網絡圖論及其应用

（上）

習题解

东北电工理论学会

1984

本书是陈树柏，左垲、张良震等编著的《网络图论及其应用》（科学出版社，1982年版）一书的习题解答。这本解答是中国科技大学研究生院于一九八二年在北京举办网络图论暑假讲习班期间由北京研究生院左垲教授提议，经十几所高等院校的代表共同倡议编写的。之后在东北电工理论学会积极组织下，并得到东北重型机械学院，安徽大学、贵洲工学院、东北电力学院、齐齐哈尔铁路职工大学的协作，在八三年内完成了习题的演算工作。

近几年来，全国不少大专院校相继为研究生或大学本科开设了网络图论选修课。尽管各校所用教学大纲，讲授专业对象以及学时和教材不尽相同，但基本内容大体包括图的基本知识，图的常见算法，图的拓扑分析以及图论其他应用。这本习题解答对上述内容是基本对应的。其中编程部分因语言、机型不一样而暂略。

图论的应用在近二十年来发展极为迅速。凡是包含某种二元关系的系统都可以用图论方法来模拟和分析。因此图论对通讯系统，电力系统、集成电路、计算机网络、运筹学、应用数学、交通运输、城乡规划、企业管理以及其他专业或学科都有关联。

为此出版这本解答，不仅有利于教学，而且将直接或间接对开展图论科研和推广图论应用起到一定作用。

由于我们水平有限，时间仓促未经统一校核，错误一定很多，为不使错误波及面太大，所以不宜发行过多，因此这一稿算做征求意见稿所订单位只能部分供应。请各单位在使用过程所发现的错误寄给东北重型机械学院刘玉锋处，以备下版更正。版本没有任何补贴，虽然只收成本费、价格仍然很高，请读者能谅解。

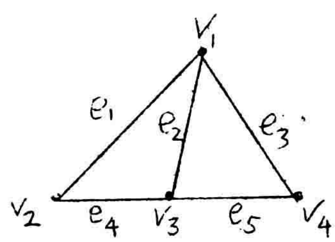
东北电工理论学会

目　　录

第　一　章

※1—1　试用通俗的语言，说明边、顶点、邻接点、无向图、简单图、子图、真子图等术语，并举出图例。

首先，必须弄清楚什么是图。简单地讲，图是由点集合和边集合组成的二元集合，且边集合的元素一定是由两个相异点（特例：是由一个点构成的边叫自环）连线组成。例如图1—1（a）和图1—1（b）都是一个图。图的符号是G，它的表示式为：$G=\{V(G)、E(G)\}$。

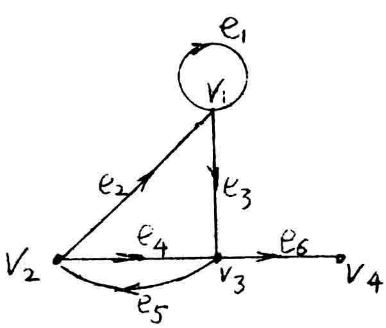


$G_1=\{V(G_1)、E(G_1)\}$

$V(G_1)=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$

$E(G_1)=\{e_1、e_2、e_3、e_4、e_5\}$

图1-1（a）图G_1



$G_2=\{V(G_2)、E(G_2)\}$

$V(G_2)=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$

$E(G_2)=\{e_1、e_2、e_3、e_4、e_5、e_6\}$

图1-1（b）图G_2

边：图中每一条线段叫做边。例图1-1（a）中的线段e_1、e_2、e_3、e_4、e_5为图G_1的边

顶点：图中的每一个点叫顶点。例图1-1（a）中的点V_1、V_2、V_3、V_4为图G_1的顶点。

邻接点：凡是图中与同一条边相连的两个点，称为邻接点，例图 1—1（a）。

中：V_1 与 V_2，V_1 与 V_3，V_1 与 V_4 都称为邻接点，而 V_2 与 V_4 则为不邻接点。

无向图：由上述知道，边是由相异两点连接而成，如果边的组成与两个点的先后顺序无关，即 $e(V_i, V_j) = e(V_j, V_i)$，则称为无向边，由无向边组成的图为无向图，如图 1－1（a）为无向图，而图 1－1（b）为有向图。

简单图：不包含自环和并行边的图，称为简单图。例图 1－1（a）为简单图，而图 1－1（b）为非简单图。

自环：它是一种特殊边，即所连接的两个顶点重合为一点，该边叫自环。例图 1—1（b）中的边 e_1 为自环。

并行边：连接相同的两个顶点的边称为并行边。（或全部）

子　图：简单讲，如果图 G_s 仅仅为图 G 中之任意部分组成，则 G_s 就是 G 的子图。严格说来，由 V（G）的子集 $V(G_s)$ 和 E(G) 的子集 $E(G_s)$ 构成的图 $G_s = \{V(G_s), E(G_s)\}$ 称为图 G 的子图，例如图 1－1（c）、1－1（d）都是图 1－1（a）的子图。

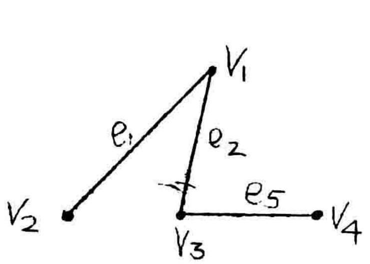


图 1—1（c）

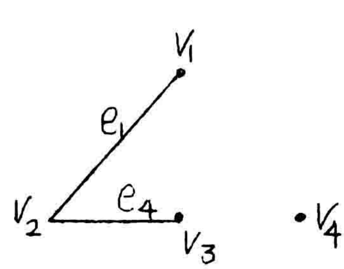


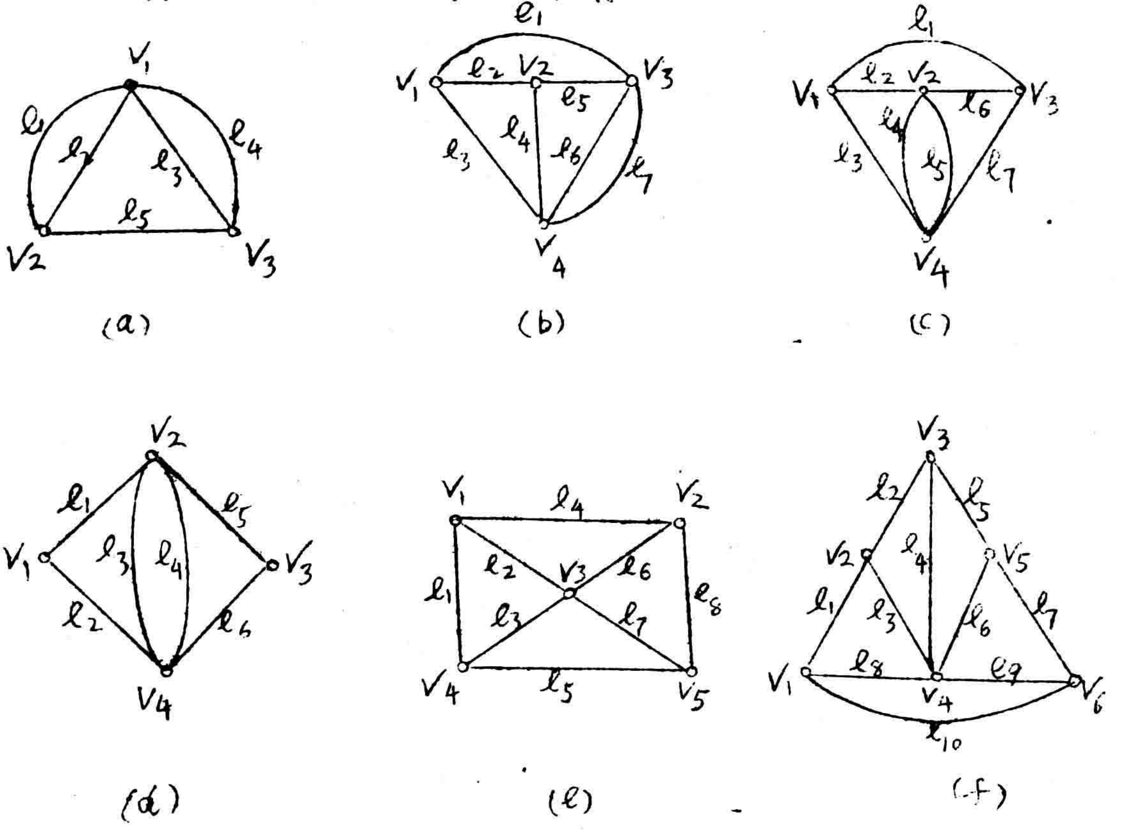
图 1－1（d）

真子图：图G_S仅为图G的某部分构成，而不是全部，则称为真子

图，例图1－1（C）和图1－1（d）都为图1－1（a）

的真子图，而图G本身可称为最大子图，而不是真子图。

1－2 列出图P1－2所示各图的所有回路



图P1－2

解：

（a）共有6个回路，分别为：（1，2）、（3、4）、（1，3，5）、

（1，4，5）、（2，3，5）、（2，4，5）

（b）共有12个回路，分别为：（6，7），（1，2，5）、（2、3、4）、

（4、5、6）、（4，5，7）、

（1，3，6）、（1，3，7）、（1，3，4，5）

（1，2，4，6）、（2，3，5，6）、

（2，3，5，7）、（1，2，4，7）

（c）共有12回路，分别为：(4，5)、(1，2，6)、(2、3、4)、

(5、6、7)、(2，3，5)(4，6，7)、

(1，3，)、(1，，3，4，6)(1，2，5，7)

(1，2，4，7)、(2，3，6，7)、

(1，3，5，6)

（d）共有6个回路分别为：(3，4)、(1，2，3)、(1，2，4)、

(3，5，6)、(4，5，6)、(1，2，5，6)

（e）共有B个回路，分别为：(1，2，3)、(2，4，6)、(6，7、8)

(3，5，7)、(1，3，4，6)、

(1，2，5，7)、(3，5，6，8)

(2，4，7，8)、(1，5，6，4，7)

(1，5，8，4)、(1，3，4，7，8)、

(1，2，5，6，8)、(2，3，4，5，8)

（f）共有21个回路，分别为：(1，3，8)、(2、3，4)、(4，5，6)、

(6，7，9)、(8，9，10)、(1，2，4，8)、

(1，3，9、10)、(2，3，5，6)、

(4，5，7，9)、(6，7，8，10)、

(1，2，4，9，10)、(1，3，5，7，10)、

(4，5，7，8，10)、(2，3，5，7，9)、

(1，2，5，6，8)、(1，2，5，7，10)、

(1，2，4，6，7，10)、(1，3，4，5，7，10)，(2，3，5，7，8，10)、

(1，2，5，7，8，9)、(1，2，5，6，9，10)

1－3 列出图P1－2所示各图的所有的树

（a）共有8个树，为：(1，3)、(2，4)、(1，4)、(2，5)、(1，5)、(3，5)、(2，3)(4，5)

（b）共有24个树，为：(1，2，3)、(1，2，4)、(1，2，6)、(1，2，7)、(1，3，4)、(1，3，5)、(1，4，5)、(1，4，6)、(1，4，7)(1，5，6)、(1，5，7)、(2，3，5)、(2，3，6)、(2，3，7)、(2，4，5)、(2，4，6)、(2，4，7)、(2，5，6)、(2，5，7)、(3，4，5)、(3，4，6)、(3，4，7)、(3，5，6)、(3，5，7)

（c）共有24个树，为：(1，2，3)、(1，2，4)、(1，2，5)(1，2，7)、(1，3，4)、(1，3，5)、(1，3，6)、(1，4，6)、(1，4，7)、(1，5，6)、(1，5，7)、(1，6，7)、(2，3，6)、(2，3，7)、(2，4，6)、(2，4，7)、(2，5，6)，(2，5，7)(2，6，7)、(3，4，6)、(3，4，7)、(3，5，6)、(3，5，7)、(3，6，7)。

（d）共有12个树，为：(1，2，5)、(1，2，6)、(1，3，5)、(1，3，6)、(1，4，5)、(1，4，6)、(1，5，6)、(2，3，5)、(2，3，6)、(2，4，5)、(2，4，6)、(2，5，6)。

（e）共有45个树，为：(1，2，4，5)、(1，2，4，7)、(1，2，4，8)、(1，2，5，6)、(1，2，5，8)、(1，2，6，7)、(1，2，6，8)、(1，2，7，8)、(1，3，4，5)、(1，3，4，7)、(1，3，4，8)、(1，3，5，6)、(1，3，5，8)、(1，3，6，7)、(1，3，6，8)、(1，3，7，8)、(1，4，5，6)、(1，4，5，7)、(1，4，6，7)、(1，4，6，8)、(1，4，7，8)、(1，5，6，7)、(1，5，6，8)、(1，5，7，8)、(2，3，4，5)、(2，3，4，7)、

(2，3，4，8)，
(2，3，5，6)，(2，3，5，8)，(2，3，6，7)，(2，3，6，8)，
(2，3，7，8)，(2，4，5，7)，(2，4，5，8)，(2，5，6，7)，
(2，5，6，8)，(2，5，7，8)，(3，4，5，6)，(3，4，5，8)，
(3，4，6，7)，(3，4，6，8)，(3，4，7，8)，(4，5，6，7)，
(4，5，6，8)，(4，5，7，8)。

(*f*)共有122个树，分别为：

(1，2，3，5，7)，(1，2，3，5，9)，(1，2，3，5，10)，
(1，2，3，6，7)，(1，2，3，6，9)，(1，2，3，6，10)，
(1，2，3，7，9)，(1，2，3，7，10)，(1，2，4，5，7)，
(1，2，5，6，9)，(1，2，4，5，10)，(1，2，4，6，7)，
(1，2，4，6，9)，(1，2，4，6，10)，(1，2，4，7，9)，
(1，2，4，7，10)，(1，2，5，6，7)，(1，2，5，6，9)，
(1，2，5，6，10)，(1，2，5，7，8)，(1，2，5，7，9)，
(1，2，5，8，9)，(1，2，5，8，10)，(1，2，5，9，10)，
(1，2，6，7，8)，(1，2，6，7，10)，(1，2，6，8，9)，
(1，2，6，8，10)，(1，2，6，9，10)，(1，2，7，8，9)，
(1，2，7，8，10)，(1，2，7，9，10)，(1，3，4，5，7)，
(1，3，4，5，9)，(1，3，4，5，10)，(1，3，4，6，7)，
(1，3，4，6，9)，(1，3，4，6，10)，(1，3，4，7，9)，
(1，3，4，7，10)，(1，3，5，6，7)，(1，3，5，6，9)，
(1，3，5，6，10)，(1，3，5，7，9)，(1，3，5，7，10)，
(1，4，5，7，8)，(1，4，5，7，10)，(1，4，5，8，9)，
(1，4，5，8，10)，(1，4，5，9，10)，(1，4，6，7，8)，

(1，4，6，7，10)、(1，4，6，8，9)、(1，4，6，8，10)、
(1，4，6，9，10)、(1，4，7，8，9)、(1，4，7，8，10)、
(1，4，7，9，10)、(1，5，6，7，8)、(1，5，6，7，10)、
(1，5，6，8，9)、(1，5，6，8，10)、(1，5，6，9，10)、
(1，5，7，8，9)、(1，5，7，8，10)、(1，5，7，9，10)、
(2，3，5，7，8)、(2，3，5，7，10)、(2，3，5，8，9)、
(2，3，5，8，10)、(2，3，5，9，10)、(2，3，6，7，8)、
(2，3，6，7，10)、(2，3，6，8，9)、(2，3，6，8，10)、
(2，3，6，9，10)、(2，3，7，8，9)、(2，3，7，8，10)、
(2，3，7，9，10)、(2，4，5，7，8)、(2，4，5，7，10)、
(2，4，5，8，9)、(2，4，5，8，10)、(2，4，5，9，10)、
(2，4，6，7，8)、(2，4，6，7，10)、(2，4，6，8，9)、
(2，4，6，8，10)、(2，4，6，9，10)、(2，4，7，8，9)、
(2，4，7，8，10)、(2，4，7，9，10)、(2，5，6，7，8)、
(2，5，6，7，10)、(2，5，6，8，9)、(2，5，6，8，10)、
(2，5，6，9，10)、(2，5，7，8，9)、(2，5，7，8，10)、
(2，5，7，9，10)、(3，4，5，7，8)、(3，4，5，7，10)、
(3，4，5，8，9)、(3，4，5，8，10)、(3，4，5，9，10)、
(3，4，6，7，8)、(3，4，6，7，10)、(3，4，6，8，9)、
(3，4，6，8，10)、(3，4，6，9，10)、(3，4，7，8，9)、
(3，4，7，8，10)、(3，4，7，9，10)、(3，5，6，7，8)、
(3，5，6，7，10)、(3，5，6，8，9)、(3，5，6，8，10)、
(3，5，6，9，10)、(3，5，7，8，9)、(3，5，7，8，10)、
(3，5，7，9，10)、(4，5，7，8，10)。

1 —4 具有V个顶点和e条边的连通图G的树T有下述性质：

（a）包含图G中所有顶点

（b）不包含回路

（C）含有V－1条边

试证明：由其中任何两条性质，可以导出第三条特性

证明：

1. 由性质（a）、（b）可以导出（C）：

据性质（a）、（b），T既然包含图G中所有顶点，且不包含回路，所以所有顶点的连接必须不形成回路，而任意两点之间必须存在一条路径，则对具有V个顶点的连通图G的T来说，只有含有V－1条边，否则如果再少一条边，T将不连通再多一条边，T将形成回路。

2、由性质（a）、（C），可以导出（b）：

据性质（a）、（C）。T包含图G中所有顶点，并只含有V-1条边，因为要连通V个顶点的最少边数是V—1条，这样必然不包含回路，否则如果包含了回路，就不能包含所有顶点。

3. 由性质（b）、（C）。可以导出（a）：

据性质（b）、（C），T不包含回路，仅含V－1条边，欲使T不包含回路，必然使任意两点之间仅存在一条路径，又知T仅含V－1条边，因两点之间只能连接一条边，所以包含V－1条边的T必然包含了（V－1）＋1＝V个顶点，即包含了图G中所有顶点。

1 —4 具有v个顶点和e条边的连通图G的树T，有下述性质：

（a）包含图G中所有顶点；

（b）不包含回路

（C）含有v－1条边

试证明：由其中任何两条性质，可以导出第三条性质

证明：i）由（a）、（b）推出（c）。

若v个顶点，e条边的连通图G的树T有下面两条性质：（a）包含图G中的所有顶点，（b）不包含回路，则说明T是连道，且任意两点间必有且仅有一条通路（否则包含回路）。但是，若将v个顶点连通至少需要$v-1$条边（否则不是连通图）。但最多边只能有$v-1$条边，否则会出现回路与性质（b）矛盾。故由（a）、（b）推得（c）。

ii）由（a）、（c），推出（b），

若v个顶点e条边的连通图G的树T具有（a）、（c）两条性质，则说明子图T为连通的具有$v-1$条边。但如果子图中包含有回路且又是连通时，则边数必定大于$v-1$条边与性质（c）矛盾，故由（a）、（c）推得（b）。

iii）由（b）、（c）推得（a）。

v个顶点e条边的连通图G的树T有（b）、（c）两条性质，则不含回路的$v-1$条边一定连接图G的所有顶点，否则会出现在一个连通片上顶点数与边数相等的情况，即有回路出现与性质（b）矛盾。故由性质（b）、（c）推得（a）。

1—5 试提出一系统方法，列出图G中所有树，并说明你提的方法是否简便。

解：略

※1－6（a）含有G_s的G的一个树存在的充要条件是：

该子图必须包含图G的所有顶点，而没有回路，并且边数一定为$V-1$条。而$V-1$条边中一定包含G_s的所有边

1. G_s的边数$\leq V-1$

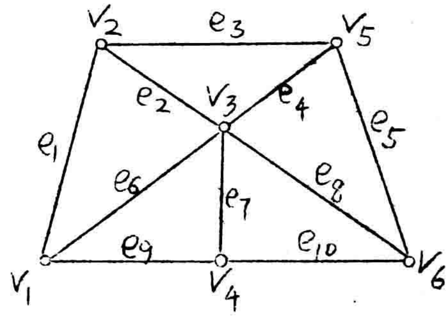
2. G_s不含有回路。 > 亦即G_s应为一棵树！

1－6 设G_s是连通图G的一个子图

（a）说明含有G_s的G的一个树存在的充要条件

（b）提出一个能列出含有G_s的所有树的算法。

（c）应用（b）中所提算法，找出图P1－6中含有边e_1和e_2的所有树。



图P1－6

解：※（a）含有G s的G的一个树存在的充要条件是：

G的子图G_s必须包含G的所有顶点，并且没有回路；则树是包含图G的所有顶点 V 而不包含回路，且由V－1条边组成，即G_s必然包含在V－1条边中。

（b）因为一个树的边数是V－1条，假设图G有e条边，可能产生树的总数是

$$C_e^{V-1}=\frac{e(e-1)(e-2)\cdots(e-V+2)}{(V-1)(V-2)\cdots\cdots1}$$

从C_e^{V-1}中挑出含有G_s的组合，并从中删除不是树的组合，其余即是含有G_s的所有树

（c）在图P－6中， V＝6　　e＝1τ

$$\therefore\ C_{10}^{6-1}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252$$

×12345,	×12356,	×12368,	12389,	12459,	12478,
×12346,	12357,	×12369,	123810,	124510,	×12479,
×12347,	×12358,	×123610,	123910,	×12467,	124710,
×12348,	12359,	12378,	×12456,	×12468,	12489,
×12349,	123510,	×12379,	12457,	×12469,	124810,
×123410,	×12367,	123710,	×12458,	×124610,	124910,
×12567,		×12579	125910,	×12689,	×127910,
×12568,		125710,	×12678,	×126810,	×128910,
×12569,		12589,	×12679,	×12789,	
×125610,	12578,	125810,	×126710,	×127810	

上列表中打×者表示不是树的边组合，所以含有e_1，e_2的所有树为：

12357	123710	12457	124710	12578	125910
12359	12389	12459	12489	125710	
123510	123810	124510	124810	12589	
12378	123910	12478	124910	125810	

1－7 具有V个顶点的连通图G，若其任一对顶点之间均有一条边，则此图是一完备图，试求：

（a）边的总数；

（b）树的总数；

（c）所有的回路数。

※

解：（a）设V是完备图G的顶点数，因其任一对顶点之间均有一条边，则边的总数应为：$\frac{V(V-1)}{2}=C_V^2=\frac{V!}{(V-2)!2}=\frac{V(V-1)}{2}$

或为：$\sum_{n=2}^{V-1}(V-n)=(V-1)+(V-2)+\cdots+2+1=\frac{V(V-1)}{2}$

组合数

（b）因在完备图中有V个星树，所以树的总树是：

$$det(A\cdot A^{T})$$

其中A为关联子矩阵

1—7（a）设V是完备图G的顶点数，因其任一对顶点间均有一条边，即在顶点V_i上必有（V－1）条边分别连向（V－1）个其它顶点，则图G的顶点度数为$\Sigma d(V_i)=V(V-1)$，∴ G的边数为

$$e=\frac{1}{2}\Sigma d(V_i)=\frac{1}{2}V(V-1)$$

1—7（a）因为V个顶点中，任意二个顶点间均有且仅有一条边，那么对于顶点V_1，它与其余顶点邻接的边数为$V-1=V'$。而对于顶点V_2，它与其余顶点邻接的边数（除掉与V_1邻接的边）应为：$(V'-1)$，对于顶点V_3，（除去与V_1，V_2邻接的边），它与其余顶点邻接的边数为$(V'-2)$，以此类推，对于顶点V_{V-1}，（除掉与V_1，V_2，……V_{V-2}邻接的边），与其邻接的边数为$(V'-V-2)=1$，而此时与顶点V 关联的V－1条边都已计入不应再计。故边总数为

$$
\begin{aligned}
e_N &= V'+(V'-1)+(V'-2)+\cdots+1 \\
&= (V-1)+(V-2)+(V-3)+\cdots+1 \\
&= \sum_{n=1}^{V-1}(V-n)
\end{aligned}
$$

1-7参阅

证：V阶完备图的树数为$N_T = V^{V-2}$

据比耐——柯西定理

$N_T = det\{A \cdot A^T\}$ 其中A为该完备图的任一对应有向图的关联子矩阵。

令$|AA^T| = M = (m_{ij})_{(V-1)\times(V-1)}$

则

$$m_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j \end{cases}$$

$d(V_i)$为V_i顶点的度数（对于完备图有$d(V_i)=V-1$

这是因为，当$i=j$时，相当于A中的第i行的行向量与该行向量的转置乘积，所以这时

$m_{ii} = d(V_i)$ 即为与该顶点关联的边数。即为该顶点的度数。

当$i \neq j$时，m_{ij} 为A阵的第i行与第j行的转置乘积（即为A的第i行和A的第j行对应元素乘积之和）因为完备图中任意两点间都有一条边且仅有一条边，亦即任二顶点有且仅有一条公共关联边，对于有向图（对应于该完备图）。若离开一个，必指向另一个，反之亦然，故对应A的元素，一个为“+1”。另一必为“-1”，反之亦然，但乘积总为“-1”。（但A的i行和A的j行有且仅有一对对应非零元素，因为只有一条公共边！）所以$m_{ij}=-1$。

从而有：

$$M=(m_{ij})_{(V-1)\times(V-1)}=\begin{pmatrix} V-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & V-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & V-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & V-1 \end{pmatrix}_{(V-1)\times(V-1)}$$

对M阵做初等行变换，将最下面的一行乘以（－1）加至上面的各行：有

$$M=\begin{vmatrix} V & 0 & 0 & \cdots & -V \\ 0 & V & 0 & \cdots & -V \\ 0 & 0 & V & \cdots & -V \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & V-1 \end{vmatrix}$$

按最下面一行元素展开求M＝？