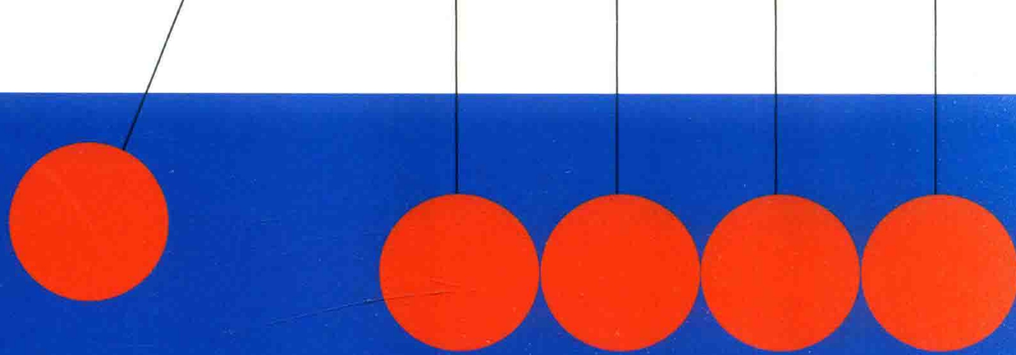

Advanced Placement for College Physics

MECHANICS

大学物理先修课教材

力学

鲁志祥　黄诗登　编著

中国科学技术大学出版社

大学物理先修课教材

力学

鲁志祥　黄诗登　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书系为大学物理类专业学生编写的普通物理力学教材，适用于有扎实的数理基础、学有余力且希望进一步探索物理世界的优秀高中生，也可供综合性理工大学和师范类大学学生、优秀高中物理教师参考.

本书以牛顿力学为主，较为全面地介绍了经典力学的理论以及解决力学问题的主要思想和方法. 希望本书对每一位学习者都有所帮助.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理先修课教材. 力学/鲁志祥，黄诗登编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.5
ISBN 978-7-312-04176-1

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①鲁… ②黄… Ⅲ. 力学—教材 Ⅳ. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 047441 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷 安徽联众印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 10.75
字数 275 千
版次 2017 年 5 月第 1 版
印次 2017 年 5 月第 1 次印刷
定价 28.00 元

前　　言

在中学开设大学物理先修课程，是一次创新性的教学改革试验，旨在为有扎实的数理基础、学有余力且希望进一步探索物理世界的优秀高中生提供具有挑战性的物理课程.力学是整个物理学的基础，是培养学生科学素养、科学思维方式、科学研究能力的起点.随着科学技术的飞速发展，力学教学的改革步伐也越来越快.

本书是在大学先修课程教学和高中奥林匹克竞赛培训的基础上，为培养物理人才而编写的，经过多年教学实践，不断修改，最终完成.本书以大学知识为主，让读者能高屋建瓴地领悟物理，同时，以大量自主招生和竞赛的题目作为例题和练习题，期望对读者的自主招生和竞赛学习有所帮助.在本书编写过程中，我们主要突出以下几点：

(1) 知识的章节安排主要参照高中的教学进度和节奏，由浅入深.

(2) 内容的深度以大学的要求为主，使学生在学习后能达到大学的要求，拿到大学的学分，进入大学后免修相关课程.

(3) 为了满足中学生参与大学自主招生和物理竞赛的需要，我们在例题和练习题中增加了适当的自主招生和竞赛的题目.

在编写过程中，本书经过了华中师范大学第一附属中学 2017 届物理小组的使用和修改，得到了同学们的喜欢和支持.

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请各位读者指正.

作　者

2016 年 8 月

目　　录

第 1 章　质点运动的描述

1.1　力学的基本假定

1.1.1　空间、时间的基本假定

1. 空间

物体存在的空间是三维平直空间.

(1) 光线走过的路径是直线.

(2) 通常的平面几何、立体几何足以描述物体存在的空间(欧几里得空间).

2. 时间

某事件发生的瞬间称为时刻,两事件发生的间隔定义为时间.

(1) 时间是均匀流逝的,没有起点与终点.

(2) 时间与空间位置无关.

1.1.2　经典力学的困难

受基本假定的限制,经典力学存在以下困难:

(1) 在微观(原子、分子)领域,经典力学的规律不再适用.

(2) 在宏观(银河系)范围,经典力学不能正确描述天体的运动.

(3) 对高速运动(接近光速)的物体,经典力学不能准确描述.

1.1.3　经典力学的作用

(1) 为进一步学习其他的物理学分支奠定基础.

(2) 解决生活、科学技术中出现的一些问题.

1.2 基本物理量与单位

1.2.1 基本物理量与导出量

物理学中有许多物理量,但只要选择其中一些物理量并规定它们的基本单位,则所有物理量的单位就可以完全确定.我们把这样的物理量称为基本物理量,而其他的物理量称为导出量.例如,如果选择长度、时间、质量为基本物理量,速度就是导出量,因为速度 = 长度/时间.

1.2.2 国际单位制(SI)

1. 定义

选择基本物理量并规定它们的基本单位,由定义式与比例因数确定导出单位,由此组成的一系列完整的单位体制就称为单位制.1960 年,第十一届国际计量大会通过了国际通用的国际单位制,其基本物理量、基本单位、符号如表 1.1 所示.

表 1.1

基本物理量	长度	质量	时间	电流	温度	物质的量	光强度
基本单位	米	千克	秒	安培	开尔文	摩尔	坎德拉
符　号	m	kg	s	A	K	mol	cd

2. 辅助单位

辅助单位可以做基本单位,也可做导出单位,有平面角(弧度,rad)、球面角(球面度,sr)两个.

3. 其他单位

其他单位由在基本单位前加上前缀构成,例如毫米、兆米、纳米等.

1.2.3 力学中的 MKS 单位制

用长度、时间、质量的基本单位表示其他力学量的单位就称为 MKS 制.其中基本物理量的单位的定义如下:

1. 时间

规定铯原子(质量数为 133)的某一条特殊的能级跃迁所对应的振动周期的 9192631770 倍为 1 s.

2. 质量

规定保存在法国巴黎国际度量局内的千克原器的质量为 1 kg.

3. 长度

光在真空中 1/299792458 s 内走过的距离为 1 m.

1.2.4　其他单位制

工业单位制:基本物理量与单位为长度(米)、时间(秒)、重力(千克力).

CGS 单位制:基本物理量与单位为长度(厘米)、时间(秒)、质量(克).

国际单位制是我国法定的单位制,因此工业单位制与 CGS 单位制会逐步退出使用.

1.2.5　量纲

1. 定义

导出量的单位对基本单位的依赖关系称为量纲式.例如用 L 表示长度单位,用 T 表示时间单位,用 v 表示速度,则速度的量纲式为$[v]=\mathrm{L}/\mathrm{T}$.

2. 量纲法则

(1) 只有量纲相同的物理量才能相等、相加减.例如,等式 $s=at/2$ 两边的量纲不同,因而等式是错误的.

(2) 三角函数、对数函数、指数函数的自变量的量纲必定为 1.例如,$y=\cos(ax)$只有当 a 的量纲为 1/L 时才可能是正确的.

1.3　质点　参照系　坐标系　机械运动

1.3.1　质点

若物体的大小和几何形状与所研究的问题无关或引起的作用很小,我们可以把物体视为具有质量但没有空间大小的实体,这样的实体叫作质点.

(1) 质点是理想的模型,并非实际存在的东西,真实的物体可视为由大量的质点构成.

(2) 物体是否能视为质点,关键在于所研究的问题中能否用物体上某一点的运动代替整个物体的运动.

1.3.2　参照系

(1) 物体是静止的还是运动的总是参照另一物体而言的,我们取被参照的物体为参照系.宇宙间的一切物体都处在永恒不停的运动中,绝对静止的物体是不存在的,因此物体在空间的位置只能相对于另一物体来确定.所以要描述物体的位置,就必须选取另一物体作为参考,这个被选择用于参考的另一物体就叫作参照物.例如,人相对地运动,地是参照物.

(2) 参照物是任意选择的,参照物的选择不同,观察到的结果不同.至于参照物如何选

择，主要看问题的性质和研究的方便.通常我们研究物体的运动，以地球做参照物最为方便，但在研究地球和其他行星相对太阳的运动时，则以太阳做参照物最方便.

(3) 参照系只能定性描述物体运动.

1.3.3 坐标系

坐标系建立在参照系之上，用来定量描述物体运动的快慢、运动轨道等.为了能准确、定量地表示物体相对于参照物的位置和位置变化，就需要建立坐标系.参照系是参照物的数学抽象，它被想象为坐标系和参照物固定地联结在一起.这样，物体的位置就可用它在坐标系中的坐标表示了.所以，参照系就是观察者所在的、和他处于相对静止状态的系统.

1.3.4 机械运动

物体间的相对位置发生变化叫作机械运动，简称为运动.平动和转动是机械运动中最简单、最基本的两种运动形式.在一个运动着的物体上取任意两点所连成的直线，在整个运动过程中都是相互平行的，那么这个物体的运动就叫作平动.做平动的物体上各点的速度和加速度都是相同的.做平动的物体的运动轨迹可以是直线，也可以是曲线.做平动的物体可以看作质点.如果物体内的所有点都绕同一直线做半径不同的圆周运动，这种运动就叫作转动.这条直线称为转动体的轴线.转动体上各点的速度和加速度不尽相同.一般物体的运动都是平动和转动叠加而成的复杂运动.

1.4 标量与矢量

1.4.1 标量

如果一个物理量仅由大小及单位确定，就称其为标量.标量在数学上被当作实数对待，满足实数的全部运算法则.

1.4.2 矢量

1. 定义

如果一个物理量除了大小以外还具有方向，就称其为矢量.矢量在数学上被当作向量对待，满足向量的表示方法与运算法则.

2. 矢量的表示方法

如果三维矢量空间的任一矢量可以被一组矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$线性表示，就称 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$为矢量空间的一组基.如果矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$的模均为 1，且两两正交，就称之为正交规范基.

同一个矢量在不同的基底下表示出来是不一样的，但这些表示都是等价的.

在经典力学中,选择坐标系的同时就选择了矢量空间的基底,对正交坐标系而言,矢量空间的基底都是正交规范基.

3. 物理学中矢量的种类

具体矢量:矢量已被基底表示(该矢量与坐标系的选择有关,常常用于具体问题的分析计算).

抽象矢量:矢量没有被基底表示(用于理论、定律的推导与表述,与坐标系的选择无关,有普适性).

自由矢量:矢量可以在空间任意平行移动(如质点的速度、加速度等).

约束矢量:矢量与空间的点相对应,不可移动(如引力场强度).

滑移矢量:矢量沿其方向线移动,效果不变(如作用在物体上的力).

1.5　位移　速度　加速度

1.5.1　位置矢量与位移矢量

定义1　质点从初位置到末位置的位置变化称为位移,位移是矢量,方向规定为从初位置指向末位置.

定义2　从坐标原点到质点所在位置的有向线段为位移矢量 $\boldsymbol{r}(t)$,如图1.1所示.

定义3　设 t 时刻质点位于 A 点,$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 B 点,则称这两个时刻的位置矢量的差为这段时间内的位移.

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t).$$

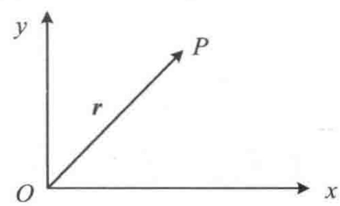

图 1.1

1.5.2　速度

定义4　如图1.2所示,设 Δt 时间内,质点沿轨道从 A 点运动到 B 点,其位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$,我们定义这段时间内质点的平均速度为

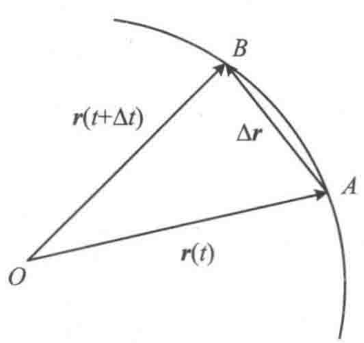

图 1.2

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

显然,平均速度只反映 Δt 这段时间内物体从 A 点运动到 B 点这种变化的平均快慢,并没有反映物体在真实轨道上运动的快慢.

定义5　当 Δt 趋近于0时,B 点趋近于 A 点,定义质点在某一时刻的瞬时速度为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}(t).$$

1. 速度的方向

当 $\Delta t \to 0$ 时，B 点趋近于 A 点，位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向趋近于轨道曲线的切线方向. 由速度的定义知 $\Delta t \to 0$ 时位移矢量的方向就是瞬时速度的方向，所以质点沿轨道运动时速度的方向总是沿着轨道曲线的切线方向.

2. 速度的大小

当 $\Delta t \to 0$ 时，弧长等于弦长，即 $|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$. 因此速率

$$v = |\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

上式说明速率的意义为质点在单位时间内沿轨道走过的弧长.

1.5.3 加速度

定义 6 Δt 时间内速度的变化量与 Δt 的比值为平均加速度.

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

定义 7 在某一瞬间速度变化的快慢为瞬时加速度.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}}(t).$$

1.6 速度和加速度在常见坐标系中的表示

1.6.1 直角坐标系

在直角坐标系中质点的空间位置由 x、y、z 三个参数确定，其正交规范基是由沿三个坐标轴的三个单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 构成的，如图 1.3 所示.

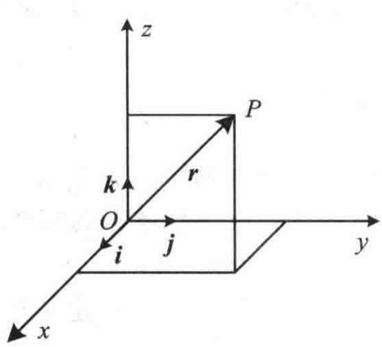

图 1.3

1. 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

2. 运动学方程

位置矢量的各分量都是时间的函数，称为运动学方程.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

它表示质点的空间位置随时间变化的规律.

3. 轨道方程

将运动学方程中的时间 t 消去会得到反映质点位置矢量的各分量之间关系的坐标方程，习惯上称为轨道方程.

4. 直角坐标系中的速度表示

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}.$$

5. 直角坐标系中的加速度表示

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

6. 速度和加速度的另一种表示

速度和加速度的大小可以通过求对应矢量的模得到.

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2},$$
$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

矢量的方向可以由其方向余弦决定,例如速度矢量的三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}.$$

例 1　质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=b\sin\omega t\boldsymbol{i}+b\cos\omega t\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$, 式中 b、ω、c 均为常数,试分析其运动规律.

解析　先讨论质点的轨道方程,由 c 为常量知质点必定在 $z=c$ 的平面上运动.

由 xy 平面的运动方程

$$x=b\sin\omega t,\quad y=b\cos\omega t,$$

得

$$x^2+y^2=b^2,$$

所以质点在 $z=c$ 的平面上做半径为 b 的圆周运动. 再来看质点运动的速度和加速度. 由

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=b\omega\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega\sin\omega t\boldsymbol{j},$$

知

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{b^2\omega^2\cos^2\omega t+b^2\omega^2\sin^2\omega t}=b\omega.$$

由

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{j},$$

知

$$|\boldsymbol{a}|=b\omega^2.$$

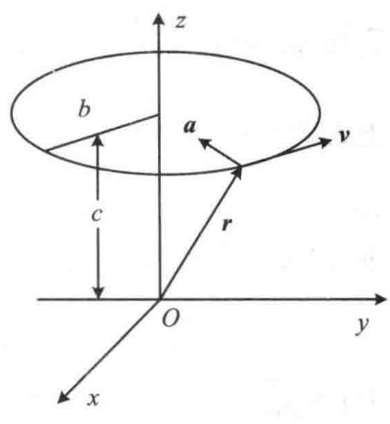

图 1.4

从上面的讨论可以得出结论:质点在半径为 b 的圆周上做匀速圆周运动,如图 1.4 所示.

1.6.2　自然坐标系

(1) 在自然坐标系中用弧长 s 为坐标来确定质点的位置(质点的位置沿弧线到坐标原点的弧长 s 就是该坐标系的坐标).

(2) 自然坐标系选用的正交规范基是质点运动轨道的单位切矢量 $\boldsymbol{e}_\tau$ 与单位法矢量 $\boldsymbol{e}_n$，规定单位切矢量指向质点的运动方向，单位法矢量指向运动曲线的凹侧，如图 1.5 所示.

1. 自然坐标系中的速度

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_\tau.$$

式中 v 表示速度的大小，即速率，$\boldsymbol{e}_\tau$ 表示速度的方向. v 的大小及 $\boldsymbol{e}_\tau$ 的方向都可能发生变化，切矢量 $\boldsymbol{e}_\tau$ 及法矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 一般都是时间的函数.

2. 自然坐标系中的加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{v}\boldsymbol{e}_\tau + v\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}.$$

(1) 切矢量对时间的导数

如图 1.6 所示，设开始质点位于 P 点，经过 Δt 时间后到达 P' 点，两处的单位切矢量分别为 $\boldsymbol{e}_\tau$ 及 $\boldsymbol{e}'_\tau$，它们间的夹角为 $\Delta\varphi$. 当 Δt 很小时 $\Delta\varphi$ 也很小，根据弦长与弧长的关系知，这时

$$|\Delta\boldsymbol{e}_\tau| \approx \Delta\varphi,$$

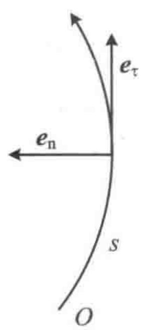

图 1.5

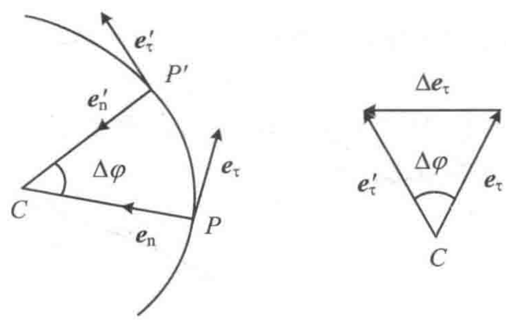

图 1.6

而且当 $\Delta\varphi \to 0$ 时 $\Delta\boldsymbol{e}_\tau \perp \boldsymbol{e}_\tau$，指向轨道的法线方向，于是有

$$\Delta\boldsymbol{e}_\tau = \Delta\varphi\boldsymbol{e}_n.$$

将上式除以 $\Delta\varphi$，并取极限 $\Delta\varphi \to 0$，就得

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\tau}{\Delta\varphi} = \boldsymbol{e}_n.$$

再进行下面的变量代换

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{d\varphi} = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_n.$$

其中 $\rho = \dfrac{ds}{d\varphi}$ 是轨道在 P 点处的曲率半径，$\dfrac{ds}{dt}$ 是单位时间内质点沿轨道走过的弧长.

(2) 加速度的最后表示

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n = a_\tau\boldsymbol{e}_\tau + a_n\boldsymbol{e}_n.$$

1.6.3 极坐标系

极坐标系用 r、θ 两参数描述质点的位置，选用沿矢径方向及垂直于矢径方向(横向)的两正交单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 为该坐标系下的正交规范基，如图 1.7 所示.

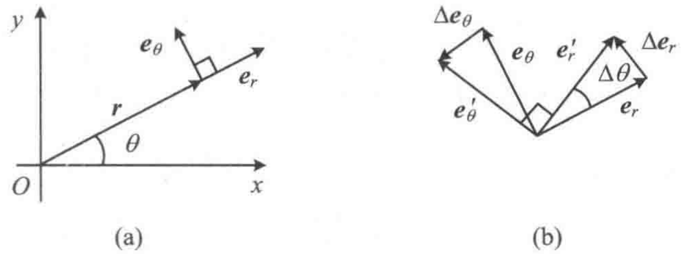

图 1.7

1. 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r.$$

同自然坐标系一样,$\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\theta$ 都是时间 t 的函数.

2. 速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}.$$

3. 两个基本导数

位置矢量转过很小的 $\Delta\theta$ 角时,$\Delta\boldsymbol{e}_r$ 的大小就是 $\Delta\theta$(弧长等于弦长),其方向垂直于 $\boldsymbol{e}_r$、指向 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向(横向),且

$$\Delta\boldsymbol{e}_r \approx \Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

如果用 Δt 除上式两边,并取极限,就得到单位径矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 对时间的导数:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta.$$

这里 $\dot{\theta}$ 是位置矢量每秒转过的角度,也称质点运动的角速度,用同样的分析可证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r.$$

4. 速度的表达式

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,$$

其中,$\dot{r}$ 称为径向速度,$r\dot{\theta}$ 称为横向速度.

5. 加速度的表示

速度的基本矢量对时间求导数可以得到极坐标系下的加速度表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta.\end{aligned}$$

因此,径向加速度的大小是

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,$$

横向加速度的大小是

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}).$$

例 2　质点沿一螺旋线运动,在极坐标系中的位置为 $r = bt^2$,$\theta = ct$,其中 b、c 为常数,求质点的速度和加速度.

解析　由于 $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$,本题中 $r = bt^2$,故 $\dot{r} = 2bt$.又 $\theta = ct$,故 $\dot{\theta} = c$.所以

$$v = 2bte_r + bct^2 e_\theta.$$

再由 $\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$，对本题 $\ddot{r}=2b$，$\ddot{\theta}=0$，由此得到

$$\boldsymbol{a} = (2b - bt^2c^2)\boldsymbol{e}_r + 4bct\boldsymbol{e}_\theta.$$

1.6.4 柱坐标系

柱坐标系中质点的空间位置用 R、θ、z 三个参数描述，正交规范基由 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 及 $\boldsymbol{e}_z$ 构成并形成右手系，如图 1.8 所示. 柱坐标系实际上可以看成是平面极坐标系加上 z 轴构成的三维坐标系，因此下列等式对柱坐标系同样成立：

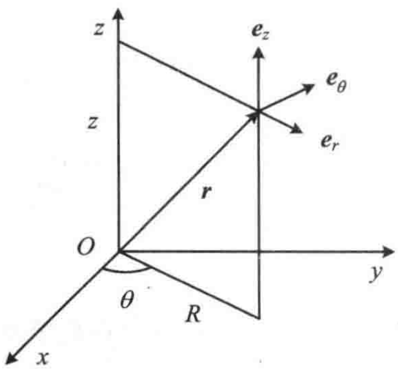

图 1.8

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r.$$

1. 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z.$$

2. 速度与加速度

（1）直接导数法求速度

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{R}\boldsymbol{e}_r + R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{e}_z.$$

（2）加速度

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z.$$

3. 基底的变换（将直角坐标系中的基矢量直接变换到柱坐标系中去）

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}.$$

1.6.5 球坐标系

球坐标系用 r、θ、φ 三个参数描述质点的空间位置. 取单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 为正交规范基，三者构成右手系，如图 1.9 所示.

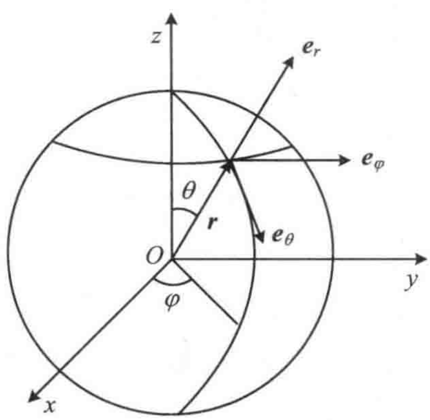

图 1.9

1. 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r.$$

2. 直角坐标与球坐标的基底变换

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}.$$

3. 球坐标系的基矢量对时间的导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} &= (\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{j} - \dot\theta\sin\theta\boldsymbol{k} \\ &= \dot\theta\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \dot\theta\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \dot\theta\sin\theta\boldsymbol{k} - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi.$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\boldsymbol{e}_r + \dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

4. 速度的表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{e}_r) = \dot r\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot r\boldsymbol{e}_r + r(\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi) \\ &= \dot r\boldsymbol{e}_r + r\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

5. 加速度的表示

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot r\boldsymbol{e}_r + \dot r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot\theta)\boldsymbol{e}_\theta + r\dot\theta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot\varphi\sin\theta)\boldsymbol{e}_\varphi + r\dot\varphi\sin\theta\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (\ddot r - r\dot\varphi^2\sin^2\theta - r\dot\theta^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

1.7 直线运动

1.7.1 直线运动的图像

1. 质点的位移图像

如图 1.10 所示,从图像可以得知质点在各个时刻的位置.图中 A 点给出了质点在 t 时刻的位置 x;B 点给出了质点在 $t+\Delta t$ 时刻的位置 $x+\Delta x$;割线 AB 的斜率$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$给出了 t 到