的称为可逆运算的代数系统。不论代数系统是群、环还是域，其基本问题的解决主要依靠多项式理论和方程理论。线性代数系统是一种最基本的代数系统，属于域的一种特殊情况，因为矩阵、向量组的乘法运算和可逆运算是受限制的。

1.2.1　线性代数系统

集合是一类元素的集体，数集便是一类数的集体。已经学过的数集有整数集、有理数集、无理数集和实数集。可用大写字母表示数集，一般用 **Z** 表示全体整数的集合，**Q** 表示全体有理数的集合，**R** 表示全体实数的集合。对于下面将要学习的复数，用 **C** 表示其集合。除特别申明，所用到的数都指实数。

在中学解析几何中，把“既有大小，又有方向的量”叫作向量，用黑斜体表示。在笛卡儿直角坐标系中用带箭头的线段表示向量，并且规定向量的起点为坐标原点，终点用坐标分量这种有序数来表示。例如，一维向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x$，二维向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$，三维向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$。其中 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 称为单位向量。一维向量因为只有一个坐标分量，所以其集合是一个数集；而二维向量、三维向量和 n 维向量由于含有两个分量、三个分量和 n 个分量，所以其集合是一个向量集合或者数列集合。另外，由于坐标分量是有顺序的，因此向量集合是由有序数构成的数列集合。

在直角坐标系中，单位向量是确定的，因此向量可用分量表示为行的形式或列的形式，本书采用列的形式 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 表示，若需用行的形式，则使用 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}=(x,\ y,\ z)$ 表示，并称 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的转置向量。显然，同一组分量构成的行向量和列向量互为转置向量。

三维向量的全体构成三维向量集合，集合中的向量有相等、相加和数乘三种运算：

(1) 两个向量相等是指两个向量对应分量均相等。

(2) 两个向量相加(减)，其结果是两向量的对应分量相加(减)后得出的新分量对应的向量。

(3)非零数乘一个向量，其结果是该向量所有各分量乘以该非零数后得出的新分量对应的向量。

例 1-3　已知向量 $\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$，试求向量 $4\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$，$3\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_2$。

解

$$4\boldsymbol{r}_1=4\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times3\\4\times4\\4\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\16\\28\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\4+0\\7+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\12\end{pmatrix}$$

$$3\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_2=3\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3-2\times2\\3\times4-2\times0\\3\times7-2\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\12\\11\end{pmatrix}$$

这些结果可在直角坐标系中按比例画出相应向量进行一一验证。

按向量的运算规则，可以得出 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}z=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，其中 $\boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$是单位向量的数列或分量表示式。

一般地，n 个有序数 a_1，a_2，…，a_n 排成的数组称为 n 维列向量，简称 n 维向量，用黑斜体的字母记为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

其中，a_i 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个分量，$i=1$，2，…，n。分量全为零的向量称为零向量，否则称为非零向量。向量 $\boldsymbol{a}$ 的转置向量 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 称为行向量。

显然，n 维向量的全体构成一个集合。若分量为实数，用 $\mathbf{R}^n$ 表示该集合；若分量为复数，则用 $\mathbf{C}^n$ 表示该集合。n 维向量同三维向量类似，本书仅使用相等、相加(减)和数乘三种运算。关于向量的长度及点乘、叉乘等运算，有兴趣的读者可参阅相关书籍。

利用 n 维向量的运算规则，我们可以将方程式(1-2)写为如下形式：

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}i_1+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}i_2+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}i_3+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}i_4+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}i_5+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}i_6+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}i_7=0$$

或者

$$i_1\boldsymbol{a}_1+i_2\boldsymbol{a}_2+i_3\boldsymbol{a}_3+i_4\boldsymbol{a}_4+i_5\boldsymbol{a}_5+i_6\boldsymbol{a}_6+i_7\boldsymbol{a}_7=0$$

其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_6=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_7=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对于例 1-1 中的方程组，也可用向量的形式表示为

$$\begin{pmatrix}1\\\mu-1\\-\mu\end{pmatrix}I_1+\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}I_2+\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}I_3=\begin{pmatrix}0\\-5\\U_s\end{pmatrix}$$

或者

$$I_1\boldsymbol{a}_1+I_2\boldsymbol{a}_2+I_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\\mu-1\\-\mu\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\-5\\U_s\end{pmatrix}$$

一般地，对于含 n 个未知量 x_1，x_2，…，x_n 的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1-5}$$

可以写为向量表示的方程组：

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}\tag{1-6}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

是$(n+1)$个m维向量。

特别地，称$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$为系数向量，称$\boldsymbol{b}$为常数向量。未知量x_1，x_2，…，x_n可用n维向量表示为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称之为未知量向量或解向量。

在三维空间，定义向量 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则任意三维向量$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$可以表示为$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$。称向量$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$为三维标准单位向量。

若向量$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$，当$\boldsymbol{a}$为非零向量时，方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_3 \end{cases}$$

有唯一解，则称向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

为三维基向量。它与三维单位向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$一样，可以将任意三维向量$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$表示为$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{\xi}_1+b_2\boldsymbol{\xi}_2+b_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中，$b_1$、$b_2$、$b_3$是唯一确定的常数。在$n$维空间，类似地可以定义$n$维单位向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$和$n$维基向量$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_n$。

从中学所学代数学知道，两个整数进行加(减)运算的结果仍为整数，但两个整数的除法运算结果不一定是整数，所以在整数范围内除法不是永远可以实施的运算。在有理数和实数范围内，加(减)法、乘法和除法(除数不为零)运算的结果仍分别是有理数和实数。由此，代数学中定义了数环和数域这两种代数学系统。

定义 1-1 设S是某数集的一个非空子集，如果对于S中的两个数a和b来说，

$a+b$，$a-b$，ab 都在 S 内，那么就称 S 是一个数环。

例如上面提到的整数集，有理数集和实数集都是数环，复数集也是数环。

定义 1-2　设 F 是一个数环，如果：①F 含有一个不等于零的数；②如果两个数 a，$b\in F$ 且 $b\neq 0$ 时 $\dfrac{a}{b}\in F$，那么就称 F 是一个数域。

例如有理数集和实数集都是数域，复数集也是数域，但整数集不是数域。

从数环和数域的定义可以看出，数环是满足加法运算和乘法运算封闭性的一种代数系统，而数域则是满足加法运算、乘法运算和除法运算封闭性的一种代数系统。对于由 m 个分量构成的向量集合，当 $m=1$ 时，向量集合等同于数集，所以可以是数环，也可以是数域；当 $m\geqslant 2$ 时，向量的乘法运算和除法运算不能进行，所以既不是数环，也不是数域。但是，两个 m 维向量相加仍是 m 维向量；非零数乘以 m 维向量仍是 m 维向量，于是出现了线性代数系统，即把带有加法运算和数乘运算封闭性的向量集合称为一种线性代数系统。显然，实数、复数集合是线性代数系统。下面要讨论的矩阵集合也是一种线性代数系统。

在线性代数系统中，任意选取 n 个 m 维向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 作为 n 个未知量 x_1，x_2，…，x_n 的系数向量，再选取一个 m 维向量 $\boldsymbol{b}$ 作为常数向量，则可构成式(1-5)或式(1-6)的方程组，称其为线性方程组，因为这些向量都来自 m 维的向量集合(即线性代数系统)。从例 1-2 可知，该方程组的解是否存在、唯一解的表示和无穷多解的构成等都与向量有关，而这些问题的解决正是线性代数学的主要内容。为了对这些问题有初步的认识，这里先对向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}$ 的线性相关性进行简要讨论。

首先，线性代数系统中 m 维向量有无穷多个，这无穷多个向量的分量若设为实数，则称为实向量。而任意两个实向量相加，其结果仍为该系统的实向量，因此在这无穷多个向量中一定存在一个实向量与两个实向量相加得到的实向量相对应，把这一特性称为加法运算的封闭性；另外，一个非零实数乘以该系统中的一个实向量，所得结果仍为该系统中的实向量，因此存在一个实向量与非零数乘以一个实向量相对应，把这一特性称为数乘运算的封闭性。

但是，从无穷多个 m 维实向量中任意选取一部分向量构成一个向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}$，则该向量组的向量之间并不一定存在加法运算或数乘运算的封闭性。即使存在，也总是局限于其中的部分向量之间。

若设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}$ 为非零实向量，则当其中的两向量之间存在比例关系(或数乘关系)时，如 $\boldsymbol{a}_2=k_1\boldsymbol{a}_1$，$k_3\boldsymbol{a}_3=k\,\boldsymbol{b}$，其中 k，k_1，k_3 为非零实常数，则称这两个向量之间存在线性齐次性关系，简称齐次性；当其中的两个向量之和等于某个向量(相加关系)时，如 $\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{a}_6=\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_8+\boldsymbol{a}_9=\boldsymbol{b}$，称这三个向量之间存在线性叠加性关系，简称叠加性。

一般地，若向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}$ 中的向量之间存在齐次性、或存在叠加性、或齐次性和叠加性共存，如 $\boldsymbol{a}_2=k_1\boldsymbol{a}_1$，或 $\boldsymbol{a}_8+\boldsymbol{a}_9=\boldsymbol{b}$，或 $\boldsymbol{a}_3=k_8\boldsymbol{a}_8+(-k_9)\boldsymbol{a}_9$，则称向量组的向量之间存在线性关系，简称该向量组线性相关。若向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{b}$ 中的向量之间既不存在齐次性，也不存在叠加性，则称向量组的向量之间不存在线性关系，简称该向量组线性无关。向量组线性相关和向量组线性无关合称向量组的线性相关性。

值得指出的是，零向量自身是线性相关的；零向量与非零向量组成的向量组也是线性