

 小学数学教师 · 新经典

# 小学数学教材中的大道理

——核心概念的理解与呈现

Xiaoxue Shuxue Jiaocai Zhong De Dadaoli  
Hexin Gainian De Lijie Yu Chengxian

张奠宙/巩子坤/任敏龙/张园/殷文娣 ©著

M a t h e m a t i c s      T e a c h e r



上海教育出版社  
SHANGHAI EDUCATIONAL  
PUBLISHING HOUSE



小学数学教师·新经典

# 小学数学教材中的大道理

——核心概念的理解与呈现

Xiaoxue Shuxue Jiaocai Zhong De Dadaoli  
Hexin Gainian De Lijie Yu Chengxian

张奠宙/巩子坤/任敏龙/张园/殷文娣◎著

M a t h e m a t i c s

T e a c h e r



上海教育出版社  
SHANGHAI EDUCATIONAL  
PUBLISHING HOUSE

## 图书在版编目(CIP)数据

小学数学教材中的大道理:核心概念的理解与呈现/张奠宙等著.  
—上海:上海教育出版社,2018.3(2018.4重印)  
(小学数学教师·新经典)

ISBN 978-7-5444-7943-1

I. ①小… II. ①张… III. ①小学数学课—教学研究IV. ①  
G623.502

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第326792号



责任编辑 蒋徐巍 曲春蕊

封面设计 王捷

## 小学数学教材中的大道理——核心概念的理解与呈现

张奠宙 巩子坤 任敏龙 张园 殷文娣著

出版发行 上海教育出版社有限公司

官 网 [www.seph.com.cn](http://www.seph.com.cn)

地 址 上海市永福路123号

邮 编 200031

印 刷 常熟华顺印刷有限公司

开 本 700×1000 1/16 印张 27.5 插页 3

字 数 420千字

版 次 2018年3月第1版

印 次 2018年4月第2次印刷

书 号 ISBN 978-7-5444-7943-1/G·6557

定 价 68.00元



## 前言

这是一本探讨小学数学中核心概念的文集。

中国小学数学教学在国际上享有盛誉，教材的编写出版功不可没。但是，世界上没有十全十美的事情，教材也不能例外。我们对现行小学数学教材进行评论和建议，是为了更好地推进小学数学教材建设，进而推进数学教学改革，为建设中国特色的数学教育大厦添砖加瓦。

小学数学教学，对我来说，本来是一个陌生的课题。事实上，一个在数学系工作了一辈子的教师，很少走进小学教室之门，怎么会研究起小学数学教材呢？

事情要从 2013 年说起。那年我 80 岁了，耳聋，坐轮椅，但脑子没坏，还能思考。上海市教育委员会教学研究室的章敏女士告诉我，教学研究室领导让我看看上海的中小学数学教材，挑挑毛病，以利于提高教材的质量，还拨了专款支持。于是，就有机会看了一些小学数学教材。给我的印象是，小学数学有一些流传很广的认识和表述，从现代数学观点来看是有所欠缺的。《小学教学(数学版)》杂志的殷现宾主编知道后，希望我能写出来以供参考。于是，商定以“评论与建议”为栏目在《小学教学(数学版)》连载，每期一篇。后来又在《教学月刊·小学版(数学)》上刊出一部分。发表以后，殷主编告诉我读者反响不错，并先后转达了吴正宪、王永春、朱乐平、邱兴华等名家的关切。人民教育出版社和北京师范大学出版社相继寄来全套小学数学教材，以示支持。这使我很受鼓舞。事实上，无论评论者还是被评论者，大家都在为同一个目标努力：让未来的孩子们获

得更好的数学素养。

评论文章持续了两年。2015年底,上海教育出版社的赵海燕、蒋徐巍两位编辑来访,确定将这些文章结集出版,书名就叫《小学数学教材中的大道理》。意思是,虽然小学数学的学习难度不大,但它背后所依靠的道理并不小。我们的目的是将其中的核心概念进行梳理,给予科学的呈现。

如果仅仅把已发表的文章凑起来编成一本书,那是比较容易的。但是,我知道自己的薄弱处:缺乏小学数学教学的实践经验。我所提出的这些评论和建议是否立得住、行得通,那是需要一线教师和小学数学教育专家来评定的。我曾希望在上海组织一个小学数学教师的“数学沙龙”,由于种种原因未能成功。于是转向杭州师范大学的巩子坤教授,请他帮忙。巩教授与我是多年的老朋友,他出身高校数学系的专业课教师,数学底子扎实,后来转向研究数学教育。他在西南大学写博士论文的时候,在我这里访学了半年,常来我处讨论,许多观点比较一致。调入杭州师范大学之后我们继续合作,来往不断。听了我的请求,他立即组织一些专家朋友和学生来参与本书的编写。

子坤教授有许多在职学习的“教育硕士”研究生,正好可以作为一线教师,对我的这些评论文字进行再评论。承蒙老师们热情支持,陆续写来一些读后感,有表示赞成的,有补充改进的,也有商榷异议的。这些文字组成了一个系统栏目,我们称之为“一线回声”。

子坤教授进一步建议,为了直接听取小学数学实践者的声音,不妨邀请杭州市上城区的小学数学教研员任敏龙老师,以及杭州市长江实验小学的张园老师,大家一起座谈,当面交流看法。这真是我求之不得的好主意。于是,我们在上海、杭州陆续举行了巩子坤、任敏龙、张园、张奠宙的四人座谈,并请巩子坤教授的研究生殷文娣做记录,也参与议论。有时本书的责任编辑曲春蕊也来加入。座谈内容整理成文,就是本书各个专题的“数方夜谈”。这种谈话式的文体,话题机动灵活,说话直奔主题,不同意见及时交锋,有较强的可读性。任敏龙老师是现任教研员,参与过浙江新思维数学教材的编写,教学经验和理论积累相当丰富。张园是任教多年的资深教师,对教材和学生的了解十分精准。我听取他们的意见,如沐春风。殷文娣将谈话记录成文,大家再反复修改,每篇总有几处亮点。这次合作之愉快,终身难忘。

这样一来,我把已经发表的 28 篇文章称作“原始文稿”,就形成了本书的基本编写格局:28 个课题,每个课题配以【原始文稿】【一线回声】【数方夜谈】三类文字,力求从不同侧面对小学数学的核心概念作一点较有深度的剖析。

最后,想说一点“数学教育”和数学学科的关系。21 世纪以来的课程改革,着重于教学理念的更新,大力提倡“情境、合作、探究”的教学模式。在教学内容上,确立“概率统计”作为小学数学的一项基本学习领域。这些当然是十分重要的。但与之相比,对于小学数学里一些传统的学习课题,则往往维持现状,未作深究。因此,现行的课程标准和教材里留有许多值得探讨的不足之处。本书的出现,正是希望为弥补这一缺陷略尽绵薄之力:请大家更多关注数学核心概念的理解,以及数学本质的揭示。打个比方,如果说前些年更多关注“烹饪大厨”的厨艺,那么今后的改革希望更多地关注使用的食材。在写作本书的过程中,恰巧看到一套俄罗斯的小学数学教材。这套教材一年级就引入方程的概念,四年级就在方格纸上画函数图像……逻辑框图、图像识别、文化意境等方面都有新的处理。我们还来不及细读,先写一篇简介附在书后,敬请大家关注。另外几篇附录,则是一些小学数学教育专家的评论,都是公开发表过的,附录于此,也不妨作为一种参考。

从 2013 年酝酿写原始文稿,到本书的问世,历时四年。我是退休老人,手上没有研究项目,当然没有经费支持,也没有助手帮忙,一切活动费用都是自行解决。相对于眼下某些“教育项目”大手大脚的花费,我们可以说一无所有。所幸的是,大家为我国数学教育的改革腾飞走到一起,一切困难都克服了。对我来说,真要谢谢各位合作者。

中国在崛起,中国特色的数学教育道路也初见端倪。但是,真正的中国数学教育学派还远未形成,任重道远。让我们以充分的教育自信,汲取国内外一切先进的教育理论与实践经验,继续努力向前,向前!

张奠宙

写于华东师范大学数学系数学教育研究所

2017 年 5 月

# 目 录

## 第一部分 关于“数”“文字”与“方程”

### 课题 1 度量衡制与国际接轨是历史大趋势 / 003

【原始文稿】小学数学需要与时俱进

——从大数的读法说起 / 003

【一线回声】与时俱进,继承与发展并存

——从大数的读法说起 / 005

【数方夜谈】关于“大数的读法” / 010

### 课题 2 加法与乘法交换律不是“可以写出来”的 / 012

【原始文稿】正本清源,通过“数数”活动理解运算律

——关于加法和乘法交换律的谈话 / 012

【一线回声】关注数学本质,实现“运算律”的构建

——对“运算律”教学的几点思考 / 017

【数方夜谈】教学运算律,须先厘清运算的本质 / 019

### 课题 3 文字代表数的作用要分类,不可一锅煮 / 026

【原始文稿】把数学思想方法适当地说出来

——从“文字代表数”的意义说到方程的本质 / 026

【一线回声】“用字母表示数”的教学目标在于培养“符号意识”

——与张奠宙先生商榷 / 031

【数方夜谈】“符号代表特定的数”和“符号代表任意的数”,孰先孰后 / 036

### 课题 4 再次建议淡化“含有未知数的等式叫方程” / 039

【原始文稿】数学概念教学要融入中华文化,推陈出新  
——谈小学数学里“方程”概念的表述 / 039

【一线回声:之一】“方程的意义”教学实录 / 044

【一线回声:之二】凸显核心价值,促成意义建构  
——“认识方程”教学实践与评析 / 052

【数方夜谈】“认识方程”要突出它的建模本质与核心价值 / 058

课题5 用温度计引入负数,并不理想 / 064

【原始文稿】多多注意数学本质的揭示  
——剖析“用温度计引入负数”的优缺点 / 064

【一线回声】也来剖析“用温度计引入负数”的优缺点  
——读张奠宙先生一文的启示 / 069

【数方夜谈】负数概念不是从生活里来的,是由数学内部需要而产生的 / 074

## 第二部分 关于“除法”“分数”和“比”

课题6 忽视“包含除”后患无穷 / 081

【原始文稿】教材编写要注意防止片面的思维定势  
——评小学数学教材中忽视“包含除”的倾向 / 081

【一线回声】教材已将“偏心”进行到底 / 087

【数方夜谈】小学数学中切莫忽视“包含除”的教学价值 / 098

课题7 究竟为什么要学习分数?教材交代得不大清楚 / 104

【原始文稿】“分数”教材里一个没有解决的问题  
——谈分数与包含除的关系 / 104

【一线回声】怎么解决绳子剩余长度的表示问题  
——也谈分数与包含除的关系 / 107

【数方夜谈】分数的引入离不开“包含除” / 112

课题8 分数是用来表示大小的,为什么要回避呢 / 116



- 【原始文稿】与时俱进,推陈出新  
——谈分数定义的修改 / 116
- 【一线回声】不忘初心:由数系扩张的数学本质学分数的初步认识 / 123
- 【数方夜谈】分数是一个数,可以与自然数1比较大小 / 128
- 课题9 建议将“分数的基本性质”直称为“分数的相等性质”,好不好 / 131
- 【原始文稿】分数相等性质的数学内涵  
——兼及角的定义 / 131
- 【一线回声】重构“分数相等性质”教学,渗透“等价类”数学思想  
——读张奠宙教授一文的思考与实践 / 134
- 【数方夜谈】分数的基本性质与等价类 / 137
- 课题10 假分数“假”在哪里 / 141
- 【原始文稿】关于“真分数、假分数”教学设计的谈话 / 141
- 【一线回声】学生认识“假分数”中的问题与对策 / 145
- 【数方夜谈】思辨与追问:假分数是怎样产生的 / 149
- 课题11 小数容易分数难,何必死死捆绑在一起 / 154
- 【原始文稿】落实“四基”,要把数学思想方法适当地说出来  
——谈“小数的意义”教材的处理 / 154
- 【一线回声】谈“小数的意义”教学中数学思想方法的渗透 / 161
- 【数方夜谈】小数意义教学的重点在于位值记数与“十分”“十进”  
——对“小数的意义”教材处理的讨论 / 162
- 课题12 “比”和“除”不可混为一谈 / 169
- 【原始文稿】返璞归真 正本清源  
——“比”不能等同于除法 / 169
- 【一线回声】从“两个数相除”到“生活中的比” / 178
- 【数方夜谈】“比”和“除”在概念上的源与流 / 184

### 第三部分 关于图形与几何

#### 课题 13 用直觉理解“平行”，与中学的“平行公理”衔接 / 191

【原始文稿】小学数学课程必须坚持“混而不错”的原则

——以“平行与垂直”的教材为例 / 191

【一线回声】有而无痕 联而不乱

——关于“平行与垂直”的教学思考 / 196

【数方夜谈】“平行与垂直”的教学内涵与设想

——基于教材编写的几点讨论 / 200

#### 课题 14 用平移来定义“平行”并不妥当 / 208

【原始文稿】小学数学教材要厘清逻辑顺序

——谈平行与平移 / 208

【一线回声】反思和改进：“平移和平行”概念教学 / 210

【数方夜谈】用平移定义“平行”，究竟行不行 / 213

#### 课题 15 “一对有序的数”对应一个方块，还是对应一个点 / 217

【原始文稿】数学要源于生活，但要高于生活

——以小学六年级“位置”一节为例 / 217

【一线回声】让数学更有力量

——从“确定物体的位置”到“确定点的位置”的转变 / 222

【数方夜谈】平面坐标系的根本作用在于表示函数图像 / 227

#### 课题 16 篮球是圆的吗 / 230

【原始文稿】更多地关注数学本质与细节处理

——以圆的定义为例 / 230

【一线回声】小学数学概念教学应重视数学的本质

——以“圆的认识”教学片断为例 / 233

【数方夜谈】圆，究竟是一维图形还是二维图形 / 237

课题 17 面积的定义应该突出数学本质 / 239

【原始文稿】深入浅出,平易近人

——怎样测量长度、面积和体积 / 239

【一线回声】行走在“无声”与“有声”之间 / 244

【数方夜谈】关于求面积的数学方法和物理学方法 / 249

课题 18 面积测量的活动有点“故弄玄虚” / 254

【原始文稿】削枝强干,消除平庸

——谈小学数学教科书中“测量”的编排 / 254

【一线回声】基于学生实际 走向数学本质

——读张奠宙先生一文的思考 / 261

【数方夜谈】用脚步量教室的长度,有必要吗 / 265

课题 19 小学数学课程为什么要列入平面图形的运动 / 267

【原始文稿】小学数学如何实现直观到抽象的飞跃

——谈教材里关于“图形的运动”的处理 / 267

【一线回声】通过数学活动逐步构建平面图形运动的平台 / 272

【数方夜谈】关于图形运动的教学目标与中小学课程的衔接 / 277

课题 20 轴对称是平面图形运动,但照镜子不是 / 280

【原始文稿】天安门是轴对称图形吗 / 280

【一线回声】教学素材的选择与优化

——以“轴对称图形”为例 / 281

【数方夜谈】如何准确把握平面图形运动的教学本质 / 285

课题 21 理清概念之间的联系 / 291

【原始文稿】数学概念之间需要融会贯通

——评图形与几何中一些概念的表述 / 291

【一线回声】关注知识脉络与学生经验的联结 / 296

【数方夜谈】贯通理解线、角以及它们之间的关系 / 299

课题 22 角度定义最好不要用射线 / 305

【原始文稿】教材处理宜朴素自然、平易近人  
——关于小学数学教材里“角的认识” / 305

【一线回声】教材处理宜追本溯源、还其自然 / 311

【数方夜谈】一条直线相对于另一条直线的倾斜度,才是角的本质 / 317

#### 第四部分 其他

课题 23 教材里的“找规律”不要出现数学错误 / 323

【原始文稿】适合儿童年龄特征和避免数学差错  
——关于“找规律”及其他 / 323

【一线回声】适合儿童年龄特征的“创造规律” / 326

【数方夜谈】重复三次就算规律吗 / 329

课题 24 分类和分层都重要 / 332

【原始文稿】正本清源 力求准确  
——关于数学教材中“分类”单元的评论 / 332

【一线回声】读《正本清源 力求准确——关于数学教材中“分类”单元的评论》一文有感 / 335

【数方夜谈】关于分类与估算 / 338

课题 25 维度已经进入日常生活,小学数学不应回避 / 342

【原始文稿】浅而不错、分而不碎,着眼于数学素质的养成  
——以“维度”概念为例 / 342

【一线回声】整体着眼 系统构建 / 346

【数方夜谈】“维度”概念要不要进入小学数学 / 350

课题 26 “抽屉原理”的教学重在思想方法 / 353

【原始文稿】按“四基”的要求编写数学教材  
——以“抽屉原理”为例 / 353

【一线回声】从数学文化的角度来理解“抽屉原理” / 357

【数方夜谈】关于“抽屉原理”的教学分析 / 358

课题 27 数学文化教学的重点:数学文明对人类文明的贡献 / 362

【原始文稿】扩大文化视野,弘扬人文精神  
——关于小学数学教材里数学文化因素的设计 / 362

【一线回声】小学数学教学中要浸润数学文化 / 372

【数方夜谈】希望数学考试中能有“数学文化”的试题 / 373

课题 28 充分运用儿童的概率直觉 / 376

【原始文稿】把随机性的数学直觉“概率化”  
——关于小学数学中“概率”教学的建议 / 376

【一线回声】从教学实践看《把随机性的数学直觉“概率化”》一文 / 384

【数方夜谈】力求“理论概率和经验概率相结合” / 387

## 附录

附录 1 面向未来 大胆创新  
——一套俄罗斯小学数学教材引发的谈话 / 395

附录 2 宝贵的财富 学习的榜样  
——对张莫宙教授“评论与建议”系列文章编辑有感 / 406

附录 3 只有教对,才能教好  
——学习张莫宙教授“评论与建议”系列文章的体会 / 411

附录 4 返璞归真 平易近人  
——读张莫宙教授的文章有感 / 416

附录 5 跟张莫宙先生学教小学数学 / 421

后记 / 426



# 第一部分

## 关于“数”“文字”与“方程”

- 课题 1 度量衡制与国际接轨是历史大趋势
- 课题 2 加法与乘法交换律不是“可以写出来”的
- 课题 3 文字代表数的作用要分类,不可一锅煮
- 课题 4 再次建议淡化“含有未知数的等式叫方程”
- 课题 5 用温度计引入负数,并不理想







## 课题1 度量衡制与国际接轨是历史大趋势

### 小学数学需要与时俱进

——从大数的读法说起

文原  
稿始

(本文发表于《小学教学(数学版)》2014年第1期)

我国现在的小学数学内容及其体系,是辛亥革命之后从西方引进的。目前使用的阿拉伯数字,十、一、 $\times$ 、 $\div$ 的符号,横式、竖式的数学方法等,都和国际上所使用的一致。但是,也有一些中华文化固有的传统,仍然保持了特有的习惯用法。例如,大数的读法中外明显不同:我国是四位分节,即按万、亿来读;西方则是三位分节,即按千、百万(兆)来读。1993年,我国“国家标准 GB 3101-93”在这一问题上与国际标准接轨,其中指出:“为使多位数字便于阅读,可将数字分成组,从小数点起,向左和向右每三位分成一组,组间留一空隙……”

翻开现有的小学数学教科书,可以看到以相当多的篇幅来认识、读写大数,熟练地使用我国固有的万、亿数字体系。这完全正确。几千年来,我们的汉语言都是以“万”为基础读写大数,岂能废除?

但是,时代在进步,教育要面向世界、面向未来、面向现代化。西方以“千”为基础读取大数的方法,不可避免地逐渐成为我们生活的一部分。由于度量衡单位“千米”“千克”“吨”等被引进,并作为国家规范加以推广使用,小学数学首当其冲,在教材里已经全面使用以“千”为基础的阅读法了。

于是,就出现了问题。体育项目中的“万米”赛跑,要不要改成“10千米”呢?



某同学体重 50 千克,我说是 5 万克,算不算错呢?我们在网上可以很容易看到这样的文字:

女子竞走比赛始于 1932 年的捷克,直至 1992 年的奥运会,女子 10 千米竞走才正式成为比赛项目,2000 年悉尼奥运会改为 20 公里,在公路上进行。中国女子竞走运动员阎红、徐永久、李素杰、关平、金冰洁、陈跃玲等,曾多次刷新 5000 米及 10000 米竞走的世界纪录。

这里出现了“10 千米”“20 公里”“5000 米”“10000 米”诸多说法,显示了中外两种“大数记法”的混用。

面对这样的情形,我国数学课程标准本来应该有所规定,可是《义务教育数学课程标准(2011 年版)》(以下简称“课标 2011 年版”)对这样的细节没有顾及。那么教科书应该怎么办呢?如果采取回避的办法,自然稳妥,不会出事。但是,大数的读法只在小学数学里出现,进入中学以后再也不来讨论这一课题了。教科书既要对社会负责,也要对学生的未来负责,我们应该与时俱进地作出自己的抉择。

我们不妨设想四年级第一学期的数学教材里有这样一段“阅读材料”:

关于“大数”的读法,我国以“万”“亿”为基础,而国际上则以“千”(k)“百万”(兆, M)为基础。在有些情况下,两种读法都是允许的。例如:

1993 年,我国运动员王军霞创造的女子 10000 米长跑世界纪录,至今无人打破。这里的 10000 米可以读作十千米,也可以读作一万米。

某物体重 24500 克,这里的 24500 克也可以读作 24.5 千克。

某特种卡车可载重 20 吨,也可以说成可载重 2 万千克。

以上的建议,出于以下考虑:中国崛起,必然要走向世界,因而在某些具体措施上必须遵循某些国际惯例,与国际接轨。这就是说,有时我们不得不实行“双轨制”,即一方面保持我国的固有传统,同时也了解和适应国际上通行的做法。在目前的情势下,对于中国普通公民来说,需要知道在大数读法上我国传统与国际规则存在着差异,同时要说明两种读法都是正确的。至于哪种读法更合适,要看具体情形而定。无论如何,必须避免把国外读法当作错误去加以纠正。为了保证我国传统读法的主体地位,以上这段文字目前只作为阅读材料进行编排,大概比较合适。

与时俱进地看待小学数学,并不仅限于大数的读法。

从 20 世纪 90 年代开始,中国实行社会主义市场经济。市场经济和数学密切相关。在小学的应用题里,除了有到商场看物价、讲折扣、付账找零等“买东西”的情境,也需要有销量、成本、利润之类“卖东西”的情境出现。我们在这方面还缺乏