



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

BARBIER THEOREM

Barbier定理

刘培杰数学工作室 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金项目

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

BARBIER THEOREM

Barbier 定理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分五编,主要包括凸性,Barbier 定理,积分几何里的凸集,其他领域的问题,应用两例等内容,书中配有相关例题以供读者学习理解。

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

Barbier 定理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017. 8

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6698-2

I. ①B… II. ①刘… III. ①定理(数学) IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147265 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 穆 青

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 22.25 字数 241 千字

版 次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6698-2

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

●
目
录

第一编 凸性 // 1

第 1 章 凸性 // 3

第 2 章 海莱定理 // 32

第 3 章 覆盖定理 // 44

第 4 章 空间的凸集 // 58

第 5 章 若干涉及凸图形与凸子集的
初等问题 // 68

第 6 章 凸与非凸的多边形 // 71

第二编 Barbier 定理 // 109

第 7 章 等宽度曲线 // 111

第 8 章 等宽度曲线的基本性质 // 120

第 9 章 Barbier 定理 // 129

第三编 积分几何里的凸集 // 137

第 10 章 引言 // 139

第 11 章 直线族的包络 // 141

第 12 章 Minkowski 混合面积 // 144

第 13 章 一些特殊凸集 // 148

第 14 章 么球面面积与么球体体积 // 153

第 15 章 注记与练习 // 154

第四编 其他领域的问题 //157

第16章 关于平面19一点集的空凸分划问题 //159

第17章 平面的凸曲线 //171

第18章 超曲面上极小与极小凸点的分布 //178

第19章 什么是拟凸域 //188

第20章 无限维空间中凸集的端点 //195

第21章 三维空间中的有界凸域和拟球 //228

第22章 曲率的逐点估计 //240

第五编 应用两例 //247

第23章 凸轮计算 //249

第24章 (γ, α) 型广义强凸性 //262

第六编 泛函中的凸集 //275

第25章 引言——一个普特南试题 //277

第26章 凸集及其性质 //280

第27章 闵可夫斯基泛函 //292

第28章 闵可夫斯基泛函的一个应用——非零连续
线性泛函的存在性 //302

第29章 凸集分离定理 //317

附录 美国大学生数学竞赛中几个有关凸集的 试题 //335

第一编

凸 性



凸 性

第

1

章

这一章讨论图形的一些基本知识：有界、闭、凸、直径，还要说明有界闭凸图形的一个特征.

§ 0 引言 —— 从一道罗马尼亚大师杯数学竞赛试题谈起

南报网讯(记者 钱红艳) 罗马尼亚大师杯数学竞赛是中学生数学奥林匹克竞赛中难度最高的一项赛事. 记者了解到, 在该项赛事中, 以南京外国语学校丁力煌、高轶寒、朱心一为主力的国家队选手获得团体总分第三的佳绩, 其中丁力煌以全场唯一满分 42 分斩获金牌.

罗马尼亚大师杯数学竞赛是由罗马尼亚数学会主办的国际邀请赛, 仅邀请在国际数学奥林匹克竞赛中成绩突出

的中国、俄罗斯、美国与其周边的一些欧洲国家组队参加,被称为是中学生数学奥林匹克竞赛中难度最高的一项赛事,也是我国以国家队名义组队参赛的 3 项中学生数学国际赛事之一. 每年全国数学竞赛冬令营中团体第一、第二的省份可以组队参赛. 此前,江苏省代表队在 2016 年全国数学冬令营中取得团体第二的成绩,因此今年代表国家队参赛.

比赛于 2 月 22 日至 27 日在罗马尼亚首都布加勒斯特举行. 南京外国语学校高三(1)班的丁力煌、高轶寒、高二(1)班的朱心一是国家队主力队员. 队员丁力煌介绍,全队比赛历时两天,每天考 3 题,比赛时间为 4 小时 30 分钟,题目涉及代数、数论、组合、几何等多方面的知识,平均每解答一题都在 1 小时以上,其中有一题思考加解答整整花了 2 小时 30 分钟,最终他以全场唯一满分 42 分获得金牌,另外高轶寒和朱心一分别以 23 分、20 分夺得铜牌,而中国代表队则获得全体总分第三的成绩.

试题 设 P, P' 是平面有界域上相交的两个凸四边形区域, O 为它们相交区域上的一点, 假设对任意一条经过 O 的直线在区域 P 中截得的线段比在区域 P' 中截得的线段长. 问: 是否有这样的可能区域 P' 的面积与区域 P 的面积比大于 1.9?

(第 6 届罗马尼亚大师杯数学奥林匹克试题)

解 答案是肯定的. 对任意 $\epsilon > 0$, 我们可以得到区域 P' 的面积与区域 P 的面积比大于 $2 - \epsilon$.

构造如下: 设 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, A', B', C' 分别为 A, B, C 关于 O 的反射点. 注意到 l 为过 O 的任一除直线 AC 外的直线, 则 $l \cap ABCD$ 与 $l \cap A'B'C'$

长度相等,再在 $B'A'$, $B'C'$ 上分别取 M , N 适合

$$\frac{B'M}{B'A'} = \frac{B'N}{B'C'} = \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

P' 取为以 O 为顶点的凸四边形 $B'MON$ 位似比为 $\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ 的图形,则满足区域 P' 的面积与区域 P 的面积比大于 $2 - \frac{\epsilon}{2}$.

在本题的解答中似乎并没有用到凸区域的特殊性,但是如果将本题的已知条件中 P 或 P' 这两个凸四边形区域之一改为凹区域,则易举出反例.所以凸是个本质性的条件.它有点像空气,有了觉不出,没有就不行!

在中学生甚至大学生所能接触到的科普小册子中,有一本写得非常好,那就是庄亚栋先生早年间写的一本叫《凸图形》的红皮小册子.中国的数学科普有两次高潮,一次是 20 世纪五六十年代,中国全面学习苏联,出版了大量类似于苏联青年数学小丛书的小册子.许多顶级大家亲自上阵,仅华罗庚先生一人就写了三本.其他的大数学家也悉数其间.但在这次普及中所涉及的均为传统的经典内容,是突出由高到低的风格.

第二次高潮出现在 20 世纪 80 年代,那是个全民读书的年代.

作家马建曾回忆说:80 年代最好的感觉让我怀念就是看书,你知道,那个时候你到别人家里去,你不看书就没法谈话.手里不拿着本书,你就不是个人!

那个时期的作者中多是以高校的中青年教师为主,除了单增先生特别高产外,其余的老师大多是一两本的样子.庄亚栋先生应该是除了翻译了几本小册子

外,写的唯一一本就是《凸图形》,为了向那个时代致敬,本书前面先引了几大段.

英国 ACC 出版集团总裁保罗·莱瑟姆曾指出:我时常思考,世界上的人那么多,真正想要买书的、需要买书的、能够买书的人貌似并没有那么多.

其实庄先生真正的大量读者是两本译著的读者.一本是弗列明的《多元分析》,另一本是名著——George Pólya 和 Gabor Szego 合著的《分析中的定理与问题》,居高临下写起小册子当然是得心应手.

§ 1 有界图形

所谓平面图形,就是指平面上一些点的集合.有限或无限个点、线段、直线、整个平面以及它的一部分——半平面、角形、带形、多边形等,都是平面图形.本书只谈平面图形,因此简称为图形.

图形分为有界图形和无界图形.所谓有界图形,就是指能被某一个正方形(或圆)覆盖的图形.否则就叫无界图形.图 1 中,(a)(d)(e)(f) 是有界图形,另四个是无界图形(图 1(h) 表示全平面中去掉由虚线表示的一条射线得到的图形).

不要把有界图形与直观上有边界的图形混淆起来.角形有两条射线作边界,带形有两条直线作边界,但它们都是无界图形.有限个点形成的图形是有界图形,但却没有一条线段作边界.所以,判断图形是否有界要从定义出发,与图形有没有边界无关.粗糙地说,“有界”“无界”中的“界”是“界限”的界,不是边界的界.

