现代数学基础丛书·典藏版 123

反应扩散方程引论

（第二版）

叶其孝　李正元
王明新　吴雅萍　著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 123

反应扩散方程引论

（第二版）

叶其孝 李正元 王明新 吴雅萍 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

在物理学、化学、生物学、经济学及各种工程问题中提出的大量反应扩散问题，日益受到人们的重视. 本书详细阐述了与这些问题有关的数学理论、方法及其应用，论证严谨，深入浅出，有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去. 每章末附有大量习题，有助于读者深入理解本书的内容.

本书可作为高等院校数学、应用数学或其他有关专业的大学生、研究生的教材或教师的教学参考书，也可供相关研究领域的科研人员和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础丛书：典藏版. 第 3 辑 / 杨乐主编. —北京：科学出版社，2015.5

ISBN 978-7-03-044411-0

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学-丛书 Ⅳ. ①O1-51

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 111256 号

责任编辑：赵彦超 徐园园 / 责任校对：钟 洋

责任印制：徐晓晨 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 9 月第 二 版 开本：B5(720×1000)

2015 年 7 月 印 刷 印张：29 1/2

字数：567 000

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书第一版出版 20 多年来, 受到了许多读者的欢迎, 同时读者也提出了不少很好的建议, 其中包括出版修订的第二版. 同时在这期间反应扩散方程的研究也有了很大的进展, 因此我们决定修订本书.

本书第二版的修订主要是由王明新教授和吴雅萍教授完成的. 我们的原则是既保留第一版的格局, 尽可能使本书有一定的自封性, 能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去, 又尽可能地把最新的研究成果以适当的方式表述出来.

第二版最大的变化是增加了处理有关行波解的稳定性的理论和方法, 吴雅萍教授写了全新的第 10 章 “行波解稳定性的基本理论及谱方法的应用”, 相应地, 对原书的第 2, 9, 10 章 (第二版的第 1, 8, 9 章) 也做了较大幅度和细致的修改. 王明新教授对原书的第 1 章及 3—8 章 (第二版的附录和第 2—7 章) 进行了细致的修改, 并对全书做了通校.

对第二版中的修改内容作如下说明:

第 1 章新增了 1.4 节 “退化 Fisher 方程行波解的存在性”; 修改了定理 1.2.15 的叙述 (对应第一版的定理 2.2.15, 第一版中没有给出证明) 并给出详细证明 (在第 10 章将用到该定理的结果); 修改了 1.5 节的评注, 增加了关于两种奇异摄动法的介绍.

第 2 章的 2.3.2 节 “二阶线性椭圆算子的特征值问题” 做了较多的改动.

第 3 章新增 3.4 节 “方程组初边值问题常数平衡解的稳定性” 和习题 3.1.

第 5 章的 5.2 节新增了一个例子 (例 3).

第 6 章的评注中增加了 Turing 模式的介绍.

第 8 章新增 8.3 节 (含 8.3.1—8.3.3 节)“C_0 半群对应的线性与非线性方程的初值问题”; 新增了定理 8.2.8 (关于连续半群的指数衰减的充要条件); 新增了定理 8.4.13 (关于扇形算子更弱的判别条件) 并给出证明; 减弱了引理 8.4.12 的条件; 新增了注 8.1(强椭圆算子在 $L_\infty(\Omega), L_1(\Omega), C(\bar{\Omega})$ 空间中生成的半群); 新增了 8.9 节 “评注”(半群理论在更一般的二阶抛物方程组中的推广和应用); 新增了习题 8.12, 8.14, 删去了第一版习题 9.11, 9.12.

第 9 章增加了与连续半群有关的动力系统理论、线性化稳定性理论介绍, 修改了原来第 10 章的假设 (针对连续半群情形给出另外的假设 H1); 新增了注 5.1 和注 6.1; 修改了定理 9.6.1(增加连续半群情形的等价条件); 新增了定理 9.6.3 (连续半群

情形的线性化稳定性理论); 新增了定理 9.6.8 (减弱定理 9.6.7 的谱条件) 及相应的注 6.3.

许多读者对第一版第 1 章 “常微分方程准备知识” 反映很好, 我们决定保留, 但是为了不增加太多的篇幅, 去掉了所有的证明 (因为在一些经典的常微分方程教材中容易查到), 并作为附录放在第二版中, 以方便读者的使用.

第二版叙述更为严谨, 在正文的陈述或评述中反映了最新的研究成果、方法和参考文献, 改正了一些表述或印刷错误.

在本书 20 多年的教学实践和这次的修订中得到了许多读者非常有益的建议和帮助. 我们要特别感谢美国 Tulane 大学的王学锋教授, 他详细审阅了第二版初稿的第 1, 10 章和有关章节, 提出了非常中肯和具体的修改意见. 感谢加拿大 Alberta 大学的 Joseph So 教授、美国 Ohio 州立大学的楼元教授、兰州大学的李万同教授、东北师范大学的张凯军教授、北京工业大学的王术教授和北京交通大学的刘迎东副教授等提出的许多很好的修改意见.

由于我们水平有限, 书中会有一些错误和不当之处, 真诚地希望读者批评指正.

作　者

2011 年 5 月

第一版前言

本书是根据作者 1982 年以来在北京大学、郑州大学、武汉大学和山西大学等院校讲课的讲稿整理而成的. 它具有一定的自封性, 能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去.

现代科学技术的发展在很大程度上依赖于物理学、化学和生物学的成就和进展, 而这些学科自身的精确化又是它们取得进展的重要保证. 学科的精确化往往是通过建立数学模型来实现的, 而大量的数学模型可归纳为所谓的反应扩散方程.

近二十多年来反应扩散方程的研究日益受到重视. 这是因为反应扩散方程涉及的大量问题来自物理学、化学和生物学中众多的数学模型, 因而有强烈的实际背景; 另一方面, 在反应扩散方程的研究中, 对数学也提出了许多挑战性的问题, 因此正引起愈来愈多的数学家、物理学家、化学家、生物学家和工程师的注意.

1. *反应扩散方程及其基本问题*

通常在数学上把以下半线性抛物型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x,u)\Delta u + f(x,u,\mathrm{grad}\ u) \quad ((x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+) \tag{1}$$

称为反应扩散方程组, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n, m \geqslant 1, x = (x_1, \cdots, x_n), u = (u_1, \cdots, u_m)$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$,

$$\mathrm{grad}\ u = (\mathrm{grad}\ u_1, \cdots, \mathrm{grad}\ u_m), \quad \mathrm{grad}\ u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

$D(x,u) = (d_{ij}(x,u))(i,j = 1,2,\cdots,m)$. 根据不同的背景可以研究初值问题, 即 $\Omega = \mathbb{R}^n$, 满足初始条件

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{2}$$

也可以研究各种边值问题, 即 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, 满足边界条件

$$u = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Dirichlet 条件}) \tag{3}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Neumann 条件}) \tag{4}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Robin 条件}). \tag{5}$$

(1) 的与时间 t 无关的解满足

$$-D(x,u)\Delta u = f(x,u,\operatorname{grad} u) \quad (x\in\Omega). \tag{6}$$

把定常问题 (6), (3) 或 (6), (4) 或 (6), (5) (其中 $g(x,t)\equiv \bar{g}(x)=\lim\limits_{t\to\infty} g(x,t)$) 的解称为问题 (1), (2), (3) (或 (4) 或 (5)) 的平衡解或定态解. (1) 的空间均匀的解满足常微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{f}(u) \quad (f(x,u,\nabla u)\equiv \bar{f}(u)), \tag{7}$$

$$u(0)=u_0. \tag{8}$$

还可以研究 (1) 的行波解 $u(x,t)=u(x-c\,t)$(设 $n=1$).

由于 (6), (7) 是 (1) 的特殊形式, 因此也把 (1), (6), (7) 的耦合组称为反应扩散方程组.

(1) 中的 D 和 f 也可以依赖于 $t, D(x,u)\Delta u$ 也可以替换为非线性椭圆算子, 边界条件也可以是非线性的, f 也可以是一个泛函, 等等.

反应扩散方程研究中的基本问题是:

(i) (1) 的行波解的存在唯一性及稳定性;

(ii) (1) 的初值问题、初边值问题的整体解 (包括周期解和概周期解) 的存在唯一性及渐近性;

(iii) 平衡解的存在性, 尤其是当问题依赖于某些参数时平衡解的分叉结构, 以及平衡解的稳定性;

(iv) 当没有整体解时解在有限时间内的 “爆炸”(blow up) 问题, 以及解的其他性质, 例如, “熄灭区”(dead region) 问题;

(v) 计算方法问题; 解决 (i)—(iv) 中各种问题的计算问题有一些困难, 需要发展一些新的行之有效的计算方法.

2. *物理学、化学和生物学中提出的反应扩散方程例举*

正因为 (1), (6), (7) 的耦合组在很大程度上反映了 “扩散” 和 “反应” 的相互作用, 也反映了分量 u_i 之间的相互作用, 因而为许多实际问题的数学模型的建立提供了条件. 为说明反应扩散方程的各种实际背景, 这里仅列举若干例子, 简单起见, 只写出方程. 如不特别指出参考文献, 请参看 [Ye].

A. 半导体方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = q\mu_n \operatorname{div}(\alpha_n \operatorname{grad} n - n \operatorname{grad} V) - R_n(n,p), \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = q\mu_p \operatorname{div}(\alpha_p \operatorname{grad} p + p \operatorname{grad} V) - R_p(n,p), \\ \Delta V = -q(p-n+D), \end{cases} \tag{9}$$

其中 $D, q, \mu_n, \mu_p, \alpha_n, \alpha_p$ 是正常数, R_n, R_p 是给定的函数.

B. 燃烧方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = K_1 \Delta T + Q_n \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right), \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = K_2 \Delta n - n \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right). \end{cases} \tag{10}$$

C. Belousov-Zhabotinski 反应的 Noyes-Field 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Lrv + u(1 - u - rv), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Mv - buv; \end{cases} \tag{11}$$

Brusslator 方程 (见 [Ro])

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u + A - (B+1)u + u^2 v, \\ v_t = b\Delta v + Bu - u^2 v. \end{cases} \tag{12}$$

D. 神经传导的 Hodgkin-Huxley 方程

$$u_t = u_{xx} + I(u, w_1, w_2, \cdots, w_k),$$

$$w_{it} = \sum_{t=1}^{k} p_{ij}(u) w_t + q_i(u) \quad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{13}$$

E. 酶的数学模型

$$\begin{aligned} s_t &= \Delta s - R(s, a) + (s_0 - s), \\ a_t &= \beta \Delta a + [R(s, a) - d(a_0 - a)], \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$R(s, a) = \frac{\rho a s}{1 + |s| + k s^2}.$$

F. 生态方程 (群体增长、传染病、病虫害等)

$$u_t = \Delta u + uM(u, v) + \int_0^t F(u(x, s), v(x, s)) \mathrm{d}s,$$

$$v_t = \Delta v + uN(u, v) + \int_0^t G(u(x, s), v(x, s)) \mathrm{d}s. \tag{15}$$

其他方程, 如渗流方程、超导方程、液晶方程、反应器动力学方程; 各种生物现象中提出的众多数学模型; 医学中提出的各种方程; 传热以及污染问题中出现的对流扩散方程等, 在此不一一列举了. 其中许多方程组比 (9)—(15) 更为复杂.

3. 本书内容的安排

反应扩散方程的研究涉及面很广，就一本书而言是不可能面面俱到的. 根据我们的教学和研究工作的经验，抓住主要问题和基本方法是入门的关键，掌握住这一点，在阅读进一步的文献和做研究工作时都会获益匪浅. 本书各章的内容就是尽可能按这种思想来安排的.

由于在反应扩散方程的研究中用到的方法，许多是常微分方程理论中的方法，或是受启发于这种方法，或是常微方法和偏微方法的结合，因此我们把可能要用到的有关常微分方程的知识集中罗列在第 1 章中 (大多数没有证明)，以保持本书在某种意义下的自封性.

第 2 章主要讨论单个方程行波解的存在唯一性，所用的方法是相平面方法 (这是一个标准的一般性方法). 我们既讨论了单调有界非常数行波解 (即波前解) 的存在唯一性，也讨论了非单调 (甚至振动) 行波解的存在性. 由于篇幅有限，关于方程组行波解的讨论只好在本章末的评注中简要地加以叙述，并且我们只叙述有关方法和结果并尽可能列出最新进展的有关文献. 关于行波解的稳定性这一重要问题也只在评注中加以简要叙述.

在研究一些具体的反应扩散方程整体解及平衡解的存在性以及平衡解的稳定性时，上、下解方法 (或称单调方法) 是一个很有效的方法. 第 3 章给出了单个方程上、下解方法的有关理论的完整叙述，并给出了它的一些应用. 在本章中还罗列了本书中将用到的最大值原理、椭圆型及抛物型方程的先验估计及有关的存在唯一性定理. 本章还系统阐述了以后要经常用到的椭圆边值问题的特征值理论.

第 4 章主要讨论单个方程平衡解的稳定性问题，所讲述的方法是有普遍意义的，在讨论方程组的平衡解的稳定性时也是有参考价值的.

第 5 章专门讨论方程组的上、下解方法. 除了揭示它与单个方程的上、下解方法的不同外，还分别讨论了拟增 (减)、混拟、非拟单调情形反应扩散方程组的控制问题的引入以及上、下解的定义，由此证明了解的存在定理; 本章还对椭圆组讨论了上、下解方法，并用上、下解方法研究非常数平衡解的稳定性.

方程组的最大值原理一般不成立，因而不能用它去得到解本身的最大模估计，从而给用 Schauder 不动点理论等方法证明解的存在性带来了巨大的困难. 受启发于常微分方程的反应扩散方程组不变区域理论的出现和发展，在某种程度上给出了解本身的最大模估计. 第 6 章论述了不变区域的本质，也指出了应用不变区域理论的困难所在.

平衡解的存在性以及当问题依赖于某些参数时平衡解关于参数的分叉结构是一个极其重要的问题，第 7, 8 两章专门讨论这个问题. 度理论已成为研究非线性问题中不可缺少的拓扑工具，第 7 章就是度理论在反应扩散方程中的应用. 首先我们

以较短的篇幅论述度理论的概要, 包括度的定义、性质与计算, 力求深入浅出, 既直观又准确. 然后论述度理论的应用, 利用度理论并将其与上、下解方法相结合讨论椭圆型边值问题的多解问题以及椭圆型方程和常微分方程的分叉问题. 通过解决几类典型问题, 尽可能使读者了解到问题的全貌. 第 8 章涉及常微分方程的二阶保守系统的边值问题, 当空间变量是一维时, 它是一类反应扩散方程的平衡解方程. 在这一章论述利用相图法讨论二阶保守系统边值问题解的存在性与解的个数的一般原理与步骤, 并给出了 Chafee 和 Infante 的一个例子, 利用相图法可以得到平衡解的全局与完整的分叉结构.

抛物型方程组的初值和初边值问题, 常常可看成是适当的 Banach 空间中的一个抽象常微方程的初值问题, 而第 9 章的半群方法正是解决这一问题的有效方法. 但是, 当把这一抽象方法用来解决具体的反应扩散方程的有关问题时, 必须要结合偏微分方程的有关结果, 特别是解的先验估计的有关结果. 为了选择正确的基本 Banach 空间, 必须要有一系列的嵌入定理. 因而本章的安排首先是讲清抽象理论 (扇形算子、分数幂算子、分数幂空间及有关抽象常微分方程的结果), 然后是讲怎样把抽象理论用到具体的问题中去. 通过例子说明怎样应用偏微分方程的先验估计及嵌入定理把具体问题纳入抽象框架, 怎么选择基本工作空间等. 我们相信通过这样的讲述会使读者更好地了解怎样使抽象理论发挥作用.

最后一章 (第 10 章) 主要研究抽象问题解的渐近性态, 论述了一些重要的概念和方法, 例如动力系统、极限集、Lyapunov 方法和线性化方法等, 并利用这些方法讨论若干反应扩散方程平衡解的稳定性, 通过例子说明如何构造 Lyapunov 函数, 如何证明线性特征值问题的最小特征值的正性等.

为使读者更好地掌握本书中所论及的理论和方法, 书中配有一定量的习题.

本书多数章末有评注, 简要论述正文中未涉及的问题或有关问题的最新进展.

本书的出版得到国家自然科学基金的资助, 谨此致谢.

由于作者水平有限, 书中定有一些错误和不当之处, 真诚地希望读者批评指正.

叶其孝　李正元

1985 年

目录