CAMBRIDGE

现代数学译丛 29

整数分拆

〔美〕George E. Andrews
〔瑞典〕Kimmo Eriksson 著

傅士硕 杨子辰 译

科学出版社

现代数学译丛 29

整 数 分 拆

〔美〕George E. Andrews
〔瑞典〕Kimmo Eriksson 著
傅士硕 杨子辰 译

科 学 出 版 社
北 京

图字：01-2016-0941

内 容 简 介

本书主要讨论组合数学和堆垒数论中的整数分拆理论. 在内容方面，首先介绍了研究整数分拆的重要工具：双射证明、Ferrers 图和生成函数，并以此证明了著名的 Euler 恒等式和 Euler 五角数定理. 本书取材广泛，不仅讨论了 Rogers-Ramanujan 恒等式、阶梯教室分拆、平面分拆等问题，还建立了整数分拆与 Young 表、钩长公式、偏序集等其他数学对象之间的紧密联系. 在行文方面，作者在力图使本书保持通俗易懂、深入浅出的风格之时，又尽量不失逻辑的严谨性. 从而使得一个高中生也可以轻松地阅读本书的绝大部分内容. 此外，作者还提供了许多优质的练习题并且合理地区分了难度，以使不同层次的读者都能从中充分受益.

本书适合高中生和本科生，以及广大数学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

整数分拆/(美)乔治·E. 安德鲁斯 (George E. Andrews), (瑞典) 基莫·埃里克松 (Kimmo Eriksson) 著; 傅士硕, 杨子辰译. —北京：科学出版社, 2017.9

(现代数学译丛; 29)

ISBN 978-7-03-054545-9

书名原文: Integer Partitions

Ⅰ. ①整… Ⅱ. ①乔… ②基… ③傅… ④杨… Ⅲ. ①函数–研究 Ⅳ. ①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 231054 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 9 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 9 月第一次印刷 印张: 9 3/4
字数: 174 000

POD定价： 68.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

版 权 声 明

中 文 版 序

我们生命中最大的乐趣之一就是研究整数分拆. 一方面, 这门精彩的学科可以解释给幼小的孩子, 使他们知道整数加法就能理解. 另一方面, 现代数学中最深刻的一些问题都直接或间接地与分拆理论联系在一起. 怀揣着奉献一本高中生和本科生都可以轻松阅读并享受的作品的希望, 我们撰写了《整数分拆》这本书. 现在, 我们无限喜悦地看到这部作品被翻译成中文. 中国许多出色的数学家对分拆理论做出了重要贡献, 因此我们也乐于见到我们这本入门书籍可以被中国广大的数学爱好者阅读.

我们非常感谢傅士硕和杨子辰. 他们二位细心勤奋的工作确保了这个翻译项目的完成.

One of our great pleasures in life has been the study of integer partitions. On the one hand, this wonderful subject can be explained to young children; all you need to know is addition of integers. On the other hand, some of the deepest problems in modern mathematics are connected directly or indirectly with the theory of partitions. We wrote *Integer Partitions* with the hope that we might supply a text easily read and enjoyed by undergraduates and high school students. We are now immensely pleased to see this work translated into Chinese. Many excellent mathematicians in China have made major contributions to the theory of partitions, and we are excited to see our introductory text now being made available to a broad mathematical audience in China.

We are very grateful to Shishuo Fu and Zichen Yang for their care and diligence in seeing this project to completion.

George E. Andrews
Kimmo Eriksson

译 者 序

本书作者之一 G. E. Andrews 是美国国家科学院院士、美国艺术与科学院院士, 以及美国数学学会会士, 现任美国宾夕法尼亚州立大学 Evan Pugh 教授. 他在该校教书育人已有五十二载, 是全校目前任期最长的终身教授. Andrews 教授可谓是著作等身, 除了本书以外还著有数学专著十余本, 其中就包括更为深入探讨整数分拆理论的 *The Theory of Partitions* 以及与 Bruce C. Berndt 合作整理、目前出版至第四卷的系列 *Ramanujan's Lost Notebook*.

另一位作者 Kimmo Eriksson 是瑞典西曼兰省科学院院士, 现任瑞典 Mälardalen 大学教授. 除了撰写本书等数学教材, 他还曾为歌剧 *Kurfursten* 创作剧本.

两位作者都可以说是整数分拆领域的权威专家. 他们严选内容、精心架构, 举重若轻般地为读者奉献了这样一本深入浅出的入门教材. 能够翻译这样的名家著作, 我们深感荣幸的同时也倍感压力, 唯愿原著的易读性不要因为我们的翻译而打了折扣.

本书由科学出版社引进版权, 编辑王丽平女士耐心回答了我们的各种问题, 她的辛勤工作保证了本书的顺利出版, 在此表示衷心的感谢. 还要感谢国家自然科学基金、中央高校基本科研业务费和重庆大学对本书出版的资助.

基于原著日文版的勘误, 本译文都做了相应的修正, 包括对一些参考文献的更新. 由于译者水平有限, 书中出现疏漏在所难免, 还望同行和读者不吝指正.

傅士硕　杨子辰

2016 年 10 月 8 日

前　　言

这是一本关于整数分拆的书. 即使你从未听过这个概念, 我们猜测你已然熟悉它的意义. 举个例子, 有多少种方法将 3 分成一个或多个正整数? 我们可以把 3 当做单独的部分; 或者我们可以取出 2 作为一个部分, 然后剩下的 1 是另一个部分; 又或者我们可以分成三个大小为 1 的部分. 这番极其基础的数学思考给出了问题的答案: "有 3 个 3 的整数分拆. "

现今所有分拆理论的文献资料都是为专业数学工作者撰写的. 但是, 当你现在知道整数分拆是什么时, 你也许会同意我们的观点: 即使没有高深的数学知识也应该能学习整数分拆. 所以, 本书的目标就是补上现今文献的空白.

分拆理论的研究吸引了许多伟大数学家, 比如: Euler, Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg 和 Dyson. 他们都对这个简单数学对象的高等理论发展做出了杰出的贡献. 在这本书中, 我们将从头开始, 引领读者一步一步从非常简单的东西开始探索, 直至尚未解决的研究问题. 想要直入主题的愿望指导了我们对课题的取舍. 我们希望能迅速谈到本学科中最为精彩且令人称奇的结果之一: Rogers-Ramanujan 恒等式. 随后我们对生成函数做了充分的介绍, 使得我们可以初步接触到这门学科中许多引人入胜的方面.

本书面向的读者十分广泛. 显然这可以作为本科生分拆理论课程的一本理想的教科书. 我们尝试让本书短小精悍, 以便这些课题可以在一学期内教完. 当然, 也有许多数学爱好者没有接受过高等数学教育. 我们希望这些读者也能感受到本书是为他们量身订做的. 最后, 我们希望任何一个有基础数学知识的读者都能够通过本书步入整数分拆的大门.

为了使本书读起来更加简单且吸引人, 许多论证都被省略了并留作节末的习题. 对于其中许多习题, 你都可以在本书末尾找到提示和解答. 习题的难度是不同的. 所以我们按照如下等级标准估计了习题的难度, 1 意味着简单, 2 意味着你需要一点点解题技巧, 3 意味着你正面临一个相当大的挑战. 希望这样可以帮助你对习题进行预判.

创作这本书的想法源自于两位作者 2000 年在费城举行的会议上的碰面. 从那时起, 所有的工作都是通过瑞典和美国之间的邮件和电子邮件开展的. 我们对提供过帮助的许多人都心存感激. Art Benjamin 和 Carl Yerger 通读了整本书, 发现了一些错误并提出了有用的建议. Kathy Wyland 在宾夕法尼亚完成了一些录入工作.

Brandt Kronholm, James Sellers 和 Ae Ja Yee 阅读了长条校样. 剑桥大学出版社提供了细致的编辑建议. Jim Propp 对第 11 章提出了详尽而有价值的评论.

George E. Andrews
Kimmo Eriksson

目　　录

第1章 绪　　论

数学这项人类活动已经发展了超过一万年. (原始人的) 石刻表明, 小数字计数法和整数加法的概念早已经被史前洞穴人掌握了. 后来, 古希腊人发明了有理数、几何学和数学证明的概念. 阿拉伯和中国数学家提出了方便的按位计数方法, 以及代数的基础 —— 未知数运算. 数学的发展自文艺复兴开始便进入了快车道, 从先前的诸如解析几何、微积分、数理逻辑、集合论等伟大创造, 直至今天数学与计算机科学的协同发展, 结下了累累硕果.

我们将会深入探讨, 或是至少接触这些现代分支的进展. 但是, 说真的, 这本书所探讨的数学, 其实是洞穴人就已经能够理解的! 你能想象出以下这种岩石雕刻或洞穴壁画:

```
O__                 O__ O__
 ||                  ||  ||
O__
 ||


O__                O__O__O__
 ||                 || || ||
O__
 ||
O__
 ||


O__O__O__           O__ O__
 || || ||            ||  ||
                    O__
                     ||
```

```
0__              0__0__0__0__
 ||               || || || ||
0__
 ||
0__
 ||
0__
 ||


0__0__0__         0__ 0__0__
 || || ||          ||  || ||
0__               0__
 ||                ||
```

这里涉及的概念只有小数字计数法、整数相等、整数加法以及奇数和偶数的区别. 上表中展示了：至少对于不超过 4 只动物, 将它们排列成长度为奇数的行的方法数, 与排列成长度互不相等的行的方法数, 是一样多的. 如果将其写在今日的黑板上来替代史前石雕, 这个表可以组织成一个更简洁的形式：

1+1	2
1+1+1	3
3	2+1
1+1+1+1	4
3+1	3+1

上表中, 左列和右列中的和式数量总是相等的这一事实, 被 Leonhard Euler 在 1748 年首次证明. 不过, 很有可能在此之前就已经有人观察到对较小的数字有这一现象了, 这是因为相对于石器时代人类所掌握的数学, 它需要的数学知识并没有多么高深. 在现在, 诸如 $3+1$ 或 $5+5+3+2$ 的这些对象被称为**整数分拆**. 换一种方式说, 一个整数分拆是将一个整数分成若干 (正) 整数部分 (相加) 的方式. 根据定义, 整数分拆与部分的顺序无关, 所以约定分拆的部分按降序排列.

现在, Euler 的惊人结果可以精确地表述为：*每一个 (正) 整数有同样多的方式被分拆为奇部分和相异部分*. 上述表格可以扩展到 5 和 6 的情况：

1+1+1+1+1	5
3+1+1	4+1
5	3+2
1+1+1+1+1+1	6
3+1+1+1	5+1
3+3	4+2
5+1	3+2+1

习题:

1. 继续扩展上表到 10 的分拆并验证 Euler 是对的. 看看你是不是得到某种启发来证明这两类分拆的数量相等. (难度系数: 1)

形如"每一个数的这类分拆和那类分拆数量相等"的表述被称为*分拆恒等式*, 上述 Euler 恒等式是第一个, 但还存在着许许多多其他恒等式. 引人入胜的是 (其中) 有很多意想不到的恒等式. 举另一个非常著名的例子: *每一个数被分拆为大小是 $1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ 的部分的方式和分拆为部分之差至少为 2 的方式, 是一样多的*.

$1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ 最直接可被理解为末位数字为 $1, 4, 6, 9$ 的整数. 另一种描述方式是这些整数被 5 除的余数是 1 或 4. 计算这些余数称为*模运算*, 以后会在这本书中出现几次. 事实上, 令人惊奇的是, 分拆恒等式以及他们的证明和导致的结果, 涉及非常广泛的初等和高等数学, 甚至是现代物理学. 我们希望你会发现整数分拆理论是如此迷人, 从而吸引你去学习这些相关领域的更多知识.

上面提及的最后一个恒等式是在 1894 年和 1913 年由 Leonard James Rogers 和 Srinivasa Ramanujan 分别独立发现的. 这个恒等式的传奇故事丰富多彩, 有些还具有深刻的人文关怀. 其中之一是, 在很长一段时间 Rogers 都只是个寂寂无名的数学家. 直到惊人的天才 Ramanujan 在晚于他二十年后重新发现了他的结果, 给他带来了 (至少在数学界中) 永恒的荣耀. 整数分拆领域充盈着大量或浪漫, 或惊艳, 或饶有趣味的生平轶事, 它们将与数学本身一同被后人传颂赏析. 总而言之, 欢迎来到整数分拆的奇妙世界.

第 2 章 Euler 以及更多

在这一章, 我们将展示 Euler 恒等式和许多其他恒等式如何通过双射方法进行证明. 尽管双射方法优雅且容易理解, 但这并不是 Euler所使用的. Euler 使用了称为*生成函数*的分析工具. 这是一种非常强力的工具, 但需要更多数学知识. 等到第 5 章, 我们再回来研究 Euler 的方法.

本章的重要内容

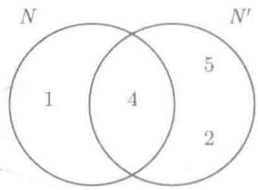
- 我们将介绍集合论的基础知识: 并集、交集和集合的基数.
- 我们将展示双射 (两个集合间一一对应) 如何被用于证明恒等式.
- 我们将使用合并相同部分的方式给出 Euler 恒等式 (每一个整数有同样多的方式被分拆为奇数部分和相异部分) 的双射证明, 它的逆是分裂偶数部分.
- Euler 恒等式将被推广到 "Euler 对", 即两个集合 M 和 N, 满足把数分拆成 M 中相异部分的方式数量等于分拆为 N 中部分的方式数量.

2.1 集合术语

我们需要一些集合论的概念. 特别地, *集合*是指若干互不相同的对象全体, 对象一般称为*元素*. 我们可以在一对花括号中枚举所有集合元素来描述该集合. 举个例子, $\{1,2,4,5\}$ 是一个四元集合, 其中所有元素都是整数. 注意, 集合中元素是无序的, 因此 $\{1,2,4,5\}$ 和 $\{4,5,2,1\}$ 是同一个集合.

如果你舍弃集合中的一些元素, 剩下的元素就构成了一个*子集*. 符号 $\subset$ 表示 "左边是右边的一个子集". 例如, $\{2,5\} \subset \{1,2,4,5\}$.

两个集合 N 和 N' 的*交集*是一个集合, 它的元素同时在 N 和 N' 中, (这个新的集合) 记作 $N \cap N'$. 两个集合是*不交的*, 如果它们没有公共元素, 即它们的交集是空的. N 和 N' 的*并集*是集合 $N \cup N'$, 它包含了同时存在于两个集合或任意一者中的元素. 因此, 如果 $N = \{1,4\}$ 且 $N' = \{2,4,5\}$, 那么它们的交集是 $N \cap N' = \{4\}$, 它们的并集是 $N \cup N' = \{1,2,4,5\}$. 交集和并集可以用所谓 *Venn* 图方便地解释, 例如:



集合 N 中元素数量记作 $|N|$, 常常被称为集合的**基数**(或者就叫大小).

习题:

2. 在上例中, $|N|=2$, $|N'|=3$, $|N\cap N'|=1$, $|N\cup N'|=4$. 注意到 $2+3=1+4$, 这并不是巧合; 事实上, 对任意集合 N 和 N', 总是有 $|N|+|N'|=|N\cap N'|+|N\cup N'|$ 成立. 为什么? 据此还可以得出结论: 两个集合的并集大小等于两个集合各自大小之和, 当且仅当两个集合不交. (难度系数: 1)

2.2 分拆恒等式的双射证明

为了简明扼要地用公式描述分拆恒等式, 我们需要一些记号. 令 $p(n)$ 为给定整数 n 的分拆数量, 我们称 $p(n)$为**分拆函数**. 举个例子, 我们有 $p(4)=5$, 因为 4 有五个不同的整数分拆:

$$1+1+1+1,\quad 2+1+1,\quad 2+2,\quad 3+1,\quad 4.$$

在分拆恒等式中, 我们常常对满足某种条件的分拆数量感兴趣. 我们记这样的分拆数量为 $p(n|[\text{条件}])$. 举个例子, Euler 恒等式就可表示为

$$p(n|\text{部分为奇数})=p(n|\text{部分相异})\quad \text{对任意 } n\geqslant 1. \tag{2.1}$$

现在思考一下这样一个恒等式如何能被证明. 对每个 n, 我们可以列举所有的两类分拆, 计算总数并判断是否相等, 来验证恒等式的正确性. 但是, 这个恒等式对无穷多个 n 值都成立, 所以我们不能逐一验证. 我们必须转而去寻找对每一个正整数 n 都成立的一般性论证. 一个自然的想法是找一个一般的办法对分拆计数, 得到显式表达式, 进而证明恒等式两边相等. 换句话说, 如果我们能证明 $p(n|\text{部分为奇数})$, 比如说, 等于 n^2+2 (或其他表达式), 并且同样地证明 $p(n|\text{部分相异})$ 也等于相同的数, 那么我们显然证明了恒等式成立. 但是我们能找到这样一个显式表达式吗? 从前一章包括习题 1 中的表格, 我们能计算前几个值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n\|$部分为奇数$)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10

表中数据似乎并没有指向任何简单表达式, 比如关于 n 的多项式. 所以这种方法失败了. 但是我们失败的原因是我们尝试去证明的比我们实际需要证明的要多得多. 如果我们 (仅仅) 想要验证类 X 中的对象数量等于类 Y 中的对象数量, 那么我们 (其实) 不需要去算出那个具体数字, 我们只要将两类对象配对, 去证明类 X 中的每个对象与类 Y 中唯一的对象配对并且反过来也成立. 对于 $n = 2, 3, 4$, 第 1 章中的洞穴石刻就给出了奇分拆和相异分拆之间的一个配对. 这种两个集合之间的一一配对称为**双射**. 因此, 为了证明分拆恒等式, 我们只需要找到问题中所涉及两类分拆间的一个双射.

分拆之间的双射该是什么样子的并不显然. 对于 n 的一个整数分拆是一些加起来等于 n 的整数部分, 所以分拆之间的双射必须用部分上的操作来描述. 一个简单的操作是把偶数部分均分为两个相等部分. 其逆操作则是合并两个相等的部分为两倍大的部分. 这个操作立刻给出了下述恒等式的一个双射证明(图 2.1).

$$x_1 \longmapsto y_1$$

$$x_2 \longmapsto y_2$$

$$x_3 \longmapsto y_3$$

图 2.1　两个三元集之间的典型双射

$$p(n|\text{部分为偶数}) = p(n|\text{每个部分出现偶数次}) \quad \text{对任意 } n \geqslant 1. \tag{2.2}$$

对 $n = 6$, 考察一下这个双射是如何实现的:

$$\begin{aligned} 6 \quad & \mapsto \quad 3+3, \\ 4+2 \quad & \mapsto \quad 2+2+1+1, \\ 2+2+2 \quad & \mapsto \quad 1+1+1+1+1+1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

习题:

3. 对奇数 n, 不存在部分全为偶数的分拆, 也不存在每个部分均出现偶数次的分拆. 为什么? 对偶数 $n \geqslant 2$, 通过分别找下列两个等式的双射, 从而得到上述恒