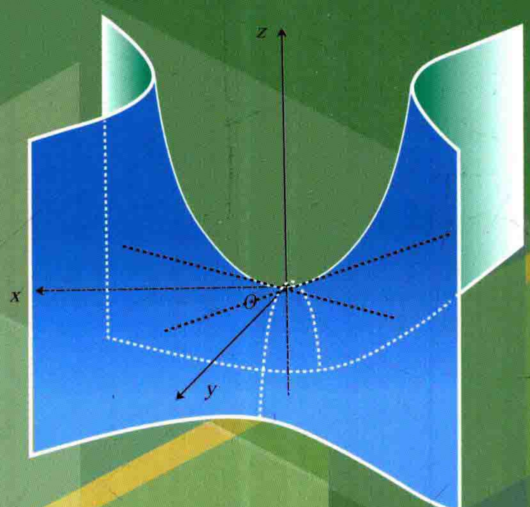
普通高等教育“十三五”规划教材
大学本科数学类专业基础课程系列丛书

空间解析几何

刘建成　贺　群　编著



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

大学本科数学类专业基础课程系列丛书

空间解析几何

刘建成　贺　群　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在同济大学数学科学学院和西北师范大学数学与统计学院各专业多次讲授空间解析几何课程的基础上形成的，内容包括空间坐标系、向量代数、平面与空间直线、直纹面与旋转曲面、二次曲面、等距变换与仿射变换等. 本书结构紧凑，各章节的主要数学思想显著突出，注重展现数学知识的发生过程和数学问题解决的思维过程，强调几何的直观性，努力处理好几何与代数的关系.

本书可作为高等院校数学类专业本科生的教学用书，也可作为相关专业教师和科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/刘建成，贺群编著. —北京：科学出版社，2018.1
大学本科数学类专业基础课程系列丛书
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-055614-1

Ⅰ. ①空… Ⅱ. ①刘… ②贺… Ⅲ. ①立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 286690 号

责任编辑：胡海霞／责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东／封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张：9 3/8
字数：213 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

空间解析几何是高等学校数学与应用数学专业的一门重要基础课程. 它是科学和工程技术的基本数学工具之一.

本书是笔者结合多年讲授空间解析几何课程的教学心得, 在参阅国内外若干颇具特色的专著、教材和其他文献, 对课程讲稿进行反复修改、整理和扩充的基础上编著而成的. 本书主要内容是用代数方法 (向量法、坐标法) 讨论一些简单的空间图形 (如直线、平面、二次曲面) 和变换 (正交变换、仿射变换) 的性质. 本书分 6 章编排, 依次为空间坐标系、向量代数、平面与空间直线、直纹面与旋转曲面、二次曲面、等距变换与仿射变换. 这些内容在代数、分析、力学、物理学和许多工程技术领域里都有广泛的应用.

本书力求展示下述特色.

(1) 每章开始都有简短的导语, 对该章节知识体系作宏观描述和概括. 导语既是课前预习的引导, 也是课后巩固和深化的参考. 通过这些导语, 一方面引导学生从高中数学向大学数学课程的学习方法和独立思考习惯转变; 另一方面指导和点拨学生从模仿局部计算转向对内容体系的宏观把握.

(2) 突出将代数化结果以向量形式呈现. 目的是为了留住几何直观, 再现建立模型的痕迹和解决问题的数学思想或方法, 同时也兼顾表达的简洁性和不同标架下坐标表示的通用性. 由于本书第 2 章对向量运算的坐标表示有详细介绍, 所以很容易将向量表达式在适当坐标系下转化为坐标形式的表达式或方程.

(3) 在解决几何问题时, 既侧重几何事实的向量代数表述, 又不失时机地揭示隐藏在代数运算结果背后的几何事实. 这种几何语言与代数语言的信息交换能力在数学后继课程的学习中尤为重要. 客观地说, 这种能力和完整的数形结合的思想在中学阶段并未得到足够的训练和培养. 本书尝试通过空间解析几何课程的教学提升学生这方面的能力和数学素养.

(4) 空间坐标系 (包括直角坐标系、球面坐标系和柱面坐标系) 是第 1 章的主要内容, 其构思完全类似于中学平面直角坐标系. 这样做, 一方面是为了能与学生高中知识更加自然地衔接, 将几何问题的研究从平面自然地过渡到空间; 另一方面从中能看出空间坐标系的多样性, 使学生对空间坐标系有一个直观的、初步的了解, 拓宽其关于坐标系概念的理解. 而随后章节将立即用向量作为工具建立标架与坐标的概念, 以形成对照, 从中会清晰地发现前者的局限性和后者的优越性.

(5) 关于二次曲面方程化简的内容, 我们着重从理论上分析坐标变换在化简二次曲面方程方面的可行性, 而不再详细介绍具体的化简过程. 其原因一方面是基于通识教育理念下课时的压缩, 这样做可避免与高等代数二次型相关内容重复; 更重要的是, 理论上得到化简所使用的坐标变换公式后, 化简过程主要是代数运算, 完全可以借助数学软件来完成. 这可使师生节省出更多的时间去思考数学思想和方法.

(6) 第 6 章介绍等距变换与仿射变换, 这部分内容严格意义上不属于传统解析几何, 而

是仿射几何学的核心内容. 由于目前大多数院校已取消了射影几何课程, 这部分内容成为一个空白. 但正交变换与仿射变换不仅是几何学重要的组成部分, 在许多其他学科也有广泛应用. 在解析几何教材中增加这部分内容也是高校几何教材改革的趋势, 目的是通过学习使学生对几何学的理解提升到一个更高的层面, 旨在强调用变换的观点研究图形的不变性质和不变量.

(7) 我们采纳了讲授数学分析和高等数学课程教师的建议, 补充介绍了极坐标系和空间直角坐标系下一些作图的方法, 希望对培养学生的空间想象能力和动手能力有所帮助.

本书为 54 学时教学用书. 使用者可依据学生的接受能力对第 6 章仿射变换的内容作出必要的取舍. 本书各节都配有精心挑选的适量习题, 以供读者练习. 许多习题不止一种求解方法, 通过探究一题多解, 一方面可以提高学生学习兴趣, 激发创新意识, 另一方面也能启迪学生思维, 有助于打开思路, 提高思维的灵活性.

笔者在写作过程中参阅了国内外有关专著、教材和其他文献, 在此对相关作者表示感谢. 本书作为科学出版社普通高等教育“十三五”规划教材, 得到了同济大学教务处、西北师范大学教务处、同济大学数学科学学院、西北师范大学数学与统计学院的大力支持与鼓励, 得到了国家自然科学基金 (项目号: 11261051, 11761061)、西北师范大学教材建设委员会、西北师范大学数学优势特色学科对本教材撰写和出版的资助, 我们在此一并致谢.

最后, 笔者对兰州大学郭聿琦教授表示深深的谢意, 正是郭先生对笔者的一贯的支持、鼓励和信任才使得本书能入选这套大学本科数学类专业基础课程系列丛书. 笔者还对本书的责任编辑胡海霞女士卓有成效的辛勤工作表示衷心的感谢.

由于我们的学识和教学经验所限, 书中的缺点和疏漏在所难免, 诚恳地希望读者批评指正.

作　者

2017 年 5 月

目　录

第 1 章　空间坐标系

1619 年, 笛卡儿住在多瑙河德国南部的一座小城 —— 诺伊堡的军营. 这是他一生的转折点, 他终日沉浸在深思中, 考虑数学和哲学问题. 1619 年 11 月 10 日, 白天, 笛卡儿生病了, 遵照医生的嘱咐, 躺在床上休息. 突然, 笛卡儿眼睛一亮, 原来正在天花板上爬来爬去的一只蜘蛛引起了他的注意. 这只蜘蛛在常人的眼里或许是平常得不能再平常了, 它正忙着在天花板靠近墙角的地方结网, 它忽而沿着墙面爬上爬下, 忽而顺着吐出丝的方向在空中缓缓移动.

笛卡儿对这只蜘蛛感兴趣, 是因为他这时正思索着用代数方法来解决几何问题, 但遇到了一个困难, 便是几何中的点如何才能用代数中的几个数表示出来呢? 晚上, 他心中充满极大的兴奋, 带着愉快而又焦急的心情去入睡, 使得他接连做噩梦, 头脑久久不能平静. 凌晨, 想着这只悬在半空中的蜘蛛, 沉思中的笛卡儿豁然开朗: 能不能用两面墙的交线及墙与天花板的交线, 来确定它的空间位置呢? 他一骨碌从床上爬起来, 在纸上画了三条互相垂直的直线, 分别表示两墙面的交线和墙与天花板的交线, 用一个点表示空间的蜘蛛, 当然可以测出这点到三个平面的距离. 这样, 蜘蛛在空中的位置就可以准确地标出来了. 笛卡儿写道: "第二天, 我开始懂得这惊人发现的基本原理." 这就是指他得到了建立解析几何的线索.

后来, 由这样两两互相垂直并相交于一点的三条直线所组成的坐标系, 就被人们称为笛卡儿直角坐标系.

用以确定数或数组与基本几何对象 (常常是点) 之间对应关系的参考系称为**坐标系**. 它是形与数结合的基础, 利用坐标系讨论问题的方法就是坐标法. 在解析几何里, 首先要建立坐标系, 在此基础上才能用方程描述复杂的几何对象 (例如曲线、曲面). 坐标法确立了空间形式与数量关系之间的联系, 使得用代数方法研究几何问题成为可能, 同时也为用分析的方法研究数学问题准备了条件.

关于坐标系, 中学平面解析几何从直观的角度, 用初等方法定义了平面直角坐标系和极坐标系. 本章将用类似的方法介绍空间最常用的三种坐标系, 即空间直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系. 它们都是平面上直角坐标系与极坐标系的自然推广. 有了坐标系, 自然可以定义空间中的图形 —— 曲线和曲面与方程之间的对应关系. 目的是让读者对坐标系和坐标法有一个初步的认识. 第 2 章引进向量代数后, 还会介绍更一般的仿射坐标系.

1.1　空间直角坐标系

在直线坐标系即数轴上, 确定一个点的位置只用一个数. 在平面直角坐标系中, 一个点的位置需要用两个数 (即它的坐标) 来确定. 在空间要确定一个点的位置, 人们总结出了各

种方法, 空间直角坐标系就是其中之一.

在空间任取定一点 O, 以 O 为原点引出三条互相垂直的数轴, 分别称为 x 轴、y 轴、z 轴. 设点 P 是空间任一点, 过点 P 分别作与这三条轴垂直的平面, 顺次交 x 轴、y 轴、z 轴于 A, B, C (图 1.1). 它们在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x, y, z. 于是点 P 就确定了三个有序实数 x, y, z. 三元组 (x, y, z) 称为 P **点的坐标**, 记作 $P(x, y, z)$. 反之, 任意给定三个有序实数 x, y, z, 我们在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作出以 x, y, z 为坐标的点 A, B, C, 过 A, B, C 分别作出与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面, 设它们相交于点 P, 显然点 P 的坐标就是 (x, y, z).

可见, 在空间中取定原点 O 与 x 轴、y 轴、z 轴后, 便建立了空间中全体点的集合与全体有序三元实数组集合之间的一个一一对应. 因此称原点 O 与 x 轴、y 轴、z 轴的组合为**空间直角坐标系**, 也称为**笛卡儿直角坐标系**, 记作 O-xyz, 其中 O 称为**坐标原点**, x 轴、y 轴、z 轴统称为**坐标轴**. 由每两条坐标轴决定的平面称为**坐标平面**, 简称为**坐标面**. 共有三个坐标面, 分别叫做 xOy 面、yOz 面、zOx 面.

直角坐标系有右手系和左手系两种. 如图 1.2 所示, 将右手四指 (拇指除外) 从 x 轴正方向弯向 y 轴正方向, 如果拇指所指向的方向与 z 轴正方向一致, 则称此直角坐标系为**右手系**, 否则称为**左手系**. 右手系与左手系作任意的平移与旋转也不会重合, 就如我们的左手与右手怎么运动也不会重合. 如无特殊声明, 本章所用坐标系均为右手直角坐标系.

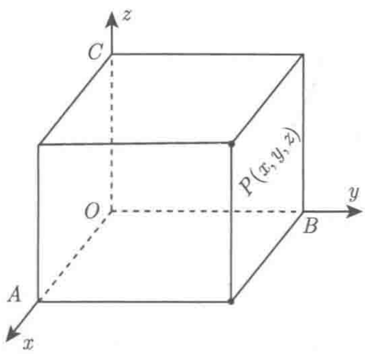


图 1.1　空间直角坐标系

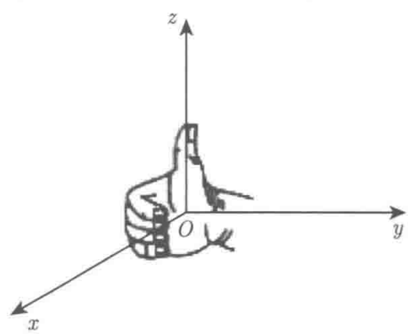


图 1.2　右手直角坐标系

显然, 坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$; x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$, y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$, z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$; yOz 面、zOx 面和 xOy 面上的点分别满足 $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$.

三个坐标面把空间分成八个区域, 每个区域称为一个**卦限**. 八个卦限依次用大写罗马数字标记, 其排列顺序如图 1.3 所示, 每个卦限中点的各个坐标的正负号见表 1.1.

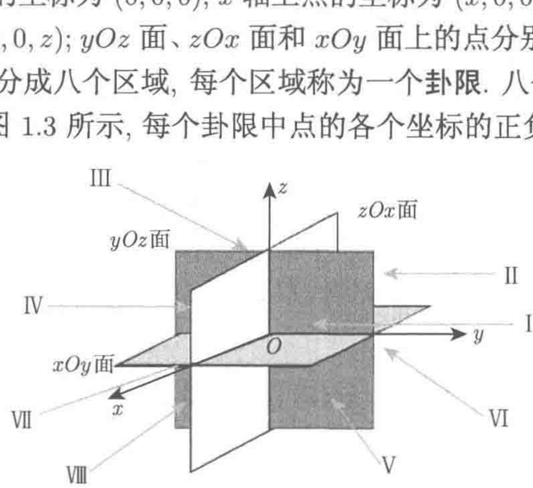


图 1.3　直角坐标系八个卦限

表 1.1 八个卦限中点的坐标符号表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

与平面直角坐标系不同, 在平面上标出空间直角坐标系中一点时, 它的位置是不确定的, 也就是说我们无法判断它落在哪一个卦限内. 解决这个问题较为直观和便捷的方法是利用坐标折线. 详言之, 如图 1.4 所示, 从点 P 向 xOy 面作垂线, 垂足为 Q. 再自 Q 向 x 轴作垂线, 垂足为 R. 那么点 P 的 z 坐标的绝对值就是 QP 的长度, 正负号依有向线段 QP 与 z 轴同向或反向而定. 有向线段这种带正负号的长度称为代数长. 也就是说, 点 P 的 z 坐标可以用有向线段 QP 的代数长来表示. 同样, 点 P 的 x 坐标和 y 坐标可以分别用有向线段 OR, RQ 的代数长来表示. 由此可见, 点 P 的坐标可以用有向折线 $ORQP$ 来表示. 这条有向折线称为**点 P 的坐标折线**. 现在, 要从坐标 (x, y, z) 作出点 P 来, 就要从原点开始画出坐标折线 $ORQP$; 反之, 要从点 P 确定坐标就要从点 P 开始画出坐标折线 $PQRO$.

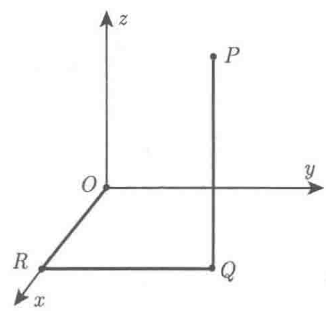


图 1.4 坐标折线

最后, 从点在直角坐标系中坐标的定义, 结合图 1.4 不难得到空间点到坐标原点、三条坐标轴及三个坐标面的距离, 我们把这些都留给读者作为习题完成. 至于空间任两点间的距离, 尽管借助平面上两点间距离公式及一点立体几何的知识也是容易得到的, 不过, 在第 2 章用向量代数的工具将会更简便.

习 题 1.1

1. 在直角坐标系 O-xyz 中, 求点 $P(x, y, z)$ 分别到坐标原点、三条坐标轴及三个坐标面的距离.

2. 在直角坐标系 O-xyz 中, 用坐标折线标出点 $P(1, 2, -1)$ 和 $M(-1, 3, 2)$ 的位置.

3. 在直角坐标系 O-xyz 中, 设 $P(2, 3, -1)$, $M(a, b, c)$. 分别求这两点关于坐标面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

1.2 轨迹与方程

建立了空间坐标系以后, 点与它的坐标就一一对应起来了. 于是, 空间曲面和曲线作为满足某些条件的**动点**的轨迹, 也就可以用其上动点坐标满足的方程 (组) 来表示. 本节我们首先定义一般曲面和空间曲线与方程 (组) 之间的对应关系, 并用坐标法建立某些特殊曲线和曲面的方程. 由于实际问题的复杂性, 坐标法有它的局限性, 所以在第 2 章我们还将建立向量法, 然后将坐标法和向量法结合起来, 在后续章节建立更多更一般的曲线和曲面的方程.

1.2.1 曲面的一般方程和参数方程

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样, 在空间解析几何中, 任何曲面都看作点的几何轨迹. 在这样的意义下, 若曲面 S 和一个三元方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{1.1}$$

之间满足如下关系:

(1) 完备性: 曲面 S 上每一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程 (1.1);

(2) 纯粹性: 方程 (1.1) 的任一解 (x, y, z) 都是曲面 S 上某点的坐标. 则方程 (1.1) 就称为**曲面 S 的 (一般) 方程**, 而曲面 S 称为**方程 (1.1) 的图形**, 或者直接用方程来代表, 记为 "$S: F(x, y, z)=0$". 上述定义中, 纯粹性与完备性缺一不可.

如果曲面方程没有实点满足, 我们就称它为虚曲面, 如 $x^2+y^2+z^2+1=0$. 有时方程只表示空间一点或一条曲线, 如 $x^2+y^2+z^2=0$ 表示原点, $x^2+y^2=0$ 表示 z 轴. 此时, 我们称方程是退化的. 一般情况下, 方程 (1.1) 表示空间一张曲面.

求曲面的方程实际上就是在确定的坐标系下, 把曲面上点的几何特征性质用点的坐标满足的代数关系来表示.

例 1.1 平行于 xOy 面, 且与 z 轴交于 $(0,0,c)$ 的平面的方程是 $z=c$.

证明 容易看到, 对给定平面上一点 (x, y, z), 一定有 $z=c$, 即完备性满足. 反之, 任意一点 $P(x, y, z)$, 只要它的坐标满足 $z=c$, 就一定在给定平面上, 纯粹性也满足.

同理, $x=a$ 和 $y=b$ 分别表示平行于 yOz 面和 xOz 面的平面方程. 特别地, $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 分别表示 yOz 面、xOz 面和 xOy 面.

空间的点有三个坐标, 每个坐标都可以独立地任意变动, 因此它有三个自由度. 同理, 直线和平面上的点分别有一个和两个自由度. 当空间中点的坐标受到某方程 $F(x, y, z)=0$ 的约束后, 便只有两个自由度, 所得的图形一般是空间一张曲面. 所以, 当考虑用参数来表示曲面时, 需要两个参数. 于是我们可以如下给出曲面参数方程的定义.

一般来说, 在空间直角坐标系中, 如果点的坐标 (x, y, z) 表示成两个变量 u, v 的函数

$$\left\{\begin{array}{l}
x=f(u, v), \\
y=g(u, v), \quad a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d. \\
z=h(u, v),
\end{array}\right. \tag{1.2}$$

对于 u, v 在取值范围内的每对值, 由方程 (1.2) 所确定的点 (x, y, z) 都在某一曲面 S 上; 反之, S 上每点的坐标 x, y, z 都可由 u, v 在取值范围内的一对值通过方程 (1.2) 来表示, 则方程 (1.2) 称为曲面 S 的**参数方程**, u, v 称为**参数**. 事实上, 曲面 S 的参数方程就是平面上的点集 $[a, b] \times[c, d]$ 到曲面 S 的一个到上的映射. 从曲面的参数方程消去参数 u, v 就可得到曲面的一般方程.

例 1.2 求球心在坐标原点、半径为 R 的球面的方程.

解 球面是空间中到一个定点的距离等于常数的点的轨迹, 其中定点为球面的球心, 定长为球面的半径.

设 $P(x,y,z)$ 为球面上任一点, 于是有 $OP=R$. 因 $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 所以 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$, 即

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{1.3}$$

由此可见点 P 的坐标 (x,y,z) 满足方程 (1.3). 反之, 若点 Q 的坐标 (x,y,z) 满足方程 (1.3), 将方程 (1.3) 两边开平方, 得到 $OQ=R$. 因此点 Q 在以原点 O 为球心、R 为半径的球面上. 方程 (1.3) 称为球心在坐标原点、半径为 R 的**球面的一般方程**.

下面我们再来建立该球面的一种参数方程. 如图 1.5 所示, 自 P 引 xOy 面的垂线, 垂足为 Q. θ 为 xOy 面上从 x 轴正向逆时针(从 z 轴正向往下看) 方向旋转到 OQ 的转角 $(0\leqslant\theta<2\pi)$. φ 为 OQ 到 OP 的角, $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, 当点 P 在上半球面时, φ 为正; 当点 P 在下半球面时, φ 为负. 于是, 点 P 的位置由角度 θ 和 φ 完全确定, 从而点 P 的坐标可用它们表示.

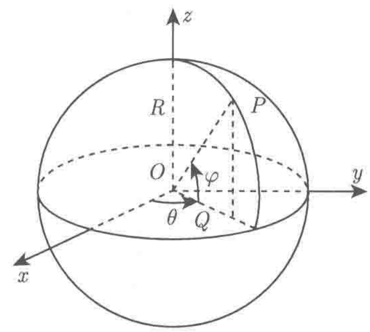


图 1.5 球面

由图 1.5 不难看出

$$\begin{cases} x=R\cos\varphi\cos\theta, \\ y=R\cos\varphi\sin\theta, \qquad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}. \\ z=R\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.4}$$

这就是球心在坐标原点、半径为 R 的**球面的参数方程**.

球面的参数方程 (1.4) 中的参数 θ 和 φ, 在地理上通常称为经度和纬度. 不过, 对于地球, 经度 (即参数 θ) 的取值范围是 $-\pi\leqslant\theta<\pi$, 即 $-180^\circ\sim180^\circ$.

例 1.3 *求以 z 轴为对称轴、半径为 R 的直圆柱面的方程.*

解 直圆柱面是到一条定直线的距离等于定长的空间点的轨迹 (图 1.6). 定直线叫做直圆柱面的对称轴, 定长叫做直圆柱面的半径.

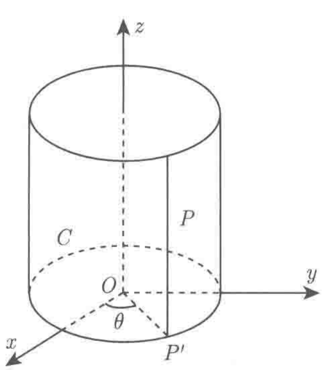


图 1.6 直圆柱面

设 $P(x,y,z)$ 是所求圆柱面上的任一点. 于是点 P 到 z 轴的距离为 R, 即有

$$x^2+y^2=R^2. \tag{1.5}$$

即所求圆柱面上任一点 P 的坐标 (x,y,z) 都满足方程 (1.5).

反之, 若一点 $P(x,y,z)$ 的坐标满足方程 (1.5). 过 P 作 z 轴的平行线交 xOy 面于一点 P', 则点 P' 的坐标为 $(x,y,0)$. 显见点 P' 的坐标也满足方程 (1.5), 换句话说, 点 P' 到 z 轴的距离为 R. 这表明 P' 在以 z 轴为对称轴、R 为半径的直圆柱面上, 进而点 P 也在以 z 轴为对称轴、R 为半径的直圆柱面上. 结合两方面我们得知方程 (1.5) 即为所求**直圆柱面的一般方程**.

设 $P(x,y,z)$ 是圆柱面上任一点, 自点 P 向 xOy 面引垂线, 垂足为 P'. 如图 1.6 所示, θ 是由 x 轴在 xOy 面上绕 O 点逆时针 (从 z 轴正向往下看) 旋转到 OP' 位置时所转过的角度. 则 P' 点的坐标为 $(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$. 从而 P 点的坐标就是 $(R\cos\theta, R\sin\theta, z)$. 由此我们得到

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \\ z = t, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 θ, t 为**参数**, 其取值范围分别为 $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $-\infty < t < +\infty$. 方程 (1.6) 称为以 z 轴为对称轴、半径为 R 的**直圆柱面的参数方程**.

1.2.2　空间曲线的一般方程和参数方程

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中, 一条空间曲线 C 和一个三元方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

之间, 如果满足如下关系:

(1) 曲线 C 上每点的坐标 (x,y,z) 都满足方程组 (1.7);

(2) 以方程组 (1.7) 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

那么方程组 (1.7) 称为**空间曲线 C 的一般方程**, 而曲线 C 称为方程组 (1.7) 的图形.

例 1.4　*在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中, z 轴可以看成 xOz 面与 yOz 面的交线, 其方程为*

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

类似地, x 轴和 y 轴的方程可分别表示为

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

通常, 两个曲面相交, 交线为一条曲线. 由于通过同一条曲线的曲面可以有很多个, 从其中任选两个, 将它们的方程联立起来, 只要这些方程组是同解的, 它们就都是这条空间曲线的方程. 因此空间曲线的方程不唯一. 例如方程组

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

是同解方程组, 它们都可作为 z 轴的方程. 再如, 下面三个方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

都表示位于 xOy 面上圆心在原点、半径为 R 的圆, 它们分别是球面与 xOy 面的交线、直圆柱面与 xOy 面的交线、直圆柱面与球面的交线.

当然, 联立任意给定的两个曲面方程可能不表示任何空间曲线. 如方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

不表示任何空间曲线. 因为是两个同心球面, 没有任何公共点. 从代数上看, 这是一对矛盾的方程组, 同时满足这两个方程的解 x, y, z 是不存在的.

类似于曲面的参数方程, 下面我们再介绍空间曲线的参数方程. 由于空间曲线是受到方程组的约束, 其上点便只有一个自由度. 所以空间曲线的参数方程是一个参变量的方程.

在空间直角坐标系 O-xyz 中, 若点的坐标 (x, y, z) 表示为一个变量 t 的函数,

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \\ z=h(t), \end{cases} \tag{1.8}$$

对于 t 在其取值范围内的一个值, 由方程 (1.8) 所确定的点都在曲线 C 上; 反之, 曲线 C 上的每点的坐标都可以由 t 在其取值范围内的某个值通过方程 (1.8) 来表示, 则方程 (1.8) 称为**曲线 C 的参数方程**, t 称为**参数**. 同样, 曲线 C 的参数方程是点集 $[a, b]$ 到曲线 C 的一个到上的映射. 从曲线的参数方程消去参数 t, 就可以得到曲线的一般方程.

例 1.5 *一质点一方面绕一轴线做等角速度 ω 的圆周运动 (半径为 R), 另一方面做平行于轴线的匀速直线运动, 其速度与角速度成正比, 求质点运动的轨迹方程.*

解 如图 1.7 建立空间直角坐标系 O-xyz, 使 z 轴重合于轴线, 并设质点运动的起点为点 $A(R, 0, 0)$. 由条件知质点的直线运动速度为 $b\omega$, b 为非零常数.

设经过 t 秒后, 质点由点 $A(R, 0, 0)$ 运动到 $P(x, y, z)$, 则有 $z=b\omega t$. 记点 P 在 xOy 面上的投影为 N. 则在 t 时刻, 点 P 沿着圆周的转角为 $\angle AON=\omega t$. 所以, P 点的坐标 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x=R\cos(\omega t), \\ y=R\sin(\omega t), \\ z=b\omega t. \end{cases}$$

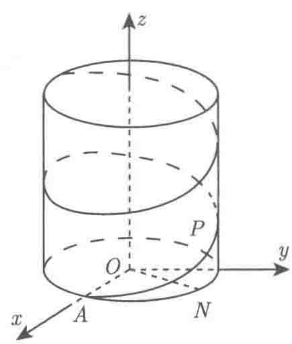


图 1.7 圆柱螺线

这就是所求质点运动轨迹的参数方程, 其中 $0 \leqslant t < +\infty$ 为参数.

由参数方程可见, 该轨迹是直圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上一条曲线, 称为**圆柱螺线**. 消去参数 t, 得到圆柱螺线的一般方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x=R\cos\dfrac{z}{b}, \end{cases}$$

其中第一式为圆柱螺线所在直圆柱面的方程; 从第二式已经很难辨认它所表示的几何图形. 因此, 有时仅从一般方程不容易看清楚曲线的形状, 而借助于参数方程却比较容易了解曲线的图形. 在实际问题中, 特别是求物体运动的轨迹时, 常常用参数方程. 一般方程和参数方程各有所长, 读者要学会两种方程的相互转化.

几何上, 在一张长方形纸上画一条斜线, 然后把纸卷成圆柱面, 该直线可形成圆柱螺线. 圆柱螺线是实践中常用的曲线. 如平头螺丝钉的外缘曲线就是圆柱螺线. 当我们拧紧平头螺丝钉时, 它的外缘曲线上的任一点 M, 一方面绕螺丝钉的轴旋转, 另一方面又沿平行于轴线的方向前进, 点 M 就走出一条圆柱螺线. 从圆柱螺线的参数方程不难看出, 当点 M 转过一周时, 即 $\omega t = 2\pi$, 其上升的高度为一个固定值 $2\pi b$, 这个固定的高度在工程技术上叫做**螺距**.

习　题　1.2

1. 研究下列方程代表的几何图形:

(1) $x+y=0$;　(2) $x-y=0$;　(3) $x^2-y^2=0$;　(4) $xyz=0$.

2. 将曲面的参数方程 $\begin{cases} x=a(u+v), \\ y=b(u-v), \\ z=uv \end{cases}$ $(-\infty < u,v < +\infty)$ 化为一般方程.

3. 写出以原点为球心、半径为 5 的球面与过点 $(1,1,4)$ 平行于 xOy 面的平面的交线方程, 并将其改写为参数方程.

4. 解释方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$ 表示的几何图形.

1.3　柱面坐标与球面坐标

在空间除了直角坐标系外, 还有两种常用的坐标系, 即球面坐标系和柱面坐标系. 对某些特殊的图形, 用它们来表示方程更为简洁. 在应用方面, 如微积分中计算三重积分或曲面积分时, 柱面坐标和球面坐标起到了非常重要的作用.

由于柱面坐标系和球面坐标系都是平面极坐标系的推广, 为此, 我们先简要复习平面极坐标系.

1.3.1　平面极坐标系

用一对有序实数来确定平面上点的位置的方法, 在平面直角坐标系中是最常用的方法, 但不是唯一的方法. 另一种常用的方法是用角度和长度来确定平面上点的位置. 比如指路牌上 "由此向东 50 米" 正是用角度和长度确定位置的. 再如炮兵向指示目标射击时, 用直角坐标的纵、横交点来确定目标位置的方法就不如用方向和距离来确定目标位置的方法好. 像这种用角度和长度来确定位置的方法是建立平面极坐标系的基本思想.

如图 1.8 所示, 在平面内取一定点 O, 从点 O 引一条射线 Ox, 并确定一个单位长度和计算角度 θ 的正方向 (一般取逆时针方向为正方向), 这样就在平面上建立了一种新的坐标系 ——**极坐标系**. 在平面极坐标系中, 任一点 P 的位置可由 OP 的长度 ρ 和从 Ox 到 OP 的角度 θ 来表示. 这里, 定点 O 称为**极点**, 定射线 Ox 称为**极轴**, ρ 称为**极径**, θ 称为**极角**. 有序实数对 (ρ,θ) 称为点 P 的**极坐标**, 记作 $P(\rho,\theta)$.

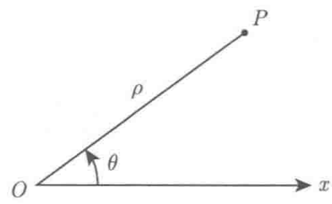


图 1.8　平面极坐标系

当 $\rho=0$ 时, 不论 θ 取什么值, $(0,\theta)$ 都表示极点; 当 $\theta=0$ 时, 不论 ρ 取什么正值, 点 $(\rho,0)$ 都在极轴上.

当 $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$ 时, 对于平面上任一点 P (除极点外), 都可以找到唯一的一对实数 (ρ,θ) 与之对应; 反过来, 对于任意一对实数 (ρ,θ), 也总可以在平面上找到唯一的一点 P 与之对应, 也就是说, 当 ρ 和 θ 在上述范围内时, 平面上的点 P (除极点外) 与实数对 (ρ,θ) 之间具有一一对应的关系.

由于实际应用的需要, 极径 ρ 和极角 θ 也可以取负值. 当 $\rho>0$ 时, 规定在角 θ 的终边上取点 P, 使得 $|OP|=\rho$, 如图 1.9 (a) 所示; 当 $\rho<0$ 时, 则在角 θ 的终边的反向延长线上取点 P, 使得 $|OP|=|\rho|$, 如图 1.9 (b) 所示; 当 $\theta>0$ 时, 极轴按逆时针方向旋转; 当 $\theta<0$ 时, 极轴按顺时针方向旋转.

极坐标系和直角坐标系虽是两种不同的坐标系, 但点的极坐标与直角坐标之间还可以进行互相转换. 如图 1.10 所示, 把直角坐标系的原点作为极点, x 轴的正半轴作为极轴, 并在两种坐标系中取相同的单位长度. 设平面上任一点 P 的直角坐标为 (x,y), 极坐标为 (ρ,θ), 从而用极坐标表示直角坐标的方程为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases} \tag{1.9}$$

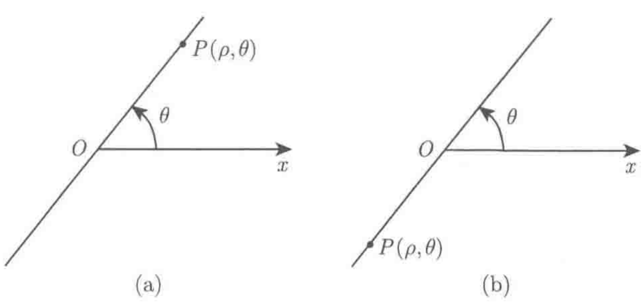


图 1.9　极径与极角的取值

从式 (1.9) 我们可以解得

$$\begin{cases} \rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.10}$$

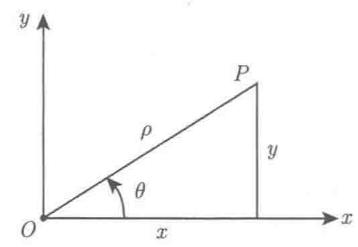


图 1.10 直角坐标与极坐标互化

从式 (1.9) 及式 (1.10) 我们可以由已知点的直角坐标求其极坐标, 或由已知点的极坐标求其直角坐标.

最简单的极坐标方程 $\theta=$ 常数表示直线; 而 $\rho=r$ (正常数) 表示圆心在极点、半径为 r 的圆. 当然, 中学平面解析几何课程中还介绍了关于圆的其他形式的极坐标方程 (图 1.11):

$\rho=\pm 2r\cos\theta$, 表示过极点、圆心在极轴上、半径为 r 的圆;

$\rho=\pm 2r\sin\theta$, 表示与极轴在极点相切、半径为 r 的圆.

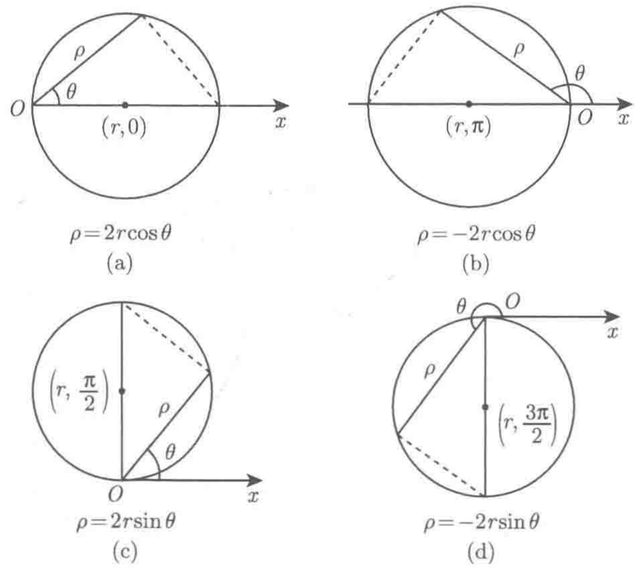


图 1.11 圆的极坐标方程及图形

下面我们举例说明画极坐标方程表示的曲线草图. 本节习题中列举了一些常见而有趣的极坐标方程, 请读者练习画出草图, 以加强几何直观, 且为后继课程的学习做准备.

例 1.6 作曲线 $\rho=a\cos 3\theta$ 的图形.

解 (1) 周期性: 用 $\pi+\theta$ 代替 θ, 得到 $\rho_1=a\cos(3\theta+3\pi)=-a\cos 3\theta=-\rho$, 而 $(-\rho,\theta+\pi)$ 和 (ρ,θ) 代表同样的点, 所以曲线的周期是 π.

(2) 对称性: 用 $-\theta$ 代替 θ, $\rho_1=a\cos(-3\theta)=a\cos 3\theta=\rho$, 由此可见, 如果 (ρ,θ) 是曲线上的一点, $(\rho,-\theta)$ 一定也是曲线上的一点, 这就证明了曲线对称于极轴. 因此作图时只需作周期的一半, 其余部分可根据对称性画出来.

(3) 极径的极值: 当 $|\cos 3\theta|=1$ 时, $|\rho|=a$ 为极大值, 则此时 $\theta=0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ 及 π.

(4) 曲线通过极点时的极角: 当 $\cos 3\theta=0$ 时, $\rho=0$, 也就是当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{5\pi}{6}$ 时, $\rho=0$, 曲线通过极点.

(5) 列表作图 $\left(\text{因周期是 } \pi \text{ 而且又对称于极轴, 所以作图时, 只需取 } \theta \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \dfrac{\pi}{2}\right)$.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	a	+	0	−	$-a$	−	0

曲线的图形如图 1.12 所示 (虚线部分是依对称性作出的), 这条曲线叫做**三叶玫瑰线**. 类似地, 读者可作出 $\rho = a\sin 3\theta$ 的图形 (图 1.13), 它表示的曲线也称为三叶玫瑰线.

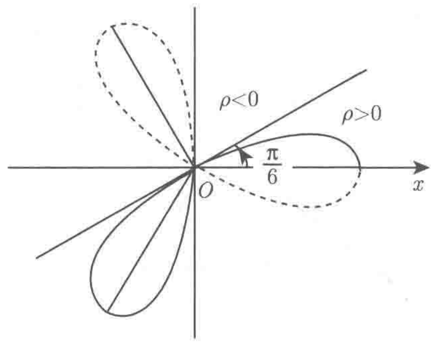


图 1.12 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$

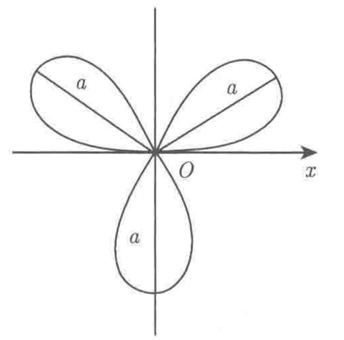


图 1.13 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$

1.3.2 球面坐标

设有空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$, 空间中与原点距离为 R 的任一点可看作是在以原点为球心、R 为半径的球面上. 由球面的参数方程 (1.4) 可知, 该点在球面上的位置由一组 θ 和 φ 的值唯一确定. 如果距离 R 也是变数, 改用 ρ 表示时, 那么空间中任一点 P 的位置可用有序三元数组 (ρ,φ,θ) 来确定. 除了 z 轴上的点外, 点 P 和 (ρ,φ,θ) 是一一对应的 (P 为原点时, θ 和 φ 的值任意; P 是 z 轴上原点以外的任一点时, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$, θ 的值任意). 我们把有序三元数组 (ρ,φ,θ) 称为点 P 的**球面坐标或空间极坐标**, 记为 $P(\rho,\varphi,\theta)$, 这三个坐标的变化范围是

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

由球面的参数方程 (1.4) 可知, 点 P 的直角坐标 (x,y,z) 与球面坐标 (ρ,φ,θ) 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

球面坐标系中三个坐标面为 (图 1.14):

$\rho =$ 常数, 表示以 O 为中心、ρ 为半径的球面;

$\theta =$ 常数, 表示过 z 轴的半平面, 它与 xOz 面的夹角为 θ;

$\varphi =$ 常数, 表示以 O 为顶点、z 轴为轴、半顶角为 $\frac{\pi}{2} - \varphi$的圆锥面的一腔.

球面坐标在地理学、天文学中有着广泛的应用. 在测量实践中, 角 θ 称为被测点 $P(\rho,\varphi,\theta)$ 的**方位角**, φ 称为**高低角**.