国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

PICK THEOREM

Pick定理

刘培杰数学工作室 编

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

PICK THEOREM

Pick定理

刘培杰数学工作室 编

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道国际数学奥林匹克候选题谈起，引出毕克定理. 全书介绍了毕克定理、毕克定理和黄金比的无理性、格点多边形和数 $2i+7$、闵嗣鹤论格点多边形的面积公式、空间格点三角形的面积、从施瓦兹到毕克到阿尔弗斯及其他、美国中学课本中的有关平面格点的内容. 阅读本书可全面地了解毕克定理以及毕克定理在数学中的应用.

本书适合高中生、大学生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Pick 定理／刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.5
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978-7-5603-6091-1

Ⅰ.①P… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①面积定理 Ⅳ.①O437

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 149318 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 杨明蕾 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 11.75 字数 120 千字
版　　次 2017 年 5 月第 1 版 2017 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6091-1
定　　价 68.00 元

⊙ 代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

毕克(Pick)定理

第1章

§1 从一道北京高考试题的解法谈起

北京历来是中国的风向标,高考亦不例外. 据吕大军、王芝平两位特级教师评价:

新课标高考以来,北京数学卷整体设计更加平实大气,不纠缠于细枝末节,对数学思维考查的比例较大,题型简洁清新,形成了北京卷试题独有的风格和魅力. 特别是各题型的压轴题背景新颖、内涵丰富,而其解法具有质朴、思想深刻等特点,注重考查考生抽象概括能力、推理论证能力、数据处理能力及分析问题和解决问题的能力. 特别是第20题跳出了以往"偏、难、怪"和无人问津的怪圈,既有非常好的选拔功能,又为中学数学教学指明了方向. 下面我们举一个例子来说明其中所蕴含的深刻背景:

设 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$C(t+4,4)$,$D(t,4)$($t\in\mathbf{R}$).记 $N(t)$为平行四边形 $ABCD$ 内部(不含边界)的整点的个数,其中整点是指横、纵坐标都是整数的点.则函数 $N(t)$的值域为(　　).

A. $\{9,10,11\}$　　　　B. $\{9,10,12\}$

C. $\{9,11,12\}$　　　　D. $\{10,11,12\}$

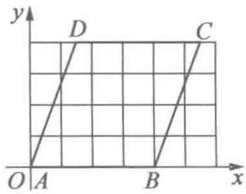

图 1

赏析　此题以“整点”问题为背景,通过简单的数学知识考查了数形结合与分类讨论思想,以及考生的自主探索能力,实践操作能力,观察、归纳、猜想的能力,能很好地甄别考生的数学综合素养.如图 1 所示,虽然 C,D 是动点,但它们却在直线 $y=4$ 上,且 $CD=4$.易知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,其内部的整点都在直线 $y=k(k=1,2,3)$落在四边形 $ABCD$ 内部的线段上,因为这样的线段长度总等于 4,所以每条线段上的整点有 3 或 4 个,所以 $9\leqslant N(t)\leqslant 12$.再根据不同取值进行讨论:

当 $t=0$ 时,$N(t)=9$;当 $0<t<1$ 时,$N(t)=12$;当 $t=\frac{4}{3}$,即直线 AD 过点(1,3)时,$N(t)=11$.可知选 C.

其实利用毕克定理,我们可以给出一个简捷而又利于推广的解法:

设 S_n 是四边形 $ABCD$ 的面积,C_n 是四边形内部(不含边界)的整点的个数,即题目中的 $N(t)$,B_n 是四边形边界上的整点个数.则由毕克定理知

$$S_n=C_n+\frac{1}{2}B_n-1$$

由此易知 $$S_n=4\times 4=16$$
当四边形 $ABCD$ 为正方形,即 $t=0$ 时
$$\max B_n=16$$
可选适当的 t,使 AD 及 BC 上均无整点,此时
$$\min B_n=10$$
故 $$C_n=S_n-\frac{1}{2}B_n+1=17-\frac{1}{2}B_n$$
因为 $10\leqslant B_n\leqslant 16$,故 $9\leqslant C_n\leqslant 12$. 故选 C.

读者可以看出赏析中所给的解法对于较小的四边形易处理,对于较大的四边形很复杂,而后面给出的解法均可.

一、一道竞赛试题的解答

在第64届俄罗斯圣彼得堡数学奥林匹克中有一试题:

求证:平面上的整点凸 $2n$ 边形的面积不小于 $\frac{n(n-1)}{2}$.

证明 若 $2n$ 边形 T 为中心对称图形(即它的边配成 n 对,每对边平行且相等),对 n 归纳可证 T 可以分割为$\frac{n(n-1)}{2}$个整点平行四边形,而由毕克定理,每个整点平行四边形的面积不小于1,故结论成立. 以下记 $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$.

如图2所示,对于任意的 T,它被一条直径 L 分割为两个凸多边形 T_1,T_2(可有一个退缩为一边),设它们的边数为$k+1,m+1(k+m=2n)$,分别关于 L 的中点的对称形为 T_1^*,T_2^*. 由于 L 是 T 的对角线或边,故 T_1,T_2,T_1^*,T_2^* 都是整点多边形. 又由 L 的最大性,它

与邻边的夹角为锐角，故 $T_1 \cup T_1^*$，$T_2 \cup T_2^*$ 为凸. 因而 $S(T_1 \cup T_1^*) \geqslant f(k)$，$S(T_2 \cup T_2^*) \geqslant f(m)$.

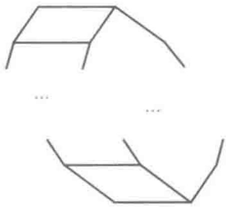

图 2

最后由对称性及函数 $f(x)$ 的下凸性得到

$$\begin{aligned}S(T) &= S(T_1) + S(T_2)\\ &= \frac{1}{2}(S(T_1 \cup T_1^*) + S(T_2 \cup T_2^*))\\ &\geqslant \frac{1}{2}(f(k) + f(m))\\ &\geqslant f\left(\frac{k+m}{2}\right)\\ &= f(n)\end{aligned}$$

在上述证明中用到了一个对国内读者来说十分冷僻的定理，即毕克定理.

二、格点

在平面直角坐标系中，纵坐标和横坐标都是整数的点叫作格点（也可叫作整点）. 格点坐标的整数性质、格点分布的离散性和对称性都是解格点问题的重要依据. 在本小节中，我们将简要介绍格点的概念、性质及其应用.

1. 格点的性质.

定理 1 若点 A 的坐标是整数或半整数，则任一整点 P 关于点 A 的对称点 Q 也是整点.

证明 不妨设 $A\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$, $P(a,b)$, $Q(x,y)$，其中 m,n,a,b 都是整数，于是

$$\begin{cases}\frac{a+x}{2}=\frac{m}{2}\\ \frac{b+y}{2}=\frac{n}{2}\end{cases}$$

解得

$$x=m-a, y=n-b$$

故 x,y 都是整数.

例1 若平行四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 有3个顶点为整点，则第4个顶点也是整点.

证明 我们不妨设平行四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_1，A_2，A_3 是整点，联结 A_1A_3 和 A_2A_4，设交点为 O. 由于 O 是 A_1A_3 的中点，且 A_1，A_3 都是整点，因此 O 的坐标都是整数或半整数. 又由于 A_2 是整点，因此由定理1知，A_4 是整点(图3).

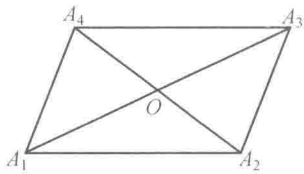

图3

定理2(闵可夫斯基(Minkowski)定理) 如果一个关于原点对称的凸图形的面积大于4，那么，它的内部除原点外，一定还有别的格点.

证明 先用与坐标轴的距离为偶数的两组平行线将平面划分成无穷多个 2×2 的正方形，这些 2×2 的正方形把凸图形分成了若干块，每个与凸图形相交的 2×2 正方形中都有一块. 将含有凸图形块的 2×2 正

方形重叠在一起,由于所有凸图形块的面积和大于4,而 2×2 正方形的面积为4,因此至少有两个凸图形块在重叠时有公共点. 不妨设一个凸图形块上的点 $A(x_1,y_1)$ 与另一个凸图形块上的点 $B(x_2,y_2)$,在随着 2×2 的正方形重叠时恰好重合. 显然,A,B 两点的横坐标之差与纵坐标之差都是偶数,即

$$\begin{cases}x_2-x_1=2m\\y_2-y_1=2n\end{cases}$$

其中 m,n 是整数,且不全为零. 由于凸图形关于原点对称,$A(x_1,y_1)$ 在凸图形中,因此 A 关于原点的对称点 $A'(-x_1,-y_1)$ 也在凸图形中. 由于图形是凸的,因此凸图形中的两点 A',B 的中点 $C\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2}\right)$ 也在凸图形中,即 $C(m,n)$ 在凸图形中,C 就是凸图形中除原点之外的另一个格点,故命题得证.

格点题是近几年数学中考试题的一大特色,其在数学探究性学习方面有着积极的导向作用,试题本身也具有较高的研究价值. 如2013年浙江省湖州市数学中考试题中的格点题.

如图4所示,在 10×10 的网格中,每个小方格都是边长为1的小正方形,每个小正方形的顶点称为格点. 若抛物线经过图中的3个格点,则以这3个格点为顶点的三角形称为抛物线的"内接格点三角形". 以 O 为坐标原点建立如图4所示的平面直角坐标系,若抛物线与网格对角线 OB 的2个交点之间的距离为 $3\sqrt{2}$,且这2个交点与抛物线的顶点是抛物线的内接格点三角形的3个顶点,则满足上述条件且对称轴平行于 y 轴的抛物线条数是(　　).