

三个苹果  
青少年智慧馆

数学家  
教你  
学数学



# 莱布尼茨 教你学微分

[韩]金承泰 著 吴荣华

考点精讲，高分必备！

- ★ 微分的定义
- ★ 切线方程的计算
- ★ 微分与函数
- ★ 微分的应用

理解概念 · 掌握应用 · 攻克难题  
★ 数学 ★  
就得这样学！

全国百佳图书出版单位  
时代出版传媒股份有限公司  
黄山书社



# 莱布尼茨 教你学微分

[韩] 金承泰 著 吴荣华 译



并, 高分必备!

- ★微分的定义
- ★切线方程的计算
- ★微分与函数
- ★微分的应用

掌握应用 · 攻克考试  
 理解概念 · 就得这样学!  
 ★数学★

全国百佳图书出版单位  
 时代出版传媒股份有限公司  
 黄山书社

수학자가 들려주는 수학 이야기

Copyright © 2010 by JAEUM & MOEUM CO., LTD.

Simplified Chinese translation copyright © 2015 by Huangshan Publishing House.

This translation was published by arrangement with Jaenum & Moeum Publishing Co., through Shanghai

All One Culture Diffusion Co., Ltd.

All rights reserved.

## 图书在版编目 (CIP) 数据

莱布尼茨教你学微分 / 【韩】金承泰著; 吴荣华译. — 合肥: 黄山书社, 2015. 12

(数学家教你学数学: 中学版)

ISBN 978-7-5461-5123-6

I. ①莱… II. ①金… ②吴… III. ①数学—青少年读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 175874 号

版权合同登记号 图字: 12151528

LAIBUNICI JIAO NI XUE WEIFEN

莱布尼茨教你学微分

【韩】金承泰 著 吴荣华 译

出品人 任耕耘  
总策划 任耕耘 杨雯  
执行策划 司雯  
责任编辑 程景  
特约编辑 古宏伟 赵迪秋  
装帧设计 齐娜 李斐斐  
出版发行 时代出版传媒股份有限公司 (<http://www.press-mart.com>)  
黄山书社 (<http://www.hspress.cn>)  
地址邮编 安徽省合肥市蜀山区翡翠路 1118 号出版传媒广场 7 层 230071  
印刷 安徽国文彩印有限公司  
版次 2016 年 3 月第 1 版  
印次 2016 年 3 月第 1 次印刷  
开本 710mm×1000mm 1/16  
字数 90 千  
印张 9  
书号 ISBN 978-7-5461-5123-6  
定价 24.00 元

服务热线 0551-63533706

销售热线 0551-63533761

官方直营书店 (<http://hsssbook.taobao.com>)

版权所有 侵权必究

凡本社图书出现印装质量问题,  
请与印制科联系。

联系电话 0551-63533725



## 让我们站在数学巨人的肩膀上， 以更远的目光、更广的视野去观察数学世界吧！

数学教科书往往以“结果”来揭示数学，很难使学生了解数学不断进化的过程。事实上，数学的历史是围绕着一个课题，由众多数学家刻苦研究从而揭示一个个规律性原理的演绎推理过程。

《数学家教你学数学》是古今中外的数学家以他们那亲切的声音直接给我们讲述各种数学原理的产生过程，有助于学生以“现在进行时”来理解数学，而不是以“过去完成时”来理解。

学生对数学产生畏难情绪的主要原因之一是数学较强的“抽象思维”。数学的这一特性恰恰与学生喜欢的“具体思维”相悖。要想缩短“抽象思维”和“具体思维”之间的差距，方法只有一个，那就是在尽量回避数学抽象推理的同时，尽可能地增加对数学概念和原理的具体说明。而《数学家教你学数学》正是生动再现数学教科书的内容，力争使数学“变脸”，将原来抽象的数学改头换面成为具体的数学。此外，书中引用的大量名人逸事和数学家的趣闻，使学生感到枯燥无味的数学很容易变成妙趣横生、回味无穷的数字

游戏。

从结构上看，《数学家教你学数学》首先简要介绍数学家的业绩，然后通过数学家的讲解揭示数学的内在世界和外在世界，从列举的大量例子中说明数学概念和原理，最后再通过一个小结来归纳每节课讲的内容。本丛书的这种结构可以使读者从整体上了解每个数学概念和原理。

《数学家教你学数学》紧扣中学数学教程，尽可能包含中学数学所涉及的全部内容。比如《莱布尼茨教你学记数法》讲述的是数字形成的背景、原始进制法到数位进制法的发展过程、0的出现、莱布尼茨二进制法等方面的故事，如实反映了中学一年级进制法的内容。可见这套《数学家教你学数学》丛书能够起到帮助学生消化和吸收学校数学课程的作用。

伟大的科学家牛顿留下了一句绝世名言：“If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.（如果说我比别人看得更远些，那是因为我站在了巨人的肩膀上）”没错，如果我们也站在这些数学巨人的肩膀上放眼远眺，就可以用更长远、更开阔的视野去了解数学世界。希望这套丛书能使我们的读者们都有机会站在数学巨人的肩膀上，把数学世界看得更清楚。

弘益大学数学教育系教授、《数学协奏曲》作者 朴京美



## 用数学眼光看穿世上的真理， 让我们亲身体会真理之伟大的“微分”的故事

在编写《莱布尼茨教你学微分》的过程中，我投入心血最多的部分是解题过程。这里的解题方法比以往任何一本参考书都要仔细，可以进一步提高学生们的理解能力。

为了帮助学生们真正理解以极限为基础的微分系数和掌握多项函数的导数我付出了极大的努力。

我的初衷始终没有变化，就是站在学生们的角度上编撰数学故事。微分学和积分学已经被教育部定为必修科目，因此给现今的中小學生增加了不少学习压力。为了使中小學生在轻松愉快的气氛中学习难度较大的微分学，我在编写过程中还添加了不少学生们喜闻乐见的实例和有趣的方程。

只要耐下性子从头到尾读一遍这本书，我想肯定能够增强同学们学习数学的自信心。

创造与应用来自孜孜不倦的努力。要想提高数学实力，就要付出相应的努力。英国女作家乔安妮·罗琳为了编写自己的名著《哈

里波特》居然把小说《纳尼亚传奇》抄写了五遍。如果同学们也跟罗琳一样把这本书的有关内容和计算题反复读几遍、反复算几遍，那么我想谁都能攻克微分这座坚固的城堡。

金承泰



## 课 程 导 航

### 1

#### 这本书的不同之处

《莱布尼茨教你学微分》中讲的微分与牛顿在物体运动的测速过程中发现的微分不同，是通过对曲线的切线、极大值和极小值的观察而发现的另一种形式的微分。发现这个微分法的人是德国数学家莱布尼茨。在本书里这位大数学家亲临我们的身边为我们讲授他发现的微分法。要是利用莱布尼茨的这个微分法，我们可以用不同于高中课程中的微分法画出函数图。这本书就是从这个角度来解释微分法的。

莱布尼茨将带着少林小棍僧觉悟，站在我们中小学生的角度细致入微地讲解微分法。微分是我们大部分同学都很讨厌并感到吃力的数学内容，可由于微分的创始者莱布尼茨亲临我们身边讲课，所以我们可以更直接地了解 and 掌握微分法。

这本书除了讲解我们在数学教科书中学到的内容外，还涉及一些考试中经常出现的微分题。即使对微分失去兴趣的同学也可以通



过这本书重新唤起学习的欲望，从而能够提高对与微分相关的学校数学教程的理解。

## 2

### 这本书的几个亮点

1. 本书以微分学的创始人莱布尼茨亲临我们身边讲课的形式写成，通过具体生动的例子来激发同学们的学习热情。

2. 莱布尼茨的讲课幽默诙谐，让我们在轻松愉快的气氛中学习微分学。

3. 即使是小学低年级学生，只要慢慢地读下去，也可以了解微分学的大概框架。对准备参加考试的高年级学生来说，更是一本有益的参考教材。



## 第一课 曲线的切线和切线梯度

了解微分的方法。

观察切线梯度与微分的关系。

学习微分的计算方法。

## • 提前预习

——几何学：几何学是数学最早的领域，起源于古埃及，是为了解决包括测量在内的许多实际问题而产生的学问。

——切线： $P$ 、 $Q$ 是曲线上的两个点，在连接 $P$ 、 $Q$ 两点的直线上，当 $Q$ 点沿着曲线无限接近 $P$ 点时的直线 $PQ$ 的极限位置或其轨迹称为点 $P$ 处的切线。

——二次函数：形如 $y = ax^2 + bx + c$ （其中 $a$ ， $b$ ， $c$ 是常数， $a \neq 0$ ）的函数叫作二次函数。

## • 学习方法：

——几何学上的导数：函数的导数实际上是函数曲线的切线梯度，更准确一点说是一个点上的切线梯度。

——曲线：曲线 $y = f(x)$ 的 $(a, f(a))$ 点上的切线梯度是： $f'(a)$ 。

——微分系数：

函数  $f(x)$  在  $x = a$  处的微分系数是

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

## 第二课 少林棍僧觉悟的棍棒术与切线方程

了解切线方程。

了解法线方程。

### • 提前预习

——牛顿：17世纪英国工业革命的代表性人物，光学、力学、数学等领域的杰出贡献者，1687年出版的著作《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) 被誉为近代科学最重要的文献。

——方程：当某一未知数拥有特定值的时候才能成立的等式。

——三角比：在直角三角形的三条边中取任意两条边而形成的比例，如正弦、余弦、正切、余切等。

### • 学习方法：

——法线方程：

经过切点与切线垂直的直线叫作法线。

法线梯度： $-\frac{1}{f'(a)}$  ( $f'(a) \neq 0$ )

法线方程式： $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

——在多项式函数  $y = f(x)$  图像的点  $P(a, b)$  上,

切线梯度是  $\tan \alpha = f'(a)$

切线方程是  $y - b = f'(a)(x - a)$

### 第三课 微分与递增函数、递减函数

了解函数的增加状态和减少状态。

通过微分学习递增函数和递减函数。

#### • 提前预习

——坐标平面：坐标系上的平面。这个平面上每一个点的位置都是由两个数形成的一对坐标来表示。结合代数计算，这个坐标可以用来研究图形的性质。

#### • 学习方法

——函数  $f(x) = x^2$  在  $(0, \infty)$  内的递增

函数  $f(x) = x^2$  在  $(0, \infty)$  区间里随着  $x$  的增大，函数  $f(x)$  也在增大。当这个区间的两个数  $a$  和  $b$  满足  $a < b$  时， $f(a) < f(b)$  便随之成立。

——递增函数、递减函数的定义

当函数  $f(x)$  对某一区间的任意两个数  $a$  和  $b$  来说，当  $a < b$  时， $f(a) < f(b)$ ，就称函数  $f(x)$  在该区间内是递增函数。同理，当  $a < b$  时， $f(a) > f(b)$ ，就称函数  $f(x)$  在该区间内是递减函数。

——如果函数  $f(x)$  在某一区间里是个可微分函数，并在该区间里  $f'(x) > 0$ ，则在该区间是递增的。相反，如果  $f'(x) < 0$ ，那么  $f(x)$  在该区间是递减的。

#### 第四课 微分与函数的极大、极小

学习函数的极大值与极小值。

学习利用微分画高次函数图的方法。

##### • 提前预习

——极值：若函数  $f(x)$  是连续的，且在  $x = a$  附近发生递增 → 递减的变化，函数  $f(x)$  则取极大值；若在  $x = a$  附近发生递减 → 递增的变化，函数  $f(x)$  则取极小值。极大值和极小值统称为极值。

——因式分解：将一个多项式分解为两个或两个以上的因式的过程。

##### • 学习方法

——极值的判定：函数  $y = f(x)$  在  $x = a$  处可以微分，并在  $x = a$  处拥有极值，则  $f'(a) = 0$ 。

$$\text{—— } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

#### 第五课 微分与函数的最大值、最小值

了解函数的最大值与最小值。

通过微分寻找函数的最大值和最小值。

• 提前预习

——区间

• 开区间：在实数的集合中两头的数不被该集合所包含的区间，是不等式  $a < x < b$  的区间，表示为  $(a, b)$ 。

• 闭区间：在实数的集合中两头的数被该集合所包含的区间，是不等式  $a \leq x \leq b$  的区间，表示为  $[a, b]$ 。

——完全平方式：表现为某一个整式的平方的式子。

——体积：图形所占据的空间。

• 学习方法

——在给出的区间里所能选择的最大的值叫作  $f(x)$  的最大值，相反，在给出的区间里所能选择的最小的值叫作  $f(x)$  的最小值。

——当函数在给出的区间里是连续的，且该区间里只有一个极值时，若那个极值是极小值则成为最小值，若那个极值是极大值则成为最大值。

——圆柱的体积是“底面积  $\times$  高”，圆锥的体积是“ $\frac{1}{3} \times$  底面积  $\times$  高”。

第六课 微分与方程、不等式

通过微分了解方程。

利用增减表画高次函数图像。

• 提前预习

——判别式：给代数方程式的解提供“情报”的式子。

——交点：两条以上的线相交的地方。

——不等式：将两个数或两个式子用不等号连接的式子。

• 学习方法

——当函数  $f(x)$  的图像与  $x$  轴相交时，这个交点上的  $x$  坐标是方程  $f(x) = 0$  的实根。实根是方程解的一种，指的是实数根。实数是由有理数和无理数组成的数。

——函数  $f(x)$  和  $g(x)$  对应图像的交点的  $x$  坐标是方程  $f(x) = g(x)$  的实根。

——一个方程拥有三个相互不同的实根，其前提条件是“极大值  $\times$  极小值  $< 0$ ”。

——一个方程拥有二重根和一个实根，其前提条件与拥有不同的两个实根的条件一样，是“极大值  $\times$  极小值  $= 0$ ”。

——一个方程拥有一个实根和两个虚根或只拥有一个实根的前提条件是“极大值  $\times$  极小值  $> 0$ ”。

——要想证明任意实数  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  成立与否，可以利用函数  $y = f(x)$  的导数  $y' = f'(x)$  求得  $f(x)$  的最小值，然后看是否满足“ $f(x)$  的最小值  $> 0$ ”。

——要想证明在  $x > a$  范围内不等式  $f(x) > 0$  成立与否，看它是否在  $x > a$  范围内满足“ $f(x)$  的最小值  $> 0$ ”，看在  $x > a$  范围内  $f(x)$  是否为递增函数并满足  $f(a) \geq 0$ ，即是否  $f'(x) > 0$  且  $f(a) \geq 0$ 。

——要想证明在  $x > a$  范围内不等式  $f(x) > g(x)$  成立与否，就要看看  $h(x) = f(x) - g(x)$  在  $x > a$  范围内是否形成  $h(x) > 0$ 。

### 第七课 微分与速度、加速度

了解速度与加速度。

了解微分对速度与加速度的适用问题。

#### • 提前预习

——速度：表示物体移动快慢的尺度，即物体在单位时间内移动的距离。

——加速度：速度变化量与发生这一变化所用时间的比值。

——速率：物体在某一点运动的快慢程度。

#### • 学习方法

——如果时间和位置之间存在着  $x = f(t)$  的函数关系（ $x$  是位置， $t$  是时间），那么时间从  $t$  经过  $t + \Delta t$  时，位置变化量则是  $f(t + \Delta t) - f(t)$ 。因此在时间间隔  $\Delta t$  内的平均速度是：

$$\frac{\text{位置的变化量}}{\text{时间}} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



$$\text{速度} = \frac{\text{位置的变化量}}{\text{时间}}。$$

