

21世纪高等教育新理念精品规划教材

# 有限单元法

YOUXIAN DANYUAN FA

■ 主 编 韦广梅

■ 副主编 吕书锋



 天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21世纪高等教育新理念精品规划教材

# 有限单元法

主 编 韦广梅

副主编 吕书锋



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目 ( CIP ) 数据

有限单元法 / 韦广梅主编. — 天津: 天津大学出版社, 2018.1

21世纪高等教育新理念精品规划教材

ISBN 978-7-5618-6024-3

I. ①有… II. ①韦… III. ①有限元法—高等学校—教材 IV. ①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字 (2017) 第321355号

出版发行 天津大学出版社

地 址 天津市卫津路92号天津大学内 (邮编: 300072)

电 话 发行部: 022-27403647

网 址 [publish.tju.edu.cn](http://publish.tju.edu.cn)

印 刷 北京京华虎彩印刷有限公司

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

印 张 6

字 数 150千

版 次 2018年1月第1版

印 次 2018年1月第1次

定 价 18.00元

---

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

# 前言

## PREFACE

在普通工科院校，无论对力学专业本科生还是各专业硕士研究生来说，有限单元法都是一门难学的课程，对老师来说也是一门难教的课程。原因主要有两方面：一是载体的复杂性；二是预备数学知识的广泛性。

有限单元法源于力学领域，该课程以力学问题的场方程为载体，给出其有限元求解过程。力学中的重要场变量位移、应变(应力)分别是一阶、二阶张量，这就使即使最简单的线弹性力学问题，其场方程也是一个复杂的需满足边界条件的偏微分方程组。

从数学的角度而言，有限单元法实质上是边值问题的数值求解方法。该数值求解方法涉及广泛的数学知识，如微分方程组积分形式的等效、矩阵理论、坐标变换及数值积分等。

目前国内适用于力学本科生及工科硕士研究生的有限单元法教材大多出自名牌大学，如参考文献中的[1]、[2]，其特点是：一是教材理论起点高、普适性强、严谨；二是研究对象的涉及面宽。对于普通工科院校的力学专业本科生以及土木机械类硕士研究生，这类教材往往令其望而生畏，无从着手。

偏重通用软件操作和程序编写的有限单元法教材，如参考文献中的[3]、[4]，目前国内也有不少，其特点为有限元理论讲解得很少，涉及的力学问题全面或着重简单程序的编写等。这类书可作为学时少的土木、机械类专业本科学生了解有限元理论的教科书，也可作为在有限元通用软件平台下进行设计、分析的操作参考书。

对于内蒙古工业大学力学专业本科生和土木、机械类专业硕士研究生，作者经过近20年的有限元教学实践与探索，找到了适合他们的以研究对象由简到难、有限元方法由特殊到普适二者交融的教学体系，该体系学生易于接受。按这一体系组织的教学，理论的严谨性、方法的普适性、研究对象的涵盖面均是随着课程的深入得以逐渐实现的。

按照上述教学体系，笔者在多年的教案的基础上，为内蒙古工业大学力学专业本科生和土木、机械类专业硕士研究生编写了这本教材。这本教材也适用于国内其他普通高校的力学专业本科生和土木、机械类专业硕士研究生的有限元教学。

因编写水平有限，书中难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正。

编 者



# 目 录

## CONTENTS

第1章	绪论 .....	1
1.1	有限单元法简介 .....	1
1.2	本书内容安排 .....	2
第2章	线弹性力学的基本方程和最小位能原理 .....	3
2.1	引言 .....	3
2.2	矩阵形式的基本方程 .....	3
2.3	最小位能原理 .....	5
第3章	3结点三角形单元广义坐标有限元格式 .....	8
3.1	引言 .....	8
3.2	有限元格式建立过程 .....	8
3.3	流程图 .....	15
第4章	4结点四边形等参单元有限元格式 .....	17
4.1	引言 .....	17
4.2	自然坐标系下的插值函数构造 .....	17
4.3	等参变换 .....	18
4.4	有限元格式建立过程 .....	19
第5章	弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式 .....	23
5.1	引言 .....	23
5.2	广义坐标有限元一般格式 .....	24
5.3	等参单元有限元一般格式 .....	26
5.4	有限元解的收敛准则 .....	34

<b>第6章</b>	<b>应力修匀及误差分析</b> .....	<b>36</b>
6.1	引言 .....	36
6.2	位移元有限元解的性质 .....	36
6.3	应力改善 .....	38
6.4	误差分析 .....	41
<b>第7章</b>	<b>特殊结构有限元分析要点</b> .....	<b>43</b>
7.1	引言 .....	43
7.2	轴对称问题 .....	43
7.3	子结构问题 .....	46
7.4	循环结构循环载荷问题 .....	48
<b>第8章</b>	<b>杆件结构有限单元法简介</b> .....	<b>51</b>
8.1	引言 .....	51
8.2	2结点等截面直杆—梁单元 .....	52
8.3	杆件结构有限元分析要点 .....	58
<b>第9章</b>	<b>弹塑性力学有限单元法简介</b> .....	<b>60</b>
9.1	引言 .....	60
9.2	非线性代数方程组的数值求解 .....	60
9.3	弹塑性问题的有限元增量格式 .....	62
<b>附录</b> .....	<b>67</b>	
附录 I	加权余量法 .....	67
附录 II	FORTRAN90摘要 .....	69
附录 III	4结点四边形等参单元源程序 .....	71
<b>参考文献</b> .....	<b>90</b>	

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 有限单元法简介

有限单元法是边值问题的数值计算方法。边值问题即场方程为满足一定边界条件的偏微分方程组的问题，很多领域提出的数学模型均为边值问题，如弹性力学、塑性力学、热传导与电磁场的场方程。

能找到解析解的边值问题极少，寻求近似解或数值解是科研工作者长期以来的一项重要工作。就力学领域而言，20 世纪七八十年代以前，主要采用变分法和差分法给出近似解或数值解。现今，有限单元法这一数值计算方法已普遍应用于力学各个分支。

变分法是依据与原微分方程组等效的积分形式，给出近似解。在整个场域，构造满足位移(应力)边界条件的位移(应力)近似场函数，是变分法的第一步。整个场域仅构造一个近似场函数，在一般情况下，将会带来大的误差；而满足位移(应力)边界条件的近似场函数寻找困难，这是变分法存在的另一个问题。

差分法是将整个场域假想地划分为有限个长方体(二维问题为长方形)网格，将原微分方程组在这些网格的每个结点处近似为差分方程，从而求得各结点的数值解。差分法采用的网格为规则的长方体(长方形)，对于边界为曲面(曲边)的研究对象，由于边界适应性差，导致计算精度低，这是差分法的不足之处。

有限单元法在理论上同变分法，即将原微分方程组等效为积分形式，但在构造近似场函数时，借鉴差分法划分网格的思想，即在每个网格(即单元)内构造，并且网格也不再限于规则形状。有限单元法继承了变分法和差分法各自的优点，避开或改善了它们的不足之处。

单元内位移(应力)函数的构造、相邻单元公共边界位移(应力)的协调处理，是有限单元法需要解决的核心问题。

有限单元法在 20 世纪 60 年代成功应用于弹性力学平面应力问题后，得到了迅猛发展。而今，商业化的大型通用、专用有限元软件已普遍应用于各工程研究及设计领域。



## 1.2 本书内容安排

本书第1章为绪论；第2章详细给出弹性力学的基本方程和最小位能原理的矩阵表达形式；在此基础上，第3、4章详细介绍3结点三角形和4结点四边形单元的有限元格式建立过程；经上述有限元的入门后，第5章深入介绍弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式；第6章简介位移元有限元实际应用中很重要的应力修匀；第7章简介几种特殊结构有限元模型简化处理及其有限元分析要点；第8章简介杆件结构问题的有限元方法；第9章简介弹塑性力学问题的有限元方法。

# 第 2 章 线弹性力学的基本方程和最小位能原理

## 2.1 引言

对于线弹性力学(简称弹性力学),与某些场方程等效的虚功方程可进一步写为变分形式。由于有限单元法一般以位移为基本场变量,即多是位移元有限元,故本章仅介绍最小位能原理。

为便于公式的推导,本章首先给出弹性力学基本方程的矩阵形式。

## 2.2 矩阵形式的基本方程

力、位移是矢量,应力、应变是二阶张量。力学中的这些场量,在笛卡儿坐标系中,均有多个分量。有限单元法涉及这些场量的大量运算,按分量展开形式进行已不可能。有限元表达形式一般以矩阵或张量形式给出,本节仅给出场量及弹性力学基本方程的矩阵形式。

令  $\mathbf{u}=[u, v, w]^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{zx}]^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}]^T$ ,  $\bar{\mathbf{f}}=[\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z]^T$ ,  $\bar{\mathbf{T}}=[\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z]^T$ 。其中,  $\mathbf{u}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\bar{\mathbf{f}}$ 、 $\bar{\mathbf{T}}$  分别为位移、应变、应力、体积力、边界力列向量。

### 2.2.1 平衡方程

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \text{ (在 } \Omega \text{ 内)} \quad (2.1)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}。$$

## 2.2.2 几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}u \text{ (在 } \Omega \text{ 内)} \quad (2.2)$$

其中,  $\mathbf{L} = \mathbf{A}^T$ 。

## 2.2.3 物理方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ (或 } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}) \text{ (在 } \Omega \text{ 内)} \quad (2.3)$$

其中,  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵,  $\mathbf{C}$  为柔度矩阵, 且

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & G & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}$$

其中, 拉梅常数  $G$  和  $\lambda$  表示为:  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ,  $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ 。

## 2.2.4 边界条件

(1) 力的边界条件:

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} \text{ (在 } S_\sigma \text{ 上)} \quad (2.4)$$

$$\text{这里, } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}。$$

其中,  $n_x$ 、 $n_y$ 、 $n_z$  为边界外法线分别与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴正向夹角的余弦值。

(2) 位移边界条件:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ (在 } S_u \text{ 上)} \quad (2.5)$$

## 2.2.5 弹性体的应变能密度

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.6)$$

## 2.3 最小位能原理

### 2.3.1 虚位移原理

对于变形体，虚位移原理表述为：由内力和外力构成的平衡力系，在满足变形协调关系的虚位移上，所做的虚功之和等于零。虚功方程表示为

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}}) dV - \int_{S_g} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (2.7)$$

上式等价于场方程中的平衡方程和力的边界条件，对线性问题和非线性问题都成立。

### 2.3.2 最小位能原理的得出

对于线弹性力学，物理方程式(2.3)为线性方程，外载荷独立于变形，故式(2.7)可进一步推导为变分形式，即

$$\delta \Pi_p = 0 \quad (2.8)$$

$$\Pi_p = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} \right) dV - \int_{S_g} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (2.9)$$

式中， $\Pi_p$  由应变能和外力势能两部分组成，称作系统的总位能。

式(2.8)表示当线性系统处于平衡位置时，其总位能取驻值，进一步可证明其为极小值。

最小位能原理仅对线弹性问题成立，是建立线弹性力学有限元格式的理论基础；非线性问题有限元格式的建立，须依据虚位移原理。

### 2.3.3 里兹法

里兹法是线弹性力学中基于最小位能原理给出的一种近似解法。步骤简述如下。

#### 1. 构造位移场函数近似解

构造位移场函数近似解(在整个求解域内)为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \alpha_i = \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.10)$$

(若为二、三维问题，同理构造  $v$ 、 $w$ )

其中， $N_i$  为基函数，是已给定的关于坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的函数； $\alpha_i$  为待定参数，相互独立。

基函数的确定往往是困难的，原因在于要求  $N_i$  满足位移边界条件、具有连续性(在线弹性力学条件下)、相互间线性独立。

## 2. 位能计算

以式(2.10)构造的位移为基本场函数,应用几何方程和物理方程,求出应变、应力近似场函数(均含有待定参数 $\alpha_i$ );将应变、应力及外载荷代入式(2.9),计算出仅含有待定参数 $\alpha_i$ 的 $\Pi_p$ 。

3. 待定参数 $\alpha_i$ 的计算(依据最小位能原理)

将上步计算得到的 $\Pi_p$ 代入式(2.8)得

$$\delta\Pi_p = \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_2}\delta\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_n}\delta\alpha_n = 0$$

因各待定参数 $\alpha_i$ 相互独立,故由上式进一步推得

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_1} \\ \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

式(2.11)为 $n$ 维线性代数方程组,求解得 $\alpha_i$ 。

## 4. 位移、应变、应力近似场函数的给出

将求得的 $\alpha_i$ 代回到1、2步中提到的位移、应变、应力近似场函数中,即可给出确定的位移、应变、应力近似场函数。

**【例 2.1】**如图 2.1 所示,铅直平面内的正方形薄板,边长为 $2a$ ,四边固定;弹性模量 $E$ 及板厚 $t$ 均已知,只受重力 $\rho g$ 的作用,设泊松比 $\mu=0$ ,试用里兹法求解板的应力近似解<sup>[5]</sup>。

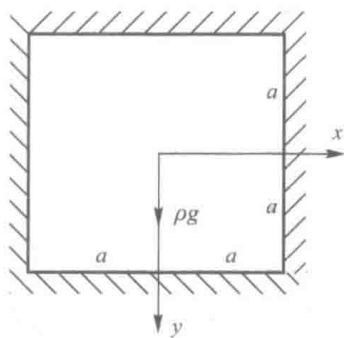


图 2.1 正方形薄板

解:构造位移场函数如下:

$$u = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{a} \alpha_1, \quad v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \beta_1$$

则有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{y}{a^2} - \frac{y^3}{a^4} - \frac{3x^2 y}{a^4} + \frac{3x^2 y^3}{a^6}\right) \alpha_1$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{2y}{a^2} + \frac{2x^2 y}{a^4}\right) \beta_1$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{x}{a^2} - \frac{3xy^2}{a^4} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{3x^3 y^2}{a^6}\right) \alpha_1 + \left(-\frac{2x}{a^2} + \frac{2xy^2}{a^4}\right) \beta_1$$

$$\sigma_x = E\epsilon_x, \quad \sigma_y = E\epsilon_y, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2}\gamma_{xy}$$

系统总位能为

$$\begin{aligned}
 \Pi_p &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a [\boldsymbol{\varepsilon}_x \ \boldsymbol{\varepsilon}_y \ \boldsymbol{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} t dx dy - \int_{-a}^a \int_{-a}^a [u \ v] \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g \end{bmatrix} t dx dy \\
 &= \frac{1}{2} t E \left( \frac{128}{525} \alpha_1^2 + \frac{384}{135} \beta_1^2 + \frac{64}{525} \alpha_1^2 - \frac{64}{225} \alpha_1 \beta_1 + \frac{64}{45} \beta_1^2 \right) - \frac{16}{9} a^2 \beta_1 \rho g t
 \end{aligned}$$

由  $\delta \Pi_p = 0$  可得:  $\frac{\partial \Pi_p}{\partial \alpha_1} = \left( \frac{128}{525} \alpha_1 + \frac{64}{525} \alpha_1 - \frac{32}{225} \beta_1 \right) E t = 0$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \beta_1} = \left( \frac{384}{135} \beta_1 E - \frac{32}{225} \alpha_1 E + \frac{64}{45} \beta_1 E - \frac{16}{9} a^2 \rho g \right) t = 0$$

解上述方程组得: 
$$\begin{cases} \alpha_1 = 0.16 \rho g a^2 / E \\ \beta_1 = 0.42 \rho g a^2 / E \end{cases}$$

进而求得:  $\sigma_x = 0.16 \left( y - \frac{y^3 + 3x^2 y}{a^2} + \frac{3x^2 y^3}{a^4} \right) \rho g$

$$\sigma_y = 0.42 \left( -2y + \frac{2x^2 y}{a^2} \right) \rho g$$

$$\tau_{xy} = 0.08 \rho g \left( x - \frac{3xy^2 + x^3}{a^2} + \frac{3x^3 y^2}{a^4} \right) + 0.21 \rho g \left( -2x + \frac{2xy^2}{a^2} \right)$$

### 思考题

用里兹法求图 2.2 所示平面压缩板的应力近似解。其中构造  $\begin{cases} u = x\alpha_1 \\ v = y\beta_1 \end{cases}$ 。

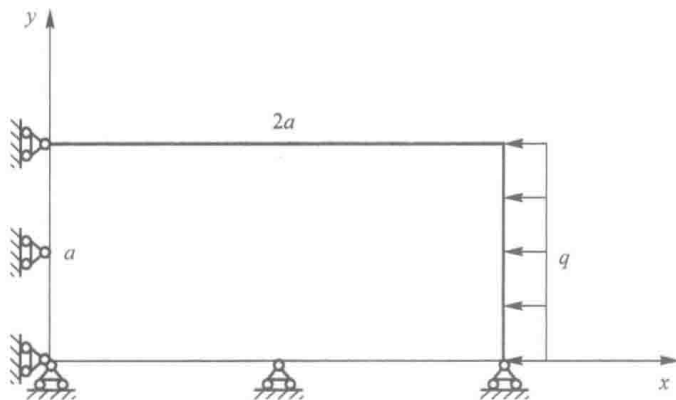


图 2.2 压缩板

# 第3章 3 结点三角形单元广义坐标有限元格式

## 3.1 引言

作为有限元入门，本章以弹性力学中的平面问题为载体，以简单的 3 结点三角形单元为例，介绍有限元求解格式的建立过程。

首先将弹性体划分为若干个三角形(单元)，并建立坐标系，接着给每个单元、每个结点排序。设其中任意单元的单元号为  $e$ ，3 个结点的结点号按逆时针排为  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ ，如图 3.1 所示。

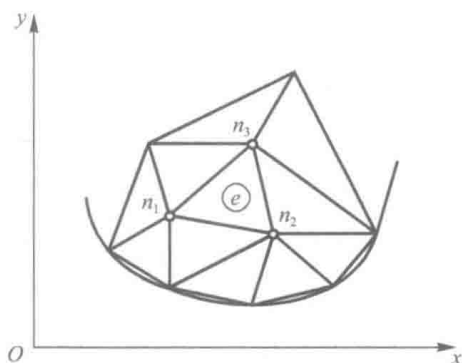


图 3.1 有限元网格划分

线弹性力学问题的有限单元法和里兹法，其理论基础虽然都为最小位能原理，但有限单元法与里兹法不同的是：有限单元法的位移函数是在每一个单元内构造。故在其有限元格式建立过程中，系统的总位能是在各个单元位能求出后，再求和得到。

## 3.2 有限元格式建立过程

### 3.2.1 单元位能

#### 1. 位移模式及插值函数的构造

设系统中任一单元如图 3.2 所示，将 3 个结点的位移列阵标记为

$$\mathbf{a}^e = [u_1 \overset{\rightarrow}{v}_1 u_2 v_2 u_3 v_3]^T$$

设单元内任意点的位移列阵为  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 。

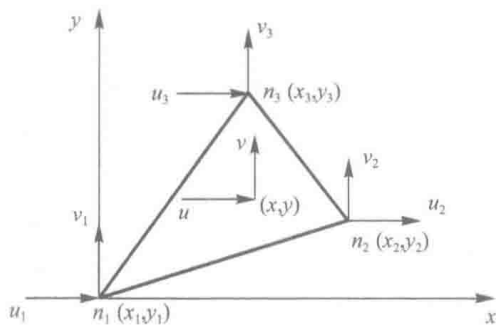


图 3.2 3 结点三角形单元

令单元的位移模式为

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \quad (3.1)$$

将 3 个结点的坐标及位移分别代入式(3.1), 经整理得

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中,  $N_i (i=1, 2, 3)$  为插值函数, 且  $N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$ 。

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \text{ 轮指})$$

$$c_1 = -x_2 + x_3$$

$A$  为三角形面积, 可用行列式表示为

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

说明:

插值函数具有如下性质:

$$(1) N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j=1, 2, 3);$$

$$(2) N_1 + N_2 + N_3 = 1;$$

$$(3) N_1(x_b, y_b) = 0 \quad (b \text{ 为 } 2, 3 \text{ 边上的任意点}) (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)。$$

性质(3)保证了单元公共边位移的协调。

式(3.2)的矩阵表达式为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (3.3)$$

$$\text{其中, } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}。$$



## 2. 应变矩阵和应力矩阵

将式(3.3)代入几何方程得单元内任意点应变  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T)$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \quad (3.4)$$

其中,  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$ , 称之为应变矩阵。

将式(3.4)代入物理方程得单元内任意点应力  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T)$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^e = \mathbf{S}\mathbf{a}^e \quad (3.5)$$

其中,  $\mathbf{S}$  称为应力矩阵。

由于  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$  均为常数矩阵, 故应变、应力列阵为常数列阵, 由此可知, 3 结点三角形单元为常应变、常应力单元, 即单元内各点应变、应力相等。由式(3.4)、式(3.5)两式得知, 单元应变、应力均与单元 3 个结点位移有关, 故单元间应变、应力不是协调的。

说明:

$\mathbf{B}$  矩阵性质为

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

## 3. 单元位能

由式(2.9)推得单元位能( $t$  为厚度)为

$$\begin{aligned} \Pi_p^e &= \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} \right) dV - \int_{S_\sigma^e} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} dS \\ &= \int_{A^e} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} \right) t dx dy - \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{T}} t d\Gamma \end{aligned}$$

将式(3.3)、式(3.4)和式(3.5)代入上式, 进一步推得

$$\begin{aligned} \Pi_p^e &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}^e)^T \left( \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} t dx dy \right) \mathbf{a}^e - (\mathbf{a}^e)^T \left( \int_{A^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} t dx dy \right) - (\mathbf{a}^e)^T \left( \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} t d\Gamma \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{P}_f^e - (\mathbf{a}^e)^T \mathbf{P}_T^e \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中,  $\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} t dx dy = \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} t \mathbf{A}^e$ ,  $\mathbf{P}_f^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} t dx dy$ ,  $\mathbf{P}_T^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} t d\Gamma$ , 分别称为单元刚度矩阵(简称单刚)、单元体积力等效结点载荷列阵、单元边界力等效结点载荷列阵。

说明:

1. 单元刚度矩阵  $\mathbf{K}^e$ 

(1) 为  $6 \times 6$  矩阵, 反映单元 3 个结点上的 6 个载荷分量与 6 个位移分量相互间的比值, 即  $6 \times 6$  个刚度系数(量纲为  $\text{N/m}$ )。

$$(2) \quad \begin{aligned} k_{1i} + k_{3i} + k_{5i} &= 0 & k_{2i} + k_{4i} + k_{6i} &= 0 \\ k_{i1} + k_{i3} + k_{i5} &= 0 & k_{i2} + k_{i4} + k_{i6} &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$