弹性力学问题的变分法

王润富 编著

科学出版社

弹性力学问题的变分法

王润富　编著

科学出版社
北　京

内容简介

本书重点阐述弹性力学问题的变分解法，即从弹性力学微分方程的解法出发，明确各类问题中的变量及其必须满足的全部条件，并应用这种观点和结论来判定各类变分问题中的变量及其必须满足的全部条件.书中第一章～第四章首先导出原始形式的极小势能原理和极小余能原理；其次，应用代入消元法，导出各类变量形式的有约束条件的极小势能原理和极小余能原理；再次，应用拉格朗日乘子法，进一步导出各类变量形式的无约束条件的广义变分原理.第五章～第八章介绍了在各向同性、线性弹性和小变形假定下，弹性力学的几种常见问题的变分解法，即平面问题的变分法、扭转问题的变分法、薄板弯曲问题的变分法，以及变分法在有限单元法中的应用.

本书可供高等院校力学及工科类专业的师生阅读，也可供力学领域科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学问题的变分法/王润富编著.—北京：科学出版社，2018.3

ISBN 978-7-03-055022-4

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①王… Ⅲ.①弹性力学–变分法 Ⅳ.①O343

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第264093号

责任编辑：童安齐 王杰琼／责任校对：马英莉

责任印制：吕春珉／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年3月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2018年3月第一次印刷 印张：12 3/4

字数：242 000

定价：75.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62137026

前 言

本书主要介绍弹性力学问题的变分解法.

第一章至第四章着重讨论在非线性弹性、各向异性线性弹性、各向同性线性弹性和小变形假定下，弹性力学中的各类有约束条件的变分原理和无约束条件的广义变分原理. 主要内容如下.

（1）从弹性力学微分方程的解法出发，阐明各类弹性力学问题中的变量类型及其必须满足的全部条件.

（2）从虚位移原理导出极小势能原理，从虚应力原理导出极小余能原理.

（3）应用代入消元法，从极小势能原理和极小余能原理，导出各类变量形式的有约束条件的变分原理.

（4）应用拉格朗日乘子法，将上述各类有约束条件的变分原理中的约束条件纳入泛函之中，导出各类变量形式的完全无约束条件的广义变分原理（广义势能原理和广义余能原理）.

（5）由此得出在非线性弹性、各向异性线性弹性、各向同性线性弹性和小变形假定下，弹性力学中的各类变量形式的有约束条件的变分原理和无约束条件的广义变分原理，组成一个完整的、系统的变分原理表（其中补充了一些新的变分原理）.

第五章至第八章介绍在各向同性线性弹性和小变形假定下，弹性力学的几种常见问题的变分解法，即平面问题的变分法、扭转问题的变分法、薄板弯曲问题的变分法，以及变分法在有限单元法中的应用.

本书的特点是从弹性力学微分方程的解法出发，明确各类问题中的变量及其必须满足的全部条件，并应用这种观点和结论来判定各类变分问题中的变量及其必须满足的全部条件（包括预先要求满足的约束条件、变分运算过程中强制要求满足的约束条件和变分方程）. 书中首先导出原始形式的极小势能原理和极小余能原理；其次，应用代入消元法，导出各类变量形式的有约束条件的极小势能原理和极小余能原理；再次，应用拉格朗日乘子法，进一步导出各类变量形式的完全无约束条件的广义变分原理（广义势能原理和广义余能原理）. 书中的结论，都是

以弹性力学微分方程的解法和变分法公式的逻辑推导结果为依据得出的.

在本书编写过程中，得到河海大学力学与材料学院和工程力学系的大力支持和帮助，作者表示衷心的感谢；同时对吴家龙教授提出的许多宝贵意见和张玉群同志提供的许多帮助，致以深切的谢意.

由于时间所限，书中不妥之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见.

王润富

2017 年 4 月

目　录

第一章　变分法的基本知识

本章内容摘要

本章介绍变分法的基本知识.

（1）变分法的基本概念，着重介绍泛函及其变分的知识.

（2）变分法中的泛函极值条件，与相应的微分方程和边界条件的关系.

（3）变分法的基本求解方法——里茨法、伽辽金法、列宾逊法.

（4）解除变分问题中的约束条件的方法——代入消元法、拉格朗日乘子法、罚函数法.

（5）直角坐标系中的下标记号法．本章大部分的公式是采用下标记号法表示的，以简化推导和篇幅。

1.1　变分法的基本概念

变分法，是一种数学方法，**主要研究泛函及其极值的求解方法**．所谓泛函，简单地讲，**是以函数为自变量的函数**.

在弹性力学的理论中，有两种独立的解法．一种是**建立微分方程并进行求解的方法**，即根据微分体上力的平衡条件，微分线段上应变与位移之间的几何条件和应力与应变之间的物理条件，在弹性体内部建立平衡微分方程、几何方程和物理方程；并在边界上建立相应的位移边界条件和应力边界条件；然后求解上述微分方程组，得出应力、应变和位移的解答．另一种是**变分解法**，即根据变分原理（如泛函的极值条件，例如极小势能原理）建立变分方程，从而求出应力、应变和位移的解答．这就是弹性力学中的变分法，是不同于微分方程解法的另一种独立解法．但是这两种解法之间，又有密切的联系，可以互相导出彼此的方程式．本书主要介绍弹性力学问题的变分解法.

1．函数和泛函

如果对于变量 x 在某一区域上的每一个值，变量 y 均有一个值与它对应，则变量 y 称为变量 x 的**函数**，记为

$$y = y(x)\ .$$

其中 x 称为自变量（一般函数的自变量，都是最基本的变量，如位置坐标、时间坐标等），函数 y 称为因变量．如果自变量 x 有微小的增量 $\mathrm{d}x$，则函数 y 也有对应

的微小的增量，即

$$\Delta y = y'(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2!}y''(x)\mathrm{d}x^2 + \cdots,$$

其中的一阶线性项，即函数 y 增量的主部，称为函数 y 的微分 $\mathrm{d}y$，

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $y'(x)$ 为 y 对于 x 的导数．Dx、dy 是处于同一个函数状态 y=$y(x)$之中的量．

如果对于某一类函数 $y(x)$中的每一个函数 $y(x)$，变量 I 均有一个值与它对应，则变量 I 称为依赖于函数 $y(x)$的**泛函**，记为

$$I = I[y(x)]. \tag{1-1}$$

因此，泛函的自变量（又称为宗量）是函数，而泛函就是因变量．

2. 函数和泛函的变分

假想函数 $y(x)$发生了微小的改变，而成为邻近的一个新函数 $y_1(x)$，如图 1-1 所示，则对应于任一 x（位置坐标）的定值，函数 y 具有微小的增量，

$$\delta y = y_1(x) - y(x), \tag{1-2}$$

增量 δy 称为**函数 $y(x)$的变分**．这里用 δy 表示，以区别于微分．显然，δy 一般也是 x 的函数．

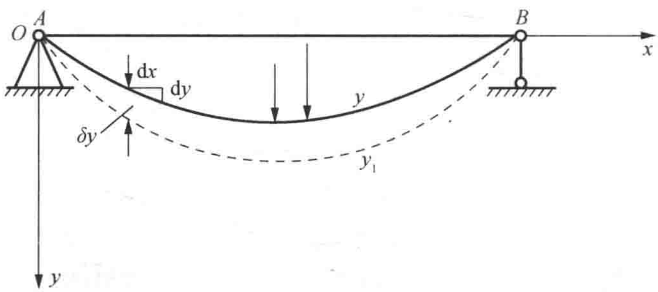

图 1-1　变分和微分

例如，在图 1-1 中，如果 $y(x)$代表简支梁的挠度函数，它表示了一种位移状态．假设由于某种原因，在此位移状态附近发生了微小的改变 δy，进入邻近的位移状态 $y_1(x)$，即 $y_1(x) = y(x) + \delta y$，则增量 δy 表示函数 y 的变分．由此可见，变分问题的自变量是函数 y，它研究由于自变量函数 y 改变 δy，引起泛函 I 的改变 δI；而微分与此不同，它表示在同一位移状态 $y(x)$中，由于自变量 x（位置坐标）的改变 dx，而引起相应的挠度函数的改变 dy（图 1-1）．

当 y 有变分 δy 时，导数 y' 一般也有相应的变分 $\delta(y')$，它等于新函数 y_1 的导数与原函数 y 的导数这两者之差，即

$$\delta(y') = y_1'(x) - y'(x). \tag{1-3}$$

但由于式（1-2）有

$$(\delta y)' = y_1'(x) - y'(x)\ .$$

于是有关系式 $\delta(y') = (\delta y)'$，或

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\ . \tag{1-4}$$

这就是说，**导数的变分等于变分的导数**．因此，微分的运算和变分的运算可以交换秩序．因为其中的微分和变分都是微量．

下面来讨论由函数的变分 δy 而引起泛函的变分．例如，假设泛函具有如下的形式，即

$$I[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x\ , \tag{1-5}$$

并假设积分的上下限均为定值，即不含有变量．其中的被积函数 $f(x,y,y')$ 是 x 的复合函数．

首先来考察函数 $f(x,y,y')$．当函数 $y(x)$ 具有变分 δy 时，导数 y' 也将随着具有变分 $\delta y'$．这时，按照泰勒级数的展开法则，函数 f 的增量可以写成

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y')\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'^2}\delta y'^2\right)\\ &\quad + (\delta y \text{ 和 } \delta y' \text{ 的更高阶项}).\end{aligned} \tag{1-6}$$

上述等号右边第一个括号内的两项，是关于 δy 和 $\delta y'$ 的线性项，是函数 f 的增量的主部，定义为**函数 f 的一阶变分**，

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\ . \tag{1-7}$$

而等号右边第二项，是**函数 f 的二阶变分 $\delta^2 f$**．

相应的泛函 I 的增量为

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b [\delta f + \delta^2 f + (\delta y \text{及} \delta y' \text{的更高阶项})]\ \mathrm{d}x\ .\end{aligned} \tag{1-8}$$

泛函 I 的一阶变分为

$$\delta I = \int_a^b (\delta f)\mathrm{d}x\ . \tag{1-9}$$

将式（1-7）代入，即得**泛函 I 的一阶变分**，

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x\ . \tag{1-10}$$

由式（1-5）及式（1-10），可见有关系式，

$$\delta\int_a^b f\mathrm{d}x=\int_a^b(\delta f)\mathrm{d}x\,. \tag{1-11}$$

这就是说，只要**积分的上下限保持不变**（即积分的上下限不含有变量），**变分的运算与定积分的运算可以交换秩序**.

相应地，如果我们在式（1-8）中取 δy 和 $\delta y'$ 的二次项，可以得到关于**泛函 I 的二阶变分** $\delta^2 I$ 的表达式，即

$$\delta^2 I=\int_a^b\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'^2}\delta y'^2\right)\mathrm{d}x\,. \tag{1-12}$$

3. *泛函的极值问题——变分问题*

泛函的极值问题，相似于函数的极值问题，可以表示如下：如果泛函 $I=I[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 邻近的任意一条曲线上的值，都不大于或都不小于 $I=I[y_0(x)]$，则称泛函 $I=I[y(x)]$ 在曲线 $y=y_0(x)$ 上达到极大值或极小值，而**泛函 I 为极值的必要条件是一阶变分等于零**，即

$$\delta I=0\,, \tag{1-13}$$

相应的曲线 $y=y_0(x)$ 称为泛函 $I=I[y(x)]$ 的极值曲线.

泛函 I 为极值的充分条件如下所述.

（1）如果二阶变分 $\delta^2 I\geqslant 0$，则泛函 I 在 $y=y_0(x)$ 为**极小值**.

（2）如果二阶变分 $\delta^2 I\leqslant 0$，则泛函 I 在 $y=y_0(x)$ 为**极大值**.

（3）如果二阶变分 $\delta^2 I$ 在 $y=y_0(x)$ 的两侧变号，则泛函 I 在 $y=y_0(x)$ 为**驻值**（即在此点的导数或者一阶变分为零，泛函 I 曲线的切线为水平线；而两侧曲线的升降情况不同），如图 1-2 所示．在求解一般的泛函极值问题时，通常只需考虑必要条件（1-13），即一阶变分等于零就可以了．这时，相应的泛函就是极值或驻值.

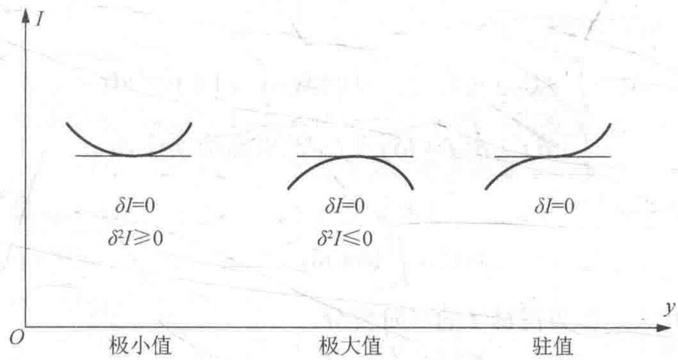

图 1-2 极值和驻值

4. 变分与微分的比较

首先，**变分和微分的自变量和因变量是不相同的**．微分问题的自变量是最基本的变量，如位置坐标变量、时间变量等，其因变量是函数；而变分问题的自变量是函数，其因变量是泛函．相应地，由于变分和微分的自变量和因变量是不同的，因此，微分问题和变分问题表示的物理概念也是不同的．从图 1-1 中所示的简支梁，可以明显地看出：在微分问题中，微分为 $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$，表示在同一位移状态（位移函数）中，由于位置 x 改变了 $\mathrm{d}x$，引起位移的改变 $\mathrm{d}y$．而在变分问题中，变分为 $\delta y-\delta I$，其中 δy 表示了位移状态的改变，即从原来的位移状态 y 进入邻近的位移状态 y_1 的改变；然后再考虑对于同一位置 x，由于位移状态的改变 δy，引起相应的泛函 I（如弹性体的势能）的改变 δI．在变分问题中，由于自变量函数常常表示某一种物理状态，如位移状态、应力状态等，故又称自变量函数为状态函数．泛函的自变量，也称为宗量．

其次，由于变分和微分都是微量，**变分和微分的运算相似**，如求导的运算、极值问题的运算等；并且变分的运算和微分的运算可以交换秩序，如式（1-4）所示；在泛函中为定积分时，变分的运算和积分的运算也可以交换秩序，如式(1-11)所示．

1.2　泛函的极值问题与欧拉方程、约束边界条件和自然边界条件

下面来讨论泛函的极值问题，以及它与对应的微分方程的关系，并以下面的几种泛函作为例子来说明．

首先，**考虑具有完全约束边界条件的泛函极值问题**．设泛函为

$$I[y(x)]=\int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x\,, \tag{1-5}$$

其中包含自变量函数 y 及其一阶导数 y'，并且 y 具有对 x 的二阶连续导数．假定在**两端点边界** $x=a,b$ 上直接给定了**函数 y 必须满足的约束条件**，

$$y(a)=y_a\,,\quad y(b)=y_b\,, \tag{1-14}$$

试求泛函 I 的极值条件．式（1-14）称为**约束边界条件**，或刚性边界条件．

考虑泛函 I 为极值时的必要条件，即一阶变分等于零，亦即

$$\delta I=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=0. \tag{1-15}$$

上式中的第二项，可以通过分部积分，得

$$\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=b}-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=a}-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x\,. \tag{1-16}$$

将式（1-16）代入式（1-15），泛函 I 的极值条件成为

$$\delta I=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=b}-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=a}+\int_a^b\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x=0\,. \tag{1-17}$$

由于函数 y 预先满足约束边界条件（1-14），在边界端点上函数的变分为零，即

$$(\delta y)_{x=b}=0\,,\quad (\delta y)_{x=a}=0\,. \tag{1-18}$$

将式（1-18）代入式（1-17），泛函 I 的极值条件是

$$\delta I=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0\,. \tag{1-19}$$

δy 在域内 $[a,b]$ 为任意的变分. 对于**任意的变分 $\boldsymbol{\delta y}$，上式的极值条件均必须满**足，则只能是积分号内的方括号，在积分域内处处都等于零，因此得出

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\,. \tag{1-20}$$

如果将上式的第二项展开，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''\,,$$

所以式（1-20）又可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}y'-\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''=0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\,. \tag{1-21}$$

因此，从极值条件（1-15）导出相应的微分方程（1-20），这个微分方程称为与极值条件对应的**欧拉方程**；满足欧拉方程（1-20）的解答，必然满足上述极值条件（1-15）. 这样，我们得出结论：在端点的约束边界条件（1-14）下，求解泛函（1-5）的极值问题，等价于在端点的约束边界条件（1-14）下，求解欧拉方程（1-20）的问题. 简单地说，在端点边界约束条件（1-14）下，泛函（1-5）的极值条件等价于欧拉方程（1-20）.

由此可见，我们得到两种描述问题和求解问题的方法. 一种是**变分法**，即在边界约束条件下，求解泛函的极值条件，得出函数的解答；另一种是**微分方程的解法**，即在边界约束条件下，求解微分方程即欧拉方程的解答. 一般来说，求解微分方程的解答，是比较困难的，不容易找出解答；而应用变分法的极值条件来

求解，是比较容易的．这也就是变分法在求解实际问题时有着广泛应用的原因．

例 1-1　最短线问题——设平面上有两个定点 $A(a,y_a)$ 和 $B(b,y_b)$，试求两点之间所有曲线族中的最短线，如图 1-3 所示．

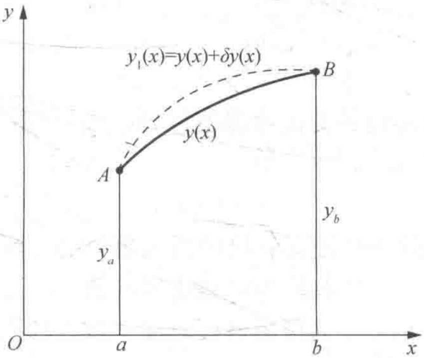

图 1-3　最短线问题

分析：因为微分线段的长度为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

所以 $A(a,y_a)$ 和 $B(b,y_b)$ 两点之间任一曲线的长度 L 是

$$L=\int_a^b \mathrm{d}s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

L 是 y 的泛函．为了求此曲线族中的最短线，即长度 L 的极小值，其一阶变分应等于零，即

$$\delta L=\int_a^b \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y'\mathrm{d}x=0\,.$$

应用分部积分公式，得极值条件为

$$\delta L=\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y\right]_a^b-\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\delta y\mathrm{d}x=0\,.$$

由于在 $x=a,b$ 处，函数 y 预先满足了约束条件，其变分 $\delta y_a=0,\delta y_b=0$；而在域内 δy 为任意的变分，不等于零，所以从上述极值条件得出相应的欧拉方程，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0\,.$$

由此解出

$$y'=0\,,$$

得出

$$y=Ex+F\,.$$

将 A、B 两端点的约束条件代入，求出常数

$$E=\frac{y_b-y_a}{b-a},\ F=\frac{by_a-ay_b}{b-a}.$$

于是得最短线的方程为

$$y=\frac{y_b-y_a}{b-a}x+\frac{by_a-ay_b}{b-a},$$

可见两点之间的最短线是一条直线.

其次，考虑具有可动边界的泛函极值问题. 设同样的泛函（1-5），其自变量函数 y 在一端 $(x=a)$ 上有约束边界条件

$$y(a)=y_a; \tag{1-22}$$

而另一端的边界是可动的，即**没有直接给出函数 y 必须满足的约束条件**，而是用其他的条件来表达的. 这类问题称为**可动边界问题**，其边界条件称为**自然边界条件**. 下面来研究，泛函（1-5）的极值条件对应于域内什么样的欧拉方程和边界上什么样的条件.

由泛函极值条件

$$\delta I=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=b}-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=a}+\int_a^b\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x=0, \tag{1-17}$$

在端点 $x=a$，预先满足约束条件（1-22），因此有

$$(\delta y)_{x=a}=0. \tag{1-23}$$

由此，泛函极值条件可以表达为

$$\delta I=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]_{x=b}+\int_a^b\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x=0. \tag{1-24}$$

函数 y 的变分 δy，在域内和在端点 $x=b$ 上不受约束，是任意的. 对于任意的变分 δy，极值条件（1-24）均应满足，必须有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\quad(a\leqslant x\leqslant b), \tag{1-25}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\quad(x=b). \tag{1-26}$$

因此，从泛函极值条件导出域内的欧拉方程（1-25）和端点 $(x=b)$ 的边界条件（1-26）. 也就是说，在端点 $(x=a)$ 的约束边界条件（1-22）下，泛函（1-5）的极值条件，包含了上述欧拉方程（1-25）和边界条件（1-26）. 或者说，泛函（1-5）的极值条件，等价于欧拉方程（1-25）和边界条件（1-26）. 式（1-26）就是**自然边界条件**.

由此，相似地也得到两种描述问题和求解问题的方法. 一种是变分法，即在端点 $(x=a)$ 的约束边界条件（1-22）下，从泛函极值条件求解函数 y 的解答. 其泛函极值条件，等价于欧拉方程（1-25）和自然边界条件（1-26）. 另一种是微

分方程的解法，在端点 $(x=a)$ 的边界约束条件（1-22）和端点 $(x=b)$ 的自然边界条件（1-26）下，从微分方程，即欧拉方程（1-25）求出函数 y 的解答．

例 1-2　最速下降线问题——在重力场中求连接定点 $A(0,0)$ 和另一点 $B(b,y)$ 的一条曲线 $y=y(x)$，使初速度为零的质点，沿该曲线从 A 下滑至 B 所需时间为最短（忽略摩擦阻力），如图 1-4 所示．且在点 A 有约束条件，

$$y(0)=0\,; \tag{1-27}$$

分析：在点 $B(x=b,y)$，$x=b$，对函数 y 没有直接的约束条件．质点沿着曲线由 A 滑到 B 所需时间，用 T 表示为

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_0^b \frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\mathrm{d}x\,. \tag{1-28}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是沿曲线 AB 上的微分线段，v 是质点在相应于 y 点的滑动速度．根据能量守恒定律，这点的势能转化为相应的动能，$mgy=\frac{1}{2}mv^2$，因此，其速度是 $v=\sqrt{2gy}$．将它代入式（1-28），得

$$T=\int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x\,. \tag{1-29}$$

于是求最速下降线的变分问题，就是在满足端点 A 的约束条件 $y(0)=0$ 下，求解上述的泛函——时间 T 的最小值问题．

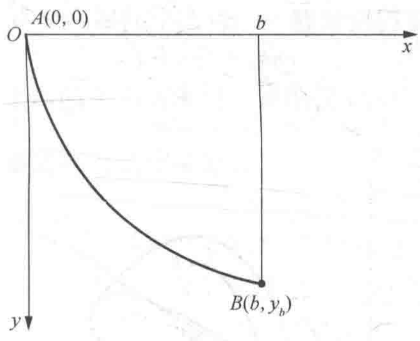

图 1-4　最速下降线问题

泛函 T 内含有 y、y'，其一阶变分应等于零，即

$$\delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y'-\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\delta y\right]\mathrm{d}x=0\,. \tag{1-30}$$

式（1-30）中的第一项，可以通过分部积分得

$$\int_0^b\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y'\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y\right]_0^b-\int_0^b\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\delta y\right]\mathrm{d}x\,, \tag{1-31}$$