普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学信息化教学丛书

线性代数及应用

XIANXING DAISHU JI YINGYONG

吴小涛 胡 骏 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学信息化教学丛书

线性代数及应用

吴小涛　胡　骏　主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合编者多年教学实践经验编写而成. 本书包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数与数学软件. 每节配有习题，每章配有总习题，均配有部分答案. 本书突出线性代数的计算和方法，以及课程在实际问题中的软件实现及应用.

本书内容充实，通俗易懂，深入浅出、循序渐进，例题较多，典型性强，深广度合适，便于教与学. 可供普通高等院校（尤其是独立学院、民办高校、应用技术学院）工科类、理工类（非数学专业）及经济管理类各专业学生使用，也可供自学者和科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及应用/吴小涛，胡骏主编. —北京：科学出版社，2017.8

（工科数学信息化教学丛书）

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-054386-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①吴… ②胡… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 213964 号

责任编辑：谭耀文 刘艳华 / 责任校对：贾伟娟

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 8 月第一次印刷 印张：15 1/2

字数：363 000

定价：39.60 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

随着计算机技术的飞速发展与广泛应用, 大量工程与科研中的问题通过离散化的数值计算得到了定量的解决, 这就使得以处理离散量为主的线性代数课程占有越来越重要的地位. 作为体现教学内容和教学方法的载体, 教材对教与学的效果起着非常重要的作用. 我们根据当前工科类、理科类(非数学专业)和经济管理类各专业对线性代数的教学要求, 结合编者多年的教学实践经验, 编写了本教材.

本书在注重本课程自身的系统性和逻辑性的同时, 着重把握“理论体系完整, 重在实际应用”的原则, 侧重于学生完整、全面地掌握基本概念、基本方法, 强调培养和提高学生的基本运算能力, 以及运用本课程的知识利用 MATLAB 软件去解决实际问题的能力.

本书在编写时努力做到概念清楚, 重点突出, 文字叙述通俗易懂, 论述确切, 便于教与学. 在内容的选取和安排上根据内容的难易度进行了适当的调整. 例如, 对于行列式, 作为研究线性方程组的一个工具, 本书弱化行列式的定义, 强化行列式的计算. 围绕行列式的计算方法展开内容, 详尽地归纳和总结计算行列式的“三角化法”和“降阶法”的步骤, 并通过例题进行解说; 而对重点知识点力求讲透, 说理仔细, 注意启发引导. 例如, 对于求解线性方程组, 本书首先介绍消元法的具体计算步骤, 然后过渡到齐次线性方程组和非齐次方程组的计算步骤, 这种安排能使读者快速地求解方程组, 最后分析线性方程组的解的结构, 从理论上解释方程组的解. 此外, 书中配备大量的典型例题, 每节内容都有针对性的习题, 每章还配有总习题. 读者可以通过这些例题和习题, 更好地掌握线性代数的基本概念、理论和方法.

在读者掌握线性代数的基本概念和理论之后, 本书介绍如何用 MATLAB 软件快速求解行列式、矩阵的各种运算、判断向量组的相关性和解线性方程组等, 在此基础上介绍用线性代数解决实际问题以及用 MATLAB 软件来实现, 使本来抽象、冗繁和枯燥的课程变得形象、简明而实用, 也为将数学应用于各行各业打好基础.

本书由吴小涛和胡骏编写, 其中第 1～3 章和第 7 章由吴小涛编写, 第 4～6 章由胡骏编写. 全书由吴小涛统稿、定稿. 本书的编写是武汉科技大学城市学院线性代数课程建设项目工作的一部分, 校领导十分关心、支持课程的建设工作, 教务部领导及公共课部领导对本书编写工作给予了大力的帮助和支持, 尹水仿教授对本书进行了细致的审阅, 数理教学中心的老师们也给本书提出了许多宝贵意见和建议, 在此, 我们一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限, 书中不足与疏漏之处在所难免, 恳请读者批评指正.

编　者

2017 年 6 月

目　录

第1章　行　列　式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表, 按一定的法则计算得到的一个数. 行列式是研究线性代数的一个重要工具, 在线性方程组、矩阵、向量组的线性相关性、二次型中都需要用到行列式. 本章介绍行列式的定义、性质及其计算方法.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组问题中引入的. 所谓线性方程组，是指各方程关于未知量均为一次的方程组. 例如, 二元一次线性方程组一般可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解该方程组: 用 $a_{22}\times$①$-a_{12}\times$② 消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

用 $a_{21}\times$①$-a_{11}\times$② 消去 x_1 得

$$(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21}-a_{11}b_2 = -(a_{11}b_2-b_1a_{21}).$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时, 方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了使(1.2)表示简单, 莱布尼茨(Leibniz)于 18 世纪初引入二阶行列式, 定义如下.

定义 1.1　由 4 个数(元素)排成的 2 行 2 列的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为此数表所确定的二阶行列式, 记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中, 数 a_{ij} 称为行列式的元素, a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素所在的行数, 称为行标, 第二个下标 j 表示这个元素所在的列数, 称为列标. 由定义知, 二阶行列式是由 4 个数按一定的运算规则得到的一个数, 这个规则称为"对角线法则". 如图 1.1 所示, 称从左上角到右下角的对角线为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线为行列式的副对角线, 于是二阶行列式等于**主对角线上的元素之积减去副对角线上的元素之积**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式的概念，二元线性方程组(1.1)的系数组成的行列式称为系数行列式，记为 D，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时，(1.1)的解(1.2)可以用行列式表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D},$$

其中 D_1 和 D_2 是以 b_1, b_2 分别替换系数行列式 D 中第 1 列、第 2 列的元素所得到的两个二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

解　因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - 2\times(-2) = 7 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{7}{7} = 1$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{7}{7} = 1$.

1.1.2　三阶行列式

类似地，为了讨论三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

的解，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.4}$$

由(1.4)式定义的记号称为**三阶行列式**，它共有 6 项，每一项均为不同行、不同列的三个元素之积，按对角线法则(主对角线及其平行线上的元素乘积为正，副对角线及其平行线上元素乘积为负)展开，如图 1.2 所示.

例 2 计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

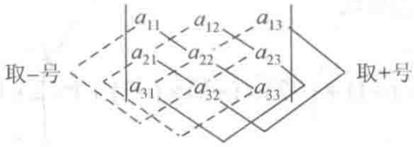

图 1.2

解 原式$=3\times0\times4+1\times(-3)\times(-1)+2\times5\times2-2\times0\times(-1)-1\times2\times4-(-3)\times5\times3$

$=0+3+20-0-8+45=60$.

例 3 解不等式$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$.

解 因为$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=x^2-1$, 原不等式化为$x^2-1>0$, 故不等式的解集为$\{x \mid x>1 \text{或} x<-1\}$.

例 4 解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 因为方程左端$D=3x^2+4x+18-12-2x^2-9x=x^2-5x+6$, 所以解方程$x^2-5x+6=0$得$x=2$ 或 $x=3$.

用消元法解三元一次方程组(1.3), 可得到与二元一次方程组类似的结论: 当方程组(1.3)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时, 其解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D},$$

其中D_1, D_2和D_3是以b_1,b_2,b_3分别替换系数行列式D中第 1 列、第 2 列、第 3 列的元素所得到的三个三阶行列式.

例 5　解三元线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解　由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-(-1)\times1\times1-1\times(-3)\times1$$

$$-(-2)\times2\times(-1)=-5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习　题　1.1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$.

3. 在以下各题中, a 是参数, 求出

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}\neq0$ 的充分必要条件;

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}<0$ 的充分必要条件.

1.2　n阶行列式

二阶、三阶行列式可以用对角线法则计算, 但四阶和四阶以上的行列式不能用对角线

法则, 为此, 本节引入n阶行列式. 先介绍排列的有关概念, 再介绍n阶行列式, 最后介绍几个以后经常用到的特殊n阶行列式(对角行列式与三角行列式等)的计算方法.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.2 由自然数(元素)$1,2,\cdots,n$组成的不重复的每一种有确定次序的排列, 称为一个n级排列(简称为排列), 记为P_n.

例如, 12345, 53214 均为 5 级排列.

例 1 写出由 1, 2, 3 组成的所有 3 级排列.

解 自然数 1, 2, 3 组成的排列共有 6 个, 分别为

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

一般地, n个数的n级排列共有$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$个, 其中按数字从小到大的顺序构成的$n$级排列$123\cdots n$称为标准排列, 标准排列的元素之间的顺序为标准顺序.

如 123 就是一个标准排列, 除标准排列外, 其他的排列都至少有一个以上的大小次序颠倒的情况出现. 如排列 132 中, 3 比 2 大, 但是 3 排在 2 的前面, 它跟自然顺序(由小到大)相反, 这时称 3 和 2 这对数构成一个逆序.

定义 1.3 在一个排列中, 一对数如果较大的数排在较小的数之前, 就称这对数构成一个逆序. 一个排列包含逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 用τ表示. 逆序数是偶数的排列称为偶排列; 逆序数是奇数的排列称为奇排列.

根据上述定义, 可按如下方法计算排列的逆序数: 由于第一个元素前面没有元素, 因而从第二个元素起开始数, 该元素前面有多少个数比它大, 则这个元素的逆序就是多少, 将该排列所有元素的逆序数相加, 便得到这个排列的逆序数.

例 2 计算排列 32514 的逆序数, 并讨论其奇偶性.

解 在排列 32514 中,

3 排在首位, 故其逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数只有 1 个, 故其逆序数为 1;

5 的前面没有比 5 大的数, 故其逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有 3 个, 故其逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有 1 个, 故其逆序数为 1.

于是排列 32514 的逆序数为$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$, 是奇排列.

例 3 求排列$n(n-1)(n-2)\cdots321$的逆序数.

解 因为在这个排列中, $n-1$前面比它大的数有 1 个, $n-2$前面比它大的数有 2 个, $\cdots$, 2 前面比它大的数有$n-2$个, 1 前面比它大的数有$n-1$个, 所以

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

1.2.2 n阶行列式

二阶、三阶行列式按对角线法则的计算公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

利用排列的知识, 分析二阶、三阶行列式的运算规律可以得到以下结论.

(1) 二阶行列式每项是两个元素的乘积, 三阶行列式每项是三个元素的乘积, 这些元素位于行列式的不同行、不同列.

(2) 二阶行列式每项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}$ 的形式, 即行标排成标准排列, 列标 p_1p_2 是 2 个元素 1,2 的某个排列, 这样的排列共有 $2!=2$ 项; 三阶行列式每项都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式, 即行标排成标准排列, 列标 $p_1p_2p_3$ 是 3 个元素 1,2,3 的某个排列, 这样的排列共有 $3!=6$ 项.

(3) 每一项前面所带的符号 (正号或负号) 与该项列标构成的排列 p_1p_2, $p_1p_2p_3$ 的奇偶性有关. (1.6) 式中第一、二、三项的列标构成的排列分别是 123, 231, 312, 它们都是偶排列, 这三项前面都带正号; 第四、五、六项列标所成的排列分别是 321, 213, 132, 它们都是奇排列, 这三项前面都带负号, 于是 (1.6) 式各项前面所带的符号可以用 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$ 表示.

通过以上分析, 三阶、三阶行列式可按以下方式定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列取和. 推广到一般即可得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 设有 n^2 个数 (元素) 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

表中位于不同行、不同列的 n 个数的乘积, 并冠以符号 $(-1)^{\tau}$, 得到形如

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

的项, 其中 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, τ 为这个排列的逆序数, 这种乘积共有 $n!$ 项, 这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式, 记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n},$$

简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $\left|a_{ij}\right|$，数 a_{ij} 称为 $\det(a_{ij})$ 的元素.

由定义 1.4 知，n 阶行列式共有 $n!$ 项；每一项有 n 个元素，这些元素来自不同的行和不同的列；该项前面的正负号由列标排列的逆序数的奇偶性确定.

注意　一阶行列式 $|a_{11}|$ 与数的绝对值的符号相同，但意义不同. 作为行列式 $|-2|=-2$，而作为数的绝对值 $|-2|=2$. 因此必须用文字严格区分这两种不同对象.

例 4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

这种**主对角线**(从左上角到右下角的对角线)下方元素全为零的行列式称为**上三角行列式**.

解　根据定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}.$$

这个行列式有很多元素是 0，从而有很多项为零，所以只要把可能不为零的项找出来再相加即可. 先从 0 最多的第 4 行开始，当 $p_4=1,2,3$ 时，$a_{4p_4}=0$，从而相应的项都等于零，只有 $p_4=4$ 的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{44}$ 可能不为零；而在项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{44}$ 里 p_3 不能取 4(因为要求元素取自不同列)，又 $p_3=1,2$ 时，项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{44}=0$，因此，只有 $p_3=3$ 的项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{33}a_{44}$ 可能不为零，同理可知 p_2 只能取 2，p_1 只能取 1，所以只有一项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可能不为零，其余所有项都等于零，这项的列标构成的排列 1234 是偶排列，因此这项前带正号. 所以

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

这说明：**上三角行列式的值等于它的主对角线上元素之积**，显然上述分析对于 n 阶上三角行列式也完全适用，因此有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,对于**下三角行列式**(主对角线上方元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以及**对角行列式**(主对角线上、下方元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

均有相同的结论,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

这种副对角线(从右上角到左下角的对角线)上、下方元素全为零的行列式称为**次对角行列式**.

解　四阶行列式 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$, 根据例 4 的分析知, D 中第 1 行的非零元素只有 a_{14},因而 p_1 取 4,同理,由 D 中第 2~4 行知, $p_2=3$, $p_3=2$, $p_4=1$,所以只有一项 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 不为零,其余所有项都等于零,该项的列标构成的排列 4321 的逆序数 $\tau(4321)=0+1+2+3=6$, 是偶排列,因此该项前带正号,即

$$D=(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=24.$$

显然上述分析对于 n 阶次对角行列式也完全适用,即

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理,对于行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

均有相同的结论，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 6 写出四阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$中含有因子 $a_{13}a_{31}$ 的项.

解 四阶行列式 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$.

由于 $p_1=3$，$p_3=1$，所以 p_2 和 p_4 只能取 2 或 4.

当 $p_2=2$ 时，$p_4=4$，

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_2} = (-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} = a_{13}a_{22}a_{31}a_{44};$$

当 $p_2=4$ 时，$p_4=2$，

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_2} = (-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} = a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}.$$

故行列式中含有因子 $a_{13}a_{31}$ 的项为 $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$.

前面是将行列式中每项的行标排成标准排列，由列标排列的逆序数确定该项的符号. 现在考虑列标排成标准排列时的情形，有如下定理.

定理 1.1 行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^s a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$. 其中 s 是行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

定理 1.1 证明略，该定理说明行列式行标排列与列标排列的地位是相同的.

习 题 1.2

1. 求下列排列的逆序数，并确定其奇偶性：

(1) 24351；　　(2) 347812596；

(3) $214365\cdots(2n)(2n-1)$；　　(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{34}$ 的项.

3. 用行列式的定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$;　(4) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

4. 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$, 求 x^3 的系数.

1.3　n阶行列式的性质与计算

根据n阶行列式的定义, n阶行列式是$n!$项的和, 而每一项都是n个数的乘积. 对于5 阶行列式共有$5!=120$项, 当n稍大时, 计算量非常大, 因此用定义计算行列式是不现实的, 但可以利用行列式的性质把行列式化为上三角行列式, 根据上三角行列式等于主对角线上元素之积来计算. 本节先讨论行列式的性质, 然后介绍化行列式为上三角行列式的方法.

1.3.1　行列式的性质

将n阶行列式D的第 1 行改为第 1 列, 第 2 行改为第 2 列, ⋯, 第n行改为第n列, 得到的新的n阶行列式称为D的转置行列式, 记为D^{T}或D', 即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则 \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如, 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 的转置行列式是 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. 这里 $D=-4, D^{\mathrm{T}}=-4, D=D^{\mathrm{T}}$ 并不是偶然的, 事实上, 有如下性质.

性质 1　行列式与它的转置行列式的值相等.

证明略. 性质 1 表明行列式中, 行与列具有同等地位, 也就是说: 行列式对行成立的性质, 对列也同样成立, 反之亦然. 下面的性质只给出对行的叙述.