



# 非线性系统建模 与滤波方法

丁国强 著



北京航空航天大学出版社  
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

# 非线性系统建模与滤波方法

丁国强 著



北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书主要以导航系统为平台对象,以贝叶斯最优滤波理论框架为基础开展了现代非线性滤波理论算法设计和系统建模研究。其中现代非线性滤波理论算法包括了以无迹变换策略为基础的无迹卡尔曼滤波算法及其变形算法,从矩匹配出发,探究了无迹变换的7种Sigma点集采样策略获得的新型无迹卡尔曼滤波算法,以及高阶无迹卡尔曼滤波算法的设计思路,对其计算性能给出了理论分析,并给出了惯性导航系统非线性模型状态参数的仿真计算实例。

本书的研究成果将对从事惯性导航、天文导航、卫星导航及组合导航系统,以及从事现代最优滤波理论与算法研究的研究生、高校教师和科研院所相关专业技术人员产生启迪作用。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性系统建模与滤波方法 / 丁国强著. -- 北京 :  
北京航空航天大学出版社, 2017.6  
ISBN 978-7-5124-2447-0

I. ①非… II. ①丁… III. ①非线性滤波—研究  
IV. ①O211.64

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 133413 号

版权所有,侵权必究。

### 非线性系统建模与滤波方法

丁国强 著

责任编辑 张冀青

\*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: [emsbook@buaacm.com.cn](mailto:emsbook@buaacm.com.cn) 邮购电话:(010)82316936

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷 各地书店经销

\*

开本:710×1 000 1/16 印张:20.25 字数:432 千字

2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-2447-0 定价:59.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

# 前 言

随着我国航空、航天、航海技术的发展及北斗导航系统的全球部署,导航系统信息技术研究成为国内甚至国外科技工作者的热门课题和研究对象,这是作者在这一领域从事研究的出发点,是作者在本领域研究热情的初衷。导航信息系统基础理论与应用算法研究主要包括导航系统建模和非线性系统最优滤波理论算法研究两个方面。

导航系统建模是开展导航系统设计研究的基础,经历了长期的传统角误差建模应用阶段,角误差建模已经比较成熟,积累了丰富的经验和理论基础。本书在简单总结前人工作基础上开展了新型的惯性导航系统非线性建模工作,并对近年来的传递对准建模问题做了深入研究,给出了几种新型传递对准模型方程。

导航系统模型状态参数的估计计算要求计算速度快,计算精度高,传统的非线性滤波算法无法保证这些计算效能要求。基于模型状态参数辨识与估计计算的需要,作者开展了现代非线性最优滤波理论研究与算法设计工作。针对 UKF 算法、Stirling 插值滤波算法和容积 Kalman 滤波算法做了深入分析与理论研究,获得了一些适用于导航系统非线性模型的状态参数优化估计计算的实施思路与措施,取得了一些有价值的研究成果。

本书内容是以作者博士论文《惯性导航系统传递对准技术关键问题研究》和国家自然科学基金联合项目“大失准角传递对准模型及其并行集员估计算法研究”(项目编号:U1204603)为基础,综合作者近年来的学术研究成果,汇编整理而成的。

本书涉及现代惯性导航系统、组合导航系统的建模设计研究成果,以及以 Bayesian 最优滤波理论为基础的现代非线性滤波理论与算法研究成果两部分内容,呈现出了作者开展相关研究课题的部分理论与算法研究成果。

编写这本著作,作者首先要感谢哈尔滨工程大学博士生导师周卫东教授,以及哈尔滨工程大学自动化学院 407 教研室的郝燕玲教授、孙枫教授,还有张永刚博士,是

他们对我的无私帮助和悉心指导,使我在导航系统及现代非线性最优滤波理论领域逐步成长起来;还要感谢国家自然科学基金委,在国家自然科学基金资助下我才能够完成相关课题的研究工作;同时,本书的出版还获得了郑州轻工业学院电气信息工程学院王延峰等院领导的支持与帮助,在这里表示感谢。

本书的目的在于能够为从事导航系统基础理论研究及现代最优滤波理论与算法设计研究的相关工程技术人员或者高校教师、研究生提供一本相对比较全面的、最新的科研成果,能够使阅读者从本书中获得相关课题的研究思路与思想火花的碰撞,能够对大家的科研工作提供思想的启迪,为大家的科研工作指出一条新途径。

丁国强

2017年3月6日



第 1 章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 非线性最优滤波理论	1
1.1.2 导航系统理论研究发展	6
1.2 国内外舰载机惯性导航设备装备发展	8
1.3 动基座匹配传递对准技术发展	9
1.4 技术路线及关键内容	13
1.4.1 技术路线	13
1.4.2 关键内容说明	15
参考文献	15
第 2 章 建模与滤波理论基础	22
2.1 矩阵运算基础	22
2.1.1 矩阵范数	22
2.1.2 镜面反射	25
2.1.3 奇异值分解理论	26
2.2 多维随机变量概率分布	26
2.2.1 多维随机变量概念	26
2.2.2 多维随机变量数字特征	28
2.3 统计推断与估计理论	29
2.3.1 基本概念	29
2.3.2 Bayesian 点估计理论	29

2.3.3	BLUE 估计 .....	30
2.3.4	WLS 估计 .....	31
2.3.5	ML 估计 .....	31
2.3.6	主成分估计 .....	31
2.3.7	RLS 估计 .....	33
2.4	Kalman 滤波原理 .....	34
2.4.1	Kalman 滤波方程 .....	34
2.4.2	随机线性连续系统 Kalman 滤波原理 .....	37
2.4.3	Kalman 滤波器的各种滤波方法 .....	40
2.5	随机非线性系统 Kalman 滤波理论 .....	42
2.6	自适应 Kalman 滤波理论 .....	45
2.7	非线性最小方差滤波方法 .....	47
2.7.1	最小方差估计概念 .....	48
2.7.2	Bayesian 滤波理论 .....	50
2.8	本章小结 .....	52
	参考文献 .....	52
<b>第 3 章 Unscented Kalman 滤波理论与算法 .....</b>		<b>53</b>
3.1	Bayesian 最优滤波理论 .....	53
3.1.1	GH 数值积分逼近 Bayesian 滤波算法 .....	54
3.1.2	UT 逼近 Bayesian 滤波算法 .....	57
3.1.3	加性噪声形式的 AUKF 滤波扩展算法 .....	66
3.2	矩匹配 UT 变换方法 .....	69
3.3	高阶 UKF 滤波算法 .....	73
3.4	UKF 算法确定性采样策略 .....	78
3.4.1	球面单纯形 Sigma 点采样方法 .....	79
3.4.2	降阶不对称 Sigma 点采样方法 .....	80
3.4.3	新型对称性 Sigma 点采样方法 .....	81
3.4.4	Schmidt 正交化 Sigma 点采样方法 .....	81
3.4.5	最小化 Sigma 点采样方法 .....	83
3.4.6	基于正态分布的 Sigma 点采样方法 .....	84
3.4.7	五阶高斯求积逼近的 Sigma 点采样方法 .....	85
3.5	UKF 算法自适应策略 .....	87

3.6 本章小结 .....	98
参考文献 .....	98
<b>第 4 章 Stirling 插值逼近滤波理论与算法 .....</b>	<b>100</b>
4.1 Stirling 插值多项式逼近原理 .....	100
4.2 二阶 Stirling 插值多项式逼近滤波算法 .....	102
4.3 Stirling 插值多项式滤波算法分析 .....	109
4.4 中心差分 Kalman 滤波算法 .....	113
4.5 加性噪声形式的中心差分扩展滤波算法 .....	116
4.6 平方根形式的中心差分扩展滤波算法 .....	118
4.7 大失准角速度姿态匹配传递对准非线性模型仿真研究 .....	122
4.8 自适应噪声估计器方法 .....	126
4.9 本章小结 .....	133
参考文献 .....	133
<b>第 5 章 容积 Kalman 滤波理论与算法 .....</b>	<b>135</b>
5.1 概 述 .....	135
5.2 球面径向容积准则 .....	137
5.3 Gauss - Laguerre 容积准则 .....	142
5.4 容积 Kalman 滤波算法 .....	143
5.5 平方根形式的容积 Kalman 滤波算法 .....	149
5.6 容积 Kalman 滤波算法性能分析 .....	150
5.7 容积 Kalman 滤波算法应用实例 .....	154
5.8 本章小结 .....	163
参考文献 .....	163
<b>第 6 章 惯性导航系统原理与传递对准模型可观测性分析 .....</b>	<b>165</b>
6.1 惯性导航系统原理 .....	165
6.1.1 载体速度和位置解算 .....	167
6.1.2 载体姿态解算 .....	168
6.1.3 传递对准中系统输出信息处理方法 .....	169
6.1.4 舰船基准主惯性导航系统输出姿态误差处理方法 .....	171
6.2 惯性器件误差特性分析 .....	173



6.2.1	陀螺仪误差模型 .....	173
6.2.2	加速度计误差模型 .....	174
6.3	捷联惯性导航系统中传统姿态描述方法 .....	175
6.3.1	几种姿态误差定义 .....	175
6.3.2	不同的 SINS 姿态误差模型描述方式 .....	176
6.3.3	不同的 SINS 速度误差模型描述方式 .....	178
6.3.4	不同的 SINS 误差模型描述方式之间的关系 .....	180
6.4	传递对准模型可观测性分析 .....	182
6.4.1	PWCS 可观测性分析理论 .....	183
6.4.2	基于谱条件数的系统可观测度分析原理 .....	185
6.5	线性传递对准模型可观测性分析 .....	187
6.5.1	传递对准系统线性误差模型 .....	187
6.5.2	仿真研究 .....	190
6.6	本章小结 .....	193
	参考文献 .....	194
<b>第 7 章</b>	<b>传统惯性导航系统传递对准建模方法 .....</b>	<b>195</b>
7.1	概 述 .....	195
7.2	惯性导航系统基本方程 .....	196
7.3	初始对准误差传播理论 .....	198
7.4	动基座惯性导航系统误差模型 .....	201
7.4.1	速度误差模型 .....	201
7.4.2	姿态误差模型 .....	202
7.4.3	加速度计和陀螺仪误差模型 .....	203
7.5	速度匹配传递对准模型 .....	206
7.5.1	SINS 对 MINS 的速度误差方程 .....	208
7.5.2	SINS 对 MINS 的失准角误差方程 .....	210
7.5.3	Kalman 滤波器设计 .....	211
7.5.4	观测方程 .....	212
7.6	角速度匹配传递对准模型 .....	214
7.7	姿态匹配传递对准模型 .....	220
7.8	速度加姿态匹配传递对准模型 .....	225
7.9	本章小结 .....	230

参考文献	230
<b>第 8 章 新型惯性导航系统传递对准建模方法</b>	<b>233</b>
8.1 载体姿态描述方法	233
8.1.1 四元数	233
8.1.2 Rodrigues 参数	234
8.1.3 修正 Rodrigues 参数	236
8.1.4 姿态矩阵的四种描述方法之间的关系	236
8.2 惯性导航系统传递对准的乘性四元数误差模型	239
8.2.1 乘性四元数姿态误差方程	239
8.2.2 乘性四元数速度误差方程	240
8.2.3 系统观测方程	242
8.2.4 惯性导航系统快速传递对准误差模型	242
8.3 惯性导航系统传递对准的加性四元数误差模型	244
8.3.1 加性四元数定义	244
8.3.2 加性四元数姿态误差方程	244
8.3.3 加性四元数速度误差方程	245
8.3.4 系统观测方程	245
8.3.5 惯性导航系统快速传递对准误差模型	246
8.4 基于修正 Rodrigues 参数的传递对准误差模型	247
8.4.1 修正 Rodrigues 参数的姿态误差方程	247
8.4.2 修正 Rodrigues 参数的速度误差方程	249
8.4.3 系统观测方程	250
8.4.4 惯性导航系统快速传递对准误差模型	251
8.5 三种快速传递对准误差模型特点分析	252
8.6 本章小结	253
参考文献	254
<b>第 9 章 传递对准非线性模型算法仿真研究</b>	<b>256</b>
9.1 四元数加权均值计算方法	256
9.2 修正 Rodrigues 参数加权均值计算方法	258
9.3 传递对准误差模型中心差分滤波算法	259
9.3.1 乘性四元数误差模型的 CDKF 算法	259

9.3.2	修正 Rodrigues 参数误差模型的 CDKF 算法	261
9.3.3	加性四元数误差模型的 CDKF 算法	264
9.4	系统模型仿真环境设置	266
9.5	快速传递对准模型算法的海上对准仿真	267
9.5.1	乘性四元数误差模型传递对准仿真	267
9.5.2	加性四元数误差模型传递对准仿真	274
9.5.3	修正 Rodrigues 参数传递对准误差模型仿真	279
9.6	外界条件对传递对准误差模型的影响	285
9.6.1	观测噪声对姿态失准角估计的影响	285
9.6.2	舰船摇摆幅度对姿态失准角估计的影响	290
9.6.3	外界姿态误差对姿态失准角估计的影响	294
9.6.4	外界速度误差对姿态失准角估计的影响	304
9.6.5	仿真结果分析	308
9.7	本章小结	310
	参考文献	310
后	记	312

# 第 1 章

## 绪 论

### 1.1 研究背景

#### 1.1.1 非线性最优滤波理论

滤波技术是研究如何从受各种干扰的信号观测结果中准确估计出未知的真实信号或者系统状态参数的一门技术。由于干扰和信号都具有随机的性质,这种估计技术只有采用统计学的方法才能解决。它依据一定的估计准则,按照某种统计方法实现对信号的准确估计计算。不同的估计准则,不同的观测序列和观测信号方式,会导致估计方法不同。正因为如此,滤波理论技术经历了最小二乘理论、Wiener 滤波理论<sup>[1]</sup>、Kalman 滤波理论<sup>[2]</sup>以及现代非线性滤波理论<sup>[3-23]</sup>的发展而不断完善。但是在惯性导航系统等实际应用中,所研究的动态系统一般都是非线性、非高斯的,那么寻求一种能够从系统观测量中在线实时估计动态系统状态变量或系统参数的误差统计特性的有效方法,是目前科学技术人员面临的重要挑战。

最早的估计理论可以从 1632 年 G. Galileo 通过使用各种误差函数的极小化提出的估计问题算起。随后所开展的一系列早期研究工作主要是 Gauss 于 1795 年在他的《天体运动理论》一书中提出的最小二乘法<sup>[24]</sup>,至今在理论上和应用中仍富有生命力。最小二乘法没有考虑被估计参数和观测数据的统计特性,导致其不能得到信号的最优估计结果。但最小二乘法计算简单、便捷,使得它一度成为应用最广泛的估计方法。1912 年,费舍尔提出了极大似然估计法,从概率密度角度来考虑估计问题,对估计理论做出了重大贡献。

20 世纪 40 年代以后,针对随机过程的估计研究积极开展起来,1940 年 N. Wiener 根据火力控制需要提出一种在频域中设计统计最优滤波器的 Wiener 滤波理论算法<sup>[25]</sup>,解决了在信号和干扰都满足平稳随机性质和存在有理谱密度的情况

下,在最小均方误差意义下的信号的最佳估计问题;同一时期,苏联学者柯罗莫格洛夫提出并初次解决了离散平稳随机序列的预测和外推问题。Wiener 滤波和柯罗莫格洛夫滤波方法开创了应用统计估计方法研究随机控制问题的新领域。Wiener 滤波采用频域设计法,该方法运算复杂,解析求解困难,整批数据处理要求存储空间大,造成其适用范围极其有限,仅适用于一维平稳随机过程信号滤波。

随着空间技术的发展,对于处理具有非平稳统计特性的多维随机信号和干扰的迫切需要,Wiener 滤波的缺陷促使人们寻求时域内直接设计最优滤波器的新方法。1960年,R. E. Kalman 和 R. S. Bucy 提出了离散系统 Kalman 滤波,随后他们把这一滤波方法推广到连续时间系统中,形成了经典 Kalman 滤波估计理论<sup>[26-27]</sup>。这种滤波方法采用了与 Wiener 滤波相同的估计准则。但是,Kalman 滤波是一种时域滤波方法,R. E. Kalman 把状态空间的概念引入到随机估计理论中,从与被提取信号有关的观测量中通过滤波算法估计出所需的信号。其中,被估计信号是由白噪声激励引起的随机响应,激励源与响应之间的传递结构(系统方程)已知;观测量与被估测量之间的函数关系(量测方程)也已知。估计过程中利用系统方程、量测方程、白噪声激励的统计特性、量测误差的统计特性,从而得到数学意义上的状态变量或者参数的最优估计结果。

Kalman 滤波利用与部分状态有关的观测信号得到更多状态的最小方差估计(无零偏估计),这在惯性导航系统的初始对准中具有极为重要的地位。针对不同情况,Kalman 滤波器具有不同的形式。从原理和结构上讲,它相当于时变的状态估计器,对于惯性导航系统初始对准过程,状态方程通常就是系统的误差方程,通过 Kalman 滤波估计出系统状态变量的误差,然后通过适当的修正方式改善系统的精度。设计 Kalman 滤波器要综合考虑模型准确性、估计结果收敛性、估计性能鲁棒性,以及估计过程计算量等问题,实时估计出系统状态变量。由于 Kalman 滤波具有其他滤波方法所不具备的优点,所以一经提出即被应用到实际工程中。阿波罗登月计划和 C-5A 飞机导航系统设计是早期应用中最成功的实例。随着计算机技术的迅速发展和广泛应用,Kalman 滤波在工程实践中,特别是在航空航天技术中得到广泛应用。目前,Kalman 滤波理论作为一种最重要的最优估计理论被广泛应用于各种领域,如惯性导航系统、制导系统、全球定位系统、目标跟踪、通信与信号过程、金融、机电等。Kalman 滤波理论还能解决随机最优控制问题、故障诊断等,其中组合导航系统的设计是其成功应用的一个最主要的方面。

R. E. Kalman 最初提出的滤波理论只适用于线性系统,并且要求观测方程也必须是线性的。此后很长时间,Bucy 和 Sunahara 等人致力于研究 Kalman 滤波理论在非线性和非线性观测下的扩展应用,拓宽了 Kalman 滤波的适用范围,使扩展 Kalman 滤波(EKF)成为一种应用最广泛的非线性系统滤波方法<sup>[28-30]</sup>。为解决在某些没有有关初始状态信息和先验知识可供应用情况下的滤波,Fraser 提出了信息滤波<sup>[31]</sup>,这种算法对测量更新比较有效,但时间更新所需的计算量比较大。

Kalman 滤波应用范围广泛,设计方法也简单易行,随着微型计算机的普及应用,人们对 Kalman 滤波的数值稳定性、计算效率、实用性和有效性的要求越来越高。由于计算机的字长有限,使计算中舍入误差和截断误差累积、传递,造成误差方差阵失去对称正定性,以及数值计算的不稳定。在 Kalman 滤波理论的发展过程中,为改善 Kalman 滤波算法的数值稳定性,并提高计算效率,人们提出平方根滤波、UD 分解滤波、奇异值分解滤波<sup>[32]</sup>等一系列数值鲁棒的滤波算法。参考文献[33]首先提出了平方根滤波思想,该平方根滤波算法经美国阿波罗登月舱的实际应用,证明是很成功的。参考文献[34-36]对平方根滤波算法的发展贡献极大。平方根滤波在轨道确定、飞行状态估计和多传感器跟踪与辨识等方面得到了应用,而 UD 分解滤波是一套计算效率高、数值稳定的滤波算法。奇异值分解由于具有较强的数值稳定性和可靠性,在滤波问题中得到应用。

传统的 Kalman 滤波是建立在模型精确和随机干扰信号统计特性已知的基础上的,对于一个实际系统,往往存在着模型不确定性或(和)干扰信号统计特性不完全已知,这些不确定因素使得传统的 Kalman 滤波算法最优性、估计精度大大降低,严重时会引起滤波发散;同时它是一种无限增长记忆滤波,在求解  $k$  时刻的最优滤波值时,要用到  $k$  时刻以前的全部观测数据,为此学者提出了渐消记忆滤波<sup>[37]</sup>、限定记忆滤波<sup>[38]</sup>、自适应滤波<sup>[39]</sup>等一系列修正 Kalman 滤波算法。

对于非线性系统状态参数滤波计算领域的经典 EKF 算法,其基本思想是将非线性系统函数的 Taylor 级数展开,进行一阶或者二阶局部近似线性化,然后再进行 Kalman 滤波,是一种次优滤波算法。EKF 有两种实现方法:标称轨道线性化 EKF 方法和迭代 EKF(IEKF)算法<sup>[40]</sup>,其中 IEKF 算法估计精度高但是计算量大,不满足实时应用要求。扩展 Kalman 滤波算法需要计算非线性函数的 Jacobian 矩阵或者 Hessian 矩阵,对于复杂的非线性系统函数,计算量较大,计算效率不高;另外,采用一阶或者二阶线性化近似非线性函数,截尾误差很大,滤波计算结果误差很大,精度不高,计算效能较低。

在 20 世纪 90 年代,Julier 等人实现了非线性滤波技术的重大突破,转向计算简单、精度更高的局部逼近方法,甚至抛弃了对非线性模型线性化思想,采用了非线性变换方法。非线性变换方法有 Gauss - Hermite(GH)数值积分逼近<sup>[41]</sup>、UT 变换<sup>[42]</sup>(Unscented Transformation)、Stirling 插值多项式逼近<sup>[43]</sup>、球面径向容积准则逼近<sup>[44]</sup>、序贯蒙特卡罗法<sup>[45]</sup>和神经网络<sup>[46-47]</sup>等。

插值滤波是一种插值数值逼近方法,它采用了 EKF 算法的局部线性化处理思想,应用 Stirling 内插公式将非线性模型按照多项式展开,并结合 EKF 的预测-修正程序处理框架建立的一种新型非线性逼近滤波算法。这种方法避免了非线性函数的偏微分求解,适用于任意函数,甚至适用于非线性函数不连续或者存在奇异点等情形;插值滤波的估计精度高于 EKF 算法。插值滤波算法有一阶插值滤波算法、二阶插值滤波算法和中心插值滤波算法。在计算处理上,一阶 Stirling 插值滤波算法不

需要处理 Jacobian 矩阵,与 EKF 算法比较,计算量减少很多;另外,计算精度得到很大改善和提高,能满足实际系统的实时滤波要求。二阶 Stirling 插值滤波算法采用了二阶 Stirling 插值公式逼近非线性函数的方法,避免了 Hessian 矩阵计算,计算精度几乎与 UKF(Unscented Kalman Filtering)算法(见第 3 章)相当。与 PF 算法相比,插值滤波是一种确定性采样滤波算法。中心插值滤波算法精度则和 UKF 算法相当,它的算法结构比较简单,易于理解,很容易与 UKF、PF 和 EKF 算法结合以改善这些算法的性能。

UKF 算法是一种基于 UT 变换和标准 Kalman 滤波器框架结构构建而成的非线性滤波算法,是一种典型的非线性变换估计方法。与 EKF 算法不同,UKF 不是直接对非线性函数进行一阶或者二阶 Taylor 级数局部近似线性化,而是对状态的概率密度分布进行近似,它仅仅需要少数的几个具有确定性意义的 Sigma 采样点对信号或者系统状态进行估计计算,是一种确定性采样滤波技术,其计算量不大,但是滤波性能明显优于 EKF 算法,计算精度可达到二阶以上。

基于 UT 变换的 UKF 算法是由剑桥大学的 Julier 和 Uhlmann 提出的,其出发点是基于“对概率分布开展近似逼近计算要比对非线性函数的近似逼近计算来得容易得多”的理论猜想。这一猜想理论指导意义巨大,为后续的其他非线性滤波算法的发展起到了启发和指导作用,成为目前解决非线性最优估计问题较为流行的估计算法。自从 UKF 算法提出后,其在工程上得了广泛应用,但是对于高维系统(维数  $n \geq 4$ ),UKF 算法中的自由调节参数  $\kappa < 0$ ,使得 Sigma 中心采样点的权值系数  $\omega < 0$ ,从而使得 UKF 算法在滤波计算中可能会出现协方差矩阵非正定的情况,导致滤波计算的数值不稳定且有可能发散,并且随着系统维数的增加,Sigma 采样点与其中心点间的距离也不断增大,产生的非局部效应会严重影响 UKF 算法的估计精度。Julier 和 Uhlmann 曾经提出,加入比例因子调节 Sigma 采样点与中心点距离来避免非局部效应,但加入比例因子会导致各采样点权值增大,又导致了 UKF 算法的数值计算不稳定性问题。

随着国内外专家学者对 UKF 算法的大力推广与应用,基于 UKF 算法的理论猜想,人们提出了各种 Sigma 采样点的采样策略;基于这些 Sigma 点集 UT 变换策略设计的 UKF 算法,有很多不一致的地方,各类 UKF 算法的性能各异。例如,降阶 UKF 变换策略,其确定性采样点个数为  $n+1$ ,其计算性能不稳定;对称性采样策略获得的 Sigma 点个数为  $2n+1$ ,其计算效能较低;对于球面单纯形采样策略获得的  $n+2$  个采样点,构建的 UKF 算法仅适用于标量系统;还有降阶不对称 Sigma 点采样策略构建 UKF 算法,其采样点为  $n+1$ ,它具有减小第三阶矩的作用,但是其 Sigma 点的权值系数差异较大,易于导致数值计算不稳定;还有一种忽略掉自由参数  $\kappa$  的对称性采样策略,很明显这种 UKF 算法无法调节控制估计误差大小。还有一种考虑最优估计特征性质的基于 Schmidt 正交化的采样策略,其采样点个数是  $n+1$ ,其计算效能相对较好,在快速性估计计算场合可以获得不错的效果。还有从减少采



样点个数降低 UKF 算法的计算负担角度提出的最小化采样点集的 UKF 算法, Sigma 点的个数为  $n+1$ , 但是其计算精度仅可达到 Taylor 级数的二阶项, 利用这种最小化采样点集的 UKF 算法无法进一步提高算法的计算精度。另外, 有人提出了一种基于正态分布的 Sigma 点采样策略, 其计算量很大, 计算效能不高。还有人提出五阶 Gauss 求积的采样策略, 要求非线性系统状态变量满足高斯分布, 这在实际系统中难以实现。通过在本领域的深入研究, 促使作者把这些基于新型 UT 变换策略设计的 UKF 算法一一呈现给读者, 以起到启发思路的目的。

容积 Kalman 滤波算法是 Arasaratnam 和 Haykin 在 2009 年提出的一种新型非线性 Kalman 滤波计算理论算法。它是基于 Spherical - Radial Cubature 规则, 简称为 Cubature Kalman Filter (CKF) 算法。其核心是基于 Spherical - Radial Cubature 逼近准则, 计算非线性函数系统的状态参数的一组等权值容积点, 直接经由非线性系统函数映射传播这组容积点开展系统状态参数的估计计算。该算法理论结构简单, 相比于 UKF 算法, 调节参数较少, 数学理论基础支撑比较严密, 估计计算精度高, 收敛性能和数值计算稳定性较好, 克服了其他非线性算法如 EKF 算法中存在的一些问题, 其较好的计算效能使得 CKF 算法一经提出就获得了专家学者的关注和应用发展。

CKF 算法在近似非线性 Gauss 滤波中的五个 Gauss 积分时, 利用球面径向容积准则开展了严密的数学理论推理, 算法在数学理论上具有严格的数学论证, 而 UKF 算法的数学基础比较薄弱, 作者仅依据“对概率分布进行近似要比对非线性函数进行近似容易得多”这一思想提出的 UT 变换思路, 继而推导了 UKF 算法。因此相比于 CKF 算法, 容积点采样策略单一, UKF 算法的 Sigma 采样点策略多种多样。本书对 UKF 算法的采样点策略作了完整论述, 形成了多种 UKF 算法或者其变形算法; CKF 算法的容积采样点为  $2n$  个, 其权值系数都为  $1/2n$ 。而在 UKF 算法中, 不同的采样点策略获得的采样点数目不同, 相应的采样点权值系数也不同, 并且其采样点权值系数有可能为负值, 可能导致 UKF 算法在滤波计算过程中协方差非正定, 出现滤波发散的情况; 同时, 即使协方差矩阵正定, 也会由于计算机字长和中心采样点权值负数导致积分误差增大, 影响滤波计算精度和计算效能。CKF 算法的容积采样点权值皆为正值, 不存在加权求和导致的协方差非正定问题。另外, 在非线性系统滤波计算中, 使用积分公式通常存在着数值稳定性问题。一般来说, 积分公式最好同时具备两个性质: 积分点集位于积分区间内, 权值为正数。这种积分公式计算稳定, 逼近误差较小。对于 UKF 算法, 具备第一个性质, 但是在高维情形下, 第二个性质就难以保证了。通常, 以积分点权值的绝对值的和作为衡量积分公式数值稳定性指标, 被称为稳定因子。CKF 算法的稳定因子为 1, 可以认为是近似 Gauss 积分中最为理想的算法, UKF 算法的稳定因子随着状态变量的维数增长而线性增长。有文献推定, UKF 算法, 包括 CDKF 算法, 在应用于高维系统时可能会遇到困难, 而 CKF 算法的先天优势不存在该问题。GHKF (Gauss-Hermite Kalman Filtering) 算法的稳定因



子也是1,但是其限于计算量问题,难以实现,相比于GHKF算法,CKF算法计算量较小,所以目前CKF算法在各种估计问题中获得了广泛的关注和应用。

粒子滤波技术<sup>[48-50]</sup>是基于Bayesian统计推断的一种非线性滤波算法,它把状态空间中随机搜索概念引入到滤波算法中,不仅能够实现理论上的最优计算,而且适用于非线性、非高斯的一般非线性系统。粒子滤波算法的核心是利用一些随机样本(粒子)表示系统随机变量的后验概率密度,得到基于物理模型的近似最优数值解,而不是对近似模型进行最优滤波。因此粒子滤波的关键是如何得到后验概率分布的样本,其基本思想是选取一个重要性概率密度得到后验概率分布的带有相关权值的随机样本(粒子),然后在测量的基础上,调节权值的大小和粒子的位置,当粒子数很大时,此时的概率估计等同于后验概率密度,从而得到状态估计值。但是最初的粒子滤波算法存在着粒子数退化现象和粒子耗尽问题,随后人们结合其他方法提出了许多改进粒子滤波的算法,如高斯粒子滤波算法<sup>[51]</sup>、Unscented粒子滤波算法<sup>[52]</sup>和EKF粒子滤波算法<sup>[53]</sup>等。

从上面的论述内容可以看出,现代非线性滤波算法都是采用线性化近似或者逼近得到次优估计结果,根据非线性系统模型线性化和逼近方法的不同,目前非线性滤波理论方法可分为下面几类:

① 解析逼近法,如扩展Kalman滤波算法<sup>[54-55]</sup>,是通过将非线性函数的Taylor级数展开,取其一阶或者二阶表达式代表非线性函数,再利用Kalman滤波进行最优估计得到次优滤波结果。

② 直接数值逼近法,如插值滤波算法<sup>[56-57]</sup>。

③ 基于Mente Calo仿真法,如粒子滤波算法<sup>[58-61]</sup>。

④ 基于采样逼近法,如典型的Sigma点非线性滤波<sup>[62-66]</sup>,是把一组代表系统状态变量或者系统信号的采样点进行UT变换,然后对它们的均值和方差进行参数化,经过逐步迭代逼近系统状态变量或系统信号的真实值,从而完成系统状态变量或者系统信号的最优估计。

其中插值类非线性滤波算法、CKF算法、UKF算法和EKF算法可归结为确定性类非线性滤波方法,而粒子滤波、Bayesian滤波和Gauss滤波算法可归结为随机搜索类滤波算法。

### 1.1.2 导航系统理论研究发展

现代化海战是海空天立体化海战,能否掌握制空权,成为海战尤其是远洋海战最核心、最重要也最基本的条件,而获取远洋海军制空能力最有效的手段就是拥有能够搭载舰载机的大型舰船。是否拥有大型舰船及其具有怎样的性能和作战能力,成为衡量一个国家海军实力、国家海洋战略政策甚至是国际地位的重要标志。大型舰船是现代化远洋海军必须拥有的战略性力量,是一个国家海军能否跨入远洋化的标志。

随着计算机技术、微电子技术、激光技术、现代控制理论等最新理论技术的发展