College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

工科数学分析

学习指导与习题解答

下册

哈尔滨工业大学数学系分析教研室

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

工科数学分析
学习指导与习题解答

Gongke Shuxue Fenxi
Xuexi Zhidao yu Xiti Jieda

下 册

哈尔滨工业大学数学系分析教研室

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是哈尔滨工业大学数学系分析教研室编写的《工科数学分析（第五版）》的配套学习指导用书，分上下两册出版，上册分为七章：函数，极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，微分方程。下册分为四章：多元函数微分学，多元函数积分学，第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场，无穷级数。每章又包括教学基本要求、内容总结、思考与讨论、典型错误纠正、释疑解惑、例题分析、习题解答七部分。

本书既可作为本科生工科数学分析课程学习的同步辅导用书，也可作为考研的参考用书。同时，也可作为任课教师的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析学习指导与习题解答．下册/哈尔滨工业大学数学系分析教研室编．--北京：高等教育出版社，2015.12（2017.6重印）

（大学数学学习辅导丛书）

ISBN 978－7－04－043792－8

Ⅰ．①工…　Ⅱ．①哈…　Ⅲ．①数学分析－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第214935号

策划编辑	张晓丽	责任编辑	张晓丽	特约编辑	马兆海	封面设计	李树龙
版式设计	马　云	插图绘制	尹文军	责任校对	殷　然	责任印制	田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21	版　　次	2015年12月第1版
字　　数	500千字	印　　次	2017年6月第4次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	32.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43792－00

目录

第八章　多元函数微分学

8.1　教学基本要求

1. 了解 n 维空间，n 维点，两点间的距离，点 p_0 的 δ 邻域，集合的内点，边界点，边界，开集，连通集，开区域和闭区域，集合的有界性，集合的聚点等概念.

2. 理解多元(点)函数的概念，理解二元(点)函数的几何意义.

3. 了解多元(点)函数的极限与连续的概念，以及有界闭区域上连续函数的性质.

4. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性，了解全微分在近似计算中的应用.

5. 掌握多元复合函数偏导数的求法(含高阶偏导数).

6. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数及二阶偏导数.了解隐函数存在定理.

7. 了解曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的一阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解多元函数极值存在的充分条件，会求多元函数的极值.会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

10. 理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

8.2　内容总结

8.2.1　基本概念

1. **多元函数**　$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.它是从点集 D 到 z 轴的映射.

2. **极限**　$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.要求点 (x,y) 在 $f(x,y)$ 的定义域 D 内以任何方式和途径趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 都无限趋于常数 A.

3. **连续**　$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.等价于全增量 $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 趋于零.

4. **偏导数**

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f'(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

几何意义是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率，物理意义是在 (x_0,y_0) 处 z 随 x 变化的变化率.

5. **全微分**　$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$，是全增量 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 的线性主部.几何上表示曲面 $z=(x,y)$ 的切平面的竖坐标的增量.

6. **方向导数** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{p_0}=\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{f(p)-f(p_0)}{|pp_0|}$,点 p 在以 p_0为端点的射线 l 上,它表示函数沿 l 方向的变化率.

梯度 $\nabla z=\mathbf{grad}\, z$,它是个向量,指向函数 z 在点 p 处变化最快的方向,大小恰好是点 p 处最大的变化率.

8.2.2 基本理论与方法

1. 有界闭区域上连续函数必有界,且有最大值和最小值,必能取到介于最大值与最小值之间的任何值.

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0, y_0)处,有如下关系(图 8.1)

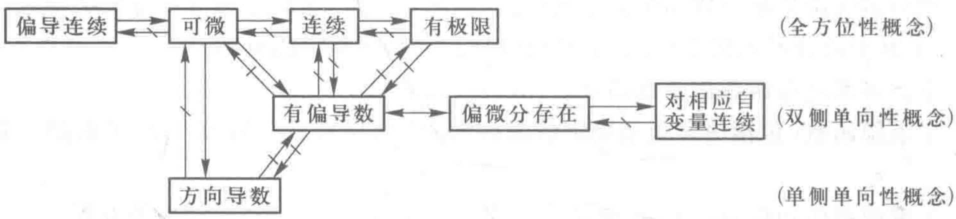

图 8.1

3. 若函数 $u=u(x,y,z)$ 可微,

(1) 梯度 $\mathbf{grad}\, u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, $\left.\mathbf{grad}\, u\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 垂直于等值面 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$,是等值面的法向量.

(2) 方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\mathbf{grad}\, u\cdot \boldsymbol{l}^0=\mathrm{Prj}_l\,\nabla u$.其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

(3) 全微分 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathbf{grad}\, u\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}$.

4. 若函数 $u(x,y)$ 的混合偏导数连续,则与求导次序无关,如$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

5. 复合函数 $z=z(u,\nu)$, $u=u(x,y)$, $\nu=\nu(x,y)$ 的链导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial(x,y)}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial(u,\nu)}\right)\left(\frac{\partial(u,\nu)}{\partial(x,y)}\right).$$

这里 $z(u,\nu)$ 可微,而 $u(x,y)$, $\nu(x,y)$ 偏导数存在.

6. 隐函数 $F(x,y,z)=0$ 的求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

其中 $F'_z(x,y,z)\neq 0$.

由隐函数方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定的隐函数的求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\G'_u & G'_v\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

其中$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

7. 全微分形式不变性,函数四则运算的微分法则.

8.2.3 应用

1. 几何应用

(1) 曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in I$ 的切向量

$$\boldsymbol{t}=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)).$$

曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的切向量

$$\boldsymbol{t}=\left(\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\G'_y & G'_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\G'_z & G'_x\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\G'_x & G'_y\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\F'_x & F'_y & F'_z\\G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}.$$

求出切向量,不难写出曲线的切线方程和法平面方程.

(2) 曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,\ F'_y,\ F'_z).$$

曲面 $z=f(x,y)$ 向下的法向量

$$\boldsymbol{n}=(f'_x,\ f'_y,\ -1).$$

曲面 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ (u,v 为双参数)的法向量

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\x'_u & y'_u & z'_u\\x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}.$$

求出法向量,容易写出曲面的切平面方程和法线方程.

2. 极值

(1) 无条件极值.可微函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 在点$(x_0,\ y_0)$取得极值的必要条件是

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

充分条件是$f'_x(x_0,y_0)=0$,$f'_y(x_0, y_0)=0$,且黑塞矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

正定(负定),则$f(x_0,y_0)$为极小(大)值.即$AC-B^2>0$, $A>0$ ($A<0$)时,$f(x_0,y_0)$为极小值(极大值),$AC-B^2<0$时,$f(x_0,y_0)$不是极值.

(2) 条件极值.函数$u=f(x,y,z)$在约束条件$\varphi(x,y,z)=0$下的极值问题,可以通过拉格朗日乘数法,求函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

的驻点,得到条件极值的可能取值点,也可化为无条件极值处理.

8.3 思考与讨论

1. 函数$z=f(x,y)$在点(0, 0)处的两个偏导数$f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$都存在,则在点(0, 0)处,$f(x,y)$(　　).

(A) 沿x轴的正向和负向的方向导数必相等

(B) 沿x轴的正向和负向的方向导数必不等

(C) 关于x连续,关于y也连续

(D) 连续

分析　因为$f'_x(0, 0)=f'_x(x, 0)\big|_{x=0}$,所以由一元函数可导必连续知,$f(x, 0)$在$x=0$处连续,即$f(x,y)$在(0, 0)处关于$x$连续.同样知它关于$y$也连续,故(C)正确.

偏导数$f'_x(0, 0)$是函数$f(x, y)$在点(0, 0)处沿x轴对增量Δx的变化率;而沿x轴的正向和负向的两个方向导数,是x轴上两个相反方向的射线上函数对距离$|\Delta x|$的变化率.所以x轴正向上的方向导数与$f'_x(0, 0)$相等,而x轴负向上的方向导数应等于$-f'_x(0, 0)$.故否定(A)、(B).

偏导数存在不能保证多元函数连续,否定了(D).

应选 C.

2. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微,则下列结论不成立的是(　　).

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0, y_0)$处都连续

(B) 在(x_0, y_0)处,两个偏微分存在

(C) 存在$\delta>0$,在$U_\delta(x_0, y_0)$上函数有界

(D) 曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处有切平面

分析　因为偏导数连续是可微的充分条件,不是必要条件,所以(A)不成立.

全微分存在时,函数的所有偏微分都存在,且有叠加原理,所以结论(B)成立.函数可微必连续,因此由极限定义知,在(x_0,y_0)的某邻域内,$f(x,y)$有界,(C)成立.函数可微,曲面$z=f(x,y)$在相应点有切平面,(D)成立.

应选 A.

3. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处连续，且偏导数都存在，$f(0,\ 0)=0$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 可以等于下列四式中的(　　).

(A) $\dfrac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$　　(B) $\sqrt{x^2+y^2}$　　(C) $\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$　　(D) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

分析　(C)中函数在 $(0,\ 0)$ 的全增量 $\Delta z=(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ 是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小，所以可微，且 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=0$. 因此在 $(0,\ 0)$ 处连续、有偏导数.故(C)满足要求.

(A) 中函数 $f(x,0)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 所以 $f(x,y)$ 对 x 不连续，不可导.否定(A).(B)中函数显然连续，但因 $f(x,0)=|x|$，$f(0,\ y)=|y|$，所以两个偏导数都不存在，否定了(B).(D)中函数两个偏导数都存在，且均为零，但沿直线 $y=x$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，所以函数在 $(0,\ 0)$ 处不连续，否定了(D).

应选 C.

4. 下列条件中，使函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处可微，且全微分为零的是(　　).

(A) $f'_x(x_0,\ y_0)=0, f'_y(x_0,\ y_0)=0$　　(B) $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(C) $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$　　(D) $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

分析　因为(D)中全增量是 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小，所以(D)正确.

偏导数存在，保证不了可微性，否定了(A).对于(B)，由于偏增量 $\Delta_x f=0, \Delta_y f=0$，故两个偏导数均为零.但 $\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ 不是 ρ 的高阶无穷小$\left(\text{因为 }\Delta y=\Delta x\text{ 时，}\dfrac{\Delta f}{\rho}=\dfrac{\Delta x^2}{2\Delta x^2}=\dfrac{1}{2}\not\to 0\right)$，否定了(B).(C)中偏增量 $\Delta_x f=\dfrac{\sin\Delta x^2}{|\Delta x|}$，所以函数关于 x 的偏导数不存在，所以不可微，否定了(C).

应选 D.

5. 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，在点 $(0,\ 1,\ 1)$ 的充分小的邻域内，由该方程确定的具有连续偏导数的函数有(　　).

(A) $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$　　(B) $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) $z=z(x,y)$ 和 $x=x(y,z)$　　(D) $z=z(x,y)$

分析　设 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则 $F(0,\ 1,\ 1)=0$，而

$$F'_x(0,\ 1,\ 1)=2\neq 0,\quad F'_y(0,\ 1,1)=-1\neq 0,\quad F'_z(0,\ 1,\ 1)=0.$$

按隐函数存在定理的条件知方程可确定出函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，它们具有连续的偏导数.

定理的条件是充分的，不是必要的，所以不能由 $F'_z(0,1,\ 1)=0$ 说明方程不能确定出函数 $z=z(x,y)$.但考察方程本身，当 $x=0,\ y=1$ 时，无论 z 取何值都满足方程，所以没有确定的

z 与 $x=0$, $y=1$ 对应.据此,可以说 $z=z(x,y)$ 不存在.

应选 A.

6. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 G 上有二阶连续的偏导数,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,则函数 $f(x,y)$ 的(　　).

(A) 最大值点和最小值点均在 G 的内部

(B) 最大值点和最小值点均在 G 的边界上

(C) 最大值点在 G 的内部,最小值点在 G 的边界上

(D) 最大值点在 G 的边界上,最小值点在 G 的内部

分析　因为 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 不同号, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq 0$,所以, $AC-B^2<0$.因此 G 内无极值点.最大值点和最小值点均在 G 的边界上.

应选 B.

7. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$.已知 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$　　(B) 若 $f_x'(x_0, y_0)=0$,则 $f_y'(x_0, y_0)\neq 0$

(C) 若 $f_x'(x_0, y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0, y_0)=0$　　(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0, y_0)\neq 0$

分析　(1) 设 $y=y(x)$ 是方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定的函数, $y_0=y(x_0)$. $f(x,y)=f(x,y(x))$, $x=x_0$ 是它的极值点,于是

$$[f(x,y(x))]_x'\Big|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=0.$$

而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x'(x,y)}{\varphi_y'(x,y)}$,代入上式得

$$f_x'(x_0, y_0)-f_y'(x_0, y_0)\cdot\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0. \tag{1}$$

若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0, y_0)$ 可能等于零,也可能不等于零,否定了(A)、(B).

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,必须 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$,因此(D)正确,(C)错误.

(2) 用拉格朗日乘数法,设

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

由于 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点,故

$$L_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

$$L_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0.$$

因为 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$,由后一式解出 λ,代入前式得(1)式,以下的讨论和(1)中一样.

应选 D.

【注】 如果读者把条件极值与无条件极值的必要条件搞混,误认为条件极值点处函数必取极值,得到 $f'_x(x_0, y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$,选择了(A),就错了.

8.4　典型错误纠正

1. 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 的存在性.

解法 1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}}=0.$$

解法 2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0.$$

问题分析　题目中考察的是点 $(x, y)\to(0, 0)$ 过程中函数的极限.除直线 $x+y=0$ 上的点不考虑外,不能排除 $x=0$, $y\neq 0$ 和 $x\neq 0$, $y=0$ 情况,所以在解法 1 中,第一步的恒等变形就有错误.第二步也是错的,由"$\dfrac{1}{x}\to\infty$, $\dfrac{1}{y}\to\infty$"推不出"$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\to\infty$".

解法 2 中错误地把二重极限视为累次极限(参看 8.5 问题 3).

一个正确的解法如下.

当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ $(k\neq -1)$ 趋于点 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(k+1)x}=0.$$

但当点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2-x$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1.$$

可见题目中的极限不存在.

2. 讨论函数 $z=\sqrt{x^2+y^4}$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数的存在性.

解　由于偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$$

在 $(0, 0)$ 处无意义,所以函数在 $(0, 0)$ 处偏导数都不存在.

问题分析　用求导法则求导数是有条件的,这里使用了复合函数求导法,由于外层函数 $z=\sqrt{u}$ 在 $u=0$ 处不可导,所以得到的偏导函数表达式,对点 $(0, 0)$ 不适用.因此,认为偏导数

不存在的根据是错的.这时对点(0, 0)处可导性的讨论应从偏导数的定义出发.事实上,由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2}{\Delta y}=0,$$

所以 $f'_x(0,\ 0)$ 不存在,而 $f'_y(0,\ 0)=0$.

3. 讨论 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)处的可微性.

解 显然函数在点(0, 0)处连续,又

$$f'_x(0,0)=0'_x\big|_{x=0}=0,\quad f'_y(0,0)=0'_y\big|_{y=0}=0,$$

故

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=f'_x(0,0)\,\mathrm{d}x+f'_y(0,0)\,\mathrm{d}y=0.$$

问题分析 偏导数存在不足以保证函数的可微性.函数连续,且偏导数存在仅仅是可微的必要条件,不是充分条件;偏导数连续是可微的充分条件,不是必要条件.所以这里的讨论根据不足.这类问题通常用微分的定义来讨论.由于

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}. \tag{1}$$

当 $\Delta y=\Delta x$ 时,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to \Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以当 $\rho\to 0$ 时,(1)式极限不为零,因此 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在(0,0)处不可微.

4. 设 $z=f(x,y,z)$, $y=\varphi(x,t)$,其中 f, φ 可微,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解 因为 z 是 x, y 的函数,y 又是 x, t 的函数,所以 z 是 x,t 的函数,由链导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{1}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=-f'_y(x,y,z)\varphi'_x(x,t). \tag{2}$$

问题分析 在(1)式中,左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与右边第一项的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 含义不同,不能消去.左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是由 $z=f(x,\ \varphi(x,t),\ z)$ 确定的函数 $z=z(x,t)$ 关于 x 的偏导数,是我们要求的.而右边第一项的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是三元函数 $f(x,y,z)$ 对 x 的偏导数.为了避免混淆,通常把函数对中间变量的导数,即(1)式

中右边第一项的$\frac{\partial z}{\partial x}$,记为$\frac{\partial f}{\partial x}$.同样,(1)式中右边最后一项的$\frac{\partial z}{\partial z}$应记为$\frac{\partial f}{\partial z}$,它不等于1.正确求法如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x+f'_y\varphi'_x+f'_z\frac{\partial z}{\partial x}.$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'_x+f'_y\varphi'_x}{1-f'_z}\quad (f'_z\neq 1).$$

还可利用隐函数求导法,设方程组

$$\begin{cases}f(x,y,z)-z=0,\\ \varphi(x,t)-y=0\end{cases}$$

确定 y,z 是 x,t 的两个二元函数,由隐函数求导法

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}f'_y & f'_x\\ -1 & \varphi'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'_y & f'_z-1\\ -1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{f'_x+f'_y\varphi'_x}{1-f'_z}.$$

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ 确定,求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法 1　设 $F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}-1$,则

$$F'_x=2x,\quad F'_y=y,\quad F'_z=\frac{z}{2}.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}}{F'_z}=-\frac{4x}{z}-\frac{\partial z}{\partial x}.$$

推出$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{z}$.

解法 2　由隐函数求导法知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{4x}{z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{z}.$$

问题分析　解法1中,把隐函数求导公式理解错了,一阶偏导公式为$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$,其分子是 F 为 x,y,z 三个独立自变量的函数对 x 求偏导,解法1中错误地认为公式中的分子是 F 为 x, y,z 的函数,而 z 还是 x,y 的函数,对复合函数 $F(x,y, z(x,y))$关于 x 求偏导,出现错误的根

本原因在于没有理解公式的推导过程,只想套用公式.

解法 2 中一阶偏导数计算对了,但在求二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$时,误认为 z 与 x 无关,算错了.一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x}{z}$中的 z 是由隐函数方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的二元函数 $z=z(x,y)$.正确结果应为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{z}+\frac{4xz'_x}{z^2}=-\frac{4}{z}-\frac{16x^2}{z^3}.$$

6. 设函数 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$,其中 $\varphi(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续,求 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}$.

解 因为

$$\mathrm{d}f=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi'_x(x,y)]\mathrm{d}x+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi'_y(x,y)]\mathrm{d}y.$$

将 $x=0$, $y=0$ 代入得

$$\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=\varphi(0,0)\mathrm{d}x+\varphi(0,0)\mathrm{d}y.$$

问题分析 题目的条件只给出 $\varphi(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续,没说它在点$(0,0)$处有偏导数.更未说 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$附近可微,所以,那些运算都是错的.正确的做法应从 $\varphi(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续出发,通过全微分的定义——全增量的线性主部来计算.

由于 $\varphi(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续,所以在点$(0,0)$附近有

$$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+\alpha,$$

其中 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha=0$,故全增量

$$f(x,y)-f(0,0)=(x+y)\varphi(x,y)=\varphi(0,0)x+\varphi(0,0)y+\alpha(x+y).$$

显然 $\alpha(x+y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$,所以由全微分定义知,$f(x,y)$ 在点$(0,0)$处可微,且

$$\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=\varphi(0,0)\mathrm{d}x+\varphi(0,0)\mathrm{d}y.$$

7. 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中 f 具有二阶导数,g 有二阶连续的偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_x+g'_x+yg'_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''_{xy}+xg''_{x,xy}+g'_{xy}-xyg''_{xy,xy}.$$

问题分析 (1)函数 $f(2x-y)$ 的中间变量只有一个,即 f 是一元函数,f 的一、二阶导数应记为 f', f''.题解中出了 f'_x, f''_{xy} 是错的,说明对 $f(2x-y)$ 的复合情况不清楚,导数记号混乱.

(2)对二元复合函数 $g(x,xy)$ 求偏导时,若引入中间变量 $u=x$, $v=xy$,使 $g(x, xy)$ 对中间变量的偏导数写成 g'_u, g'_v(或 g'_1, g'_2),就不会错记为 g'_x, g'_{xy},也可避免在二阶偏导数中就显现出混杂的情形.

以上两个错误是初学者最容易犯的,必须注意纠正,否则自己都会糊涂了.正确的表达

方法如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'-xyg_{22}''.$$

8.5　释疑解惑

1. 曲线、曲面作为点集属于几维空间？

答　n 维空间的点有 n 个独立的坐标.几何图形作为点集，它的维数取决于图形上点的独立坐标（或参量）的个数.

曲线和直线一样，其上的点有一个自由度，可由一个参数确定点的位置.如在空间直角坐标系下，曲线可由单参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in I$$

给出.也可由一个独立坐标的方程

$$y=y(x),\quad z=z(x),\quad x\in I$$

给出.更一般地，可由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

确定，要求矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{pmatrix}$$

的秩为 2，比如当

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组确定 $y=y(x)$，$z=z(x)$，所以曲线上的点只有一个独立坐标.所以，曲线作为点集属于一维空间.

曲面和平面一样，其上的点有两个自由度，可由双参数确定点的位置，如在空间直角坐

标系下,曲面可由参数方程

$$x=x(u,\nu),\quad y=y(u,\nu),\quad z=z(u,\nu),\quad (u,\nu)\in D$$

给出.固定 $\nu=\nu_0$,得到

$$x=x(u,\nu_0),\quad y=y(u,\nu_0),\quad z=z(u,\nu_0),$$

称为 u_-线;而固定 $u=u_0$,得到

$$x=x(u_0,\nu),\quad y=y(u_0,\nu),\quad z=z(u_0,\nu),$$

称为 ν_-线,它们是曲面上的两组曲线,可以构成曲面上的曲线坐标.曲面也可由 $z=f(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 的形式给出,总之,曲面上的点有两个独立坐标,所以曲面作为点集属于二维空间.

有了上述的认识,一些概念和定理,对曲线或曲面上的函数的适用性,可有一个正确的理解.比如,在空间连续的含有端点的曲线段上,定义着的连续函数、最大值最小值存在定理、介值定理等.

2. 为什么引入聚点概念? 不同的书,多元函数的极限概念说法不一,在使用中是否会有差异?

答 引入聚点概念是为了正确地定义多元函数的极限.如果 p_0不是函数 $f(p)$ 的定义域的聚点,就谈不上 $p\to p_0$时函数 $f(p)$ 的极限.因为此时动点无法在定义域内趋于点 p_0,关于多元函数极限概念,常见如下两种定义.

定义 1 设 $u=f(p)$, $p\in D$, p_0是 D 的聚点,A 为常数,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $p\in D$,且 $0<\rho(p,\ p_0)<\delta$ 时,恒有

$$|f(p)-A|<\varepsilon,$$

则称 $p\to p_0$时,函数 $f(p)$ 以 A 为极限.

定义 2 设 $u=f(p)$ 在点 p_0的某去心邻域内有定义,A 为常数,如果 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $0<\rho(p,\ p_0)<\delta$ 时,恒有

$$|f(p)-A|<\varepsilon,$$

则称 $p\to p_0$时,函数 $f(p)$ 以 A 为极限.

两种定义的差异主要在于对极限点 p_0的要求不同.定义 1 要求 p_0是定义域 D 中的聚点,在 p_0的任意小的去心邻域内可以有不属于 D 的点,而定义 2 要求函数 $f(p)$ 在 p_0的某去心邻域内处处有定义.显然前者要求低,后者要求高,定义 1 使用面广,定义 2 使用面窄,在这种意义上定义 1 包含着定义 2.定义 2 使 D 的边界点无极限可谈.如函数

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy},$$

由于在 $x=0$ 和 $y=0$ 两条直线上函数无定义,所以按定义 2 就不能讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时,函数的极限.而按定义 1,点 $(0,0)$ 是聚点,可讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时,函数的极限,且有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

极限的唯一性、局部保序性和有界性,四则运算求极限的法则、夹挤准则等对多元函数的极限同样成立.对定义 2 不必再说明什么.而在定义 1 中,由于 p_0是聚点,所以涉及这些性质和法则时,必须理解到点 p 取自同一集合,如和的极限法则,若 $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$, $\lim\limits_{p\to p_0} g(p)=B$,则

$$\lim_{p\to p_0}[f(p)+g(p)]=A+B.$$

必须注意,这里的三个极限中,p 必须在同一个点集上变动趋于 p_0,否则是荒谬的.

3. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 是否一样,后者是前者的特殊情况吗?

答　不一样,不是.

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 称为**二重极限**.动点 (x,y) 在定义域内以任何可能的方式和途径趋于 (x_0,y_0), $f(x,y)$ 都趋于同一值 A 时,二重极限存在,否则不存在.

极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 称为**累次极限**,它的含义是在点 (x_0,y_0) 的某邻域内,首先对每个固定的 y,考察 x 的一元函数 $f(x,y)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限,若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$,再令 $y\to y_0$,考察 $g(y)$ 的极限,若 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$,则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

如果第一步 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 极限不存在,这个累次极限就不存在,它与二重极限存在与否无关.即使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$,由于 $g(y)$ 未必等于 $f(x_0,y)$(还可能 $f(x_0,y)$ 无意义),所以

$$\lim_{y\to y_0} g(y),\quad \lim_{y\to y_0} f(x_0,y)$$

未必一致.

【例】　设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则因为

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=1\quad (y\neq 0).$$

所以有累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=1.$$

但是,二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

显然不存在.

【例】　设 $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$,由于

$$\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\quad (y\neq 0)$$

不存在,所以累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.但是,二重极限