

民國教育史料叢刊

881

主編
李景文
馬小泉



國家出版基金項目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

高等教育

歷年國內專門以上學校入學數學試題詳解
評注全國學生英文成績大觀

(甲級：大學之部)

學校圖書館學



大象出版社



國家出版基金項目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

民國教育史料叢刊

881

高等教育



大象出版社

李景文 馬小泉 主編

歷年國內專門以上學校入學數學試題詳解
評注全國學生英文成績大觀

(甲級：大學之部)

學校圖書館學

歷年國內專門以上學校入學

數學試題詳解

1. 人 民 軍 隊 的 紀 律 是 無 上 的 尊 嚴

紀 律 是 軍 隊 的 命 脈

序

國立專門以上學校歷年考試，差不多沒個不考數學的，至於爲甚麼都要考數學，以我看來也不過覺得治數學能增長推理的能力，養成有秩序的習慣，引起發明之才能，使思想凝結罷了。他們雖想藉考試數學以知學生思索力和想像力的究竟(除特別的以外)那出題的人，對於中學學生程度，却未必就了解；且多以爲中等學校無論如何教學，本校自有試驗標準；而中等學校教員，不管專門學校如何考試，則以爲本校功課自有照例進行的步驟，結果弄得上下不相銜接，遂致許多青年，考學時不能如願相賞。我們收集數學試題的目的，就是想藉此以使中等學校教員深明專門學校考試數學的真像。給學生以相當的引導云，這樣說來，僅將試題彙集，已可完事，何必又加以解答呢？個中倒也有個緣故，中學學生升學時，那個不想知道各校試題和試題的正解，專門學校試題，雖說都不很難，可是也有再思不得真解者，中學學生遇着這種題目，難說不有“搔首愁思”甚至“拍案高呼”者，我們這些題解，雖非珍品想來那時也可作他們的一個參考，轉置之不問作掩耳盜鈴之舉，恐怕還好的多着啦，這便是我們作此書的爲甚麼還有幾件事情，我們要特別聲明。

1. 一試題中含數個特性時，因當鏗粒盡述但有數題，因急於付印，沒有如樣做去，讀者諒之。
2. 我們收集的試題，不全皆從各該校校內直接得來，不免有些錯的，因之無法求解該解卽略，再版時或可改正添入。
3. 國內專門學校很多，收集試題太難，因之不甚完全好在自民八以後各著名學校試題尙稱完全，別的再版時如能收來，卽行添入，若閱者肯將未收入之題惠寄，以便將來集成完璧，無任歡迎。
4. 我們在百忙之中，來做此事，錯誤定屬難免，閱者找出時，請來函指示，那便多謝了。
5. 本書擬逐年出版且年將新試題添入，讀者若有以十三年度數學試題相贈者，將來出書時酌各報酬，以伸謝悃。

著者識於北京師大

十三年七月，一九二四。

이러한 변화는 1990년대 이후 한국 문학의 변화와 전망을 논하는 데 있어 중요한 단초를 제공한다. 특히, 이 시기에 나타난 다양한 문예사조와 작가들의 실험적 시도는 한국 문학의 전통을 재검토하고, 새로운 표현 방식을 모색하는 계기를 마련하였다. 또한, 이 시기에 나타난 다양한 문예사조와 작가들의 실험적 시도는 한국 문학의 전통을 재검토하고, 새로운 표현 방식을 모색하는 계기를 마련하였다.

이러한 변화는 1990년대 이후 한국 문학의 변화와 전망을 논하는 데 있어 중요한 단초를 제공한다. 특히, 이 시기에 나타난 다양한 문예사조와 작가들의 실험적 시도는 한국 문학의 전통을 재검토하고, 새로운 표현 방식을 모색하는 계기를 마련하였다. 또한, 이 시기에 나타난 다양한 문예사조와 작가들의 실험적 시도는 한국 문학의 전통을 재검토하고, 새로운 표현 방식을 모색하는 계기를 마련하였다.

數 學 試 題 詳 解
目 錄

1. 北京師範大學.....	1
2. 北京大學.....	23
3. 北京工業專門學校.....	69
4. 北京農業大學.....	124
5. 北京醫學專門學校.....	139
6. 北京法政大學.....	148
7. 北京美術專門學校.....	154
8. 北京女子高等師範學校.....	156
9. 燕京大學.....	168
10. 北京交通大學.....	170
11. 北京朝陽大學.....	175
12. 北京中國大學.....	177
13. 北京民國大學.....	179
14. 北京華北大學.....	182
15. 北京平民大學.....	187
16. 北京外交留俄文法政專門學校.....	189
17. 北京稅務專門學校.....	190
18. 北京通才商業專門學校.....	193
19. 北京世界語專門學校.....	197
20. 天津北洋大學.....	200
21. 南京東南大學.....	208
22. 武昌高等師範學校.....	214

10.1 数据库系统应用

10.1.1 数据库系统应用

数据库系统应用是指将数据库技术应用于各种实际问题的解决。数据库系统应用是数据库技术的重要组成部分，也是数据库技术发展的主要方向。数据库系统应用可以分为数据库系统应用开发和数据库系统应用维护两个方面。

数据库系统应用开发是指根据用户的需求，设计并实现数据库系统应用的过程。数据库系统应用开发包括数据库系统应用需求分析、数据库系统应用设计、数据库系统应用实现和数据库系统应用测试等环节。

数据库系统应用维护是指对已经实现的数据库系统应用进行维护和管理的过程。数据库系统应用维护包括数据库系统应用性能优化、数据库系统应用安全维护、数据库系统应用备份与恢复、数据库系统应用升级与迁移等环节。

数据库系统应用开发和维护是数据库技术的重要组成部分，也是数据库技术发展的主要方向。数据库系统应用开发和维护需要数据库技术、系统技术、网络技术和应用技术的综合应用。

数据库系统应用开发和维护的主要任务包括：

- 数据库系统应用需求分析：根据用户的需求，分析数据库系统应用的功能、性能、安全等方面的要求。
- 数据库系统应用设计：根据需求分析的结果，设计数据库系统应用的数据结构、数据流、控制流等方面的方案。
- 数据库系统应用实现：根据设计方案的指导，实现数据库系统应用的数据库、应用程序、用户界面等方面的开发。
- 数据库系统应用测试：对实现的数据库系统应用进行测试，验证其功能、性能、安全等方面的要求。
- 数据库系统应用性能优化：对数据库系统应用的性能进行分析和优化，提高其运行效率和响应速度。
- 数据库系统应用安全维护：对数据库系统应用的安全进行维护和管理，防止数据泄露、篡改、破坏等事故的发生。
- 数据库系统应用备份与恢复：对数据库系统应用的数据进行备份和恢复，防止数据丢失和损坏。
- 数据库系统应用升级与迁移：对数据库系统应用进行升级和迁移，以适应新的需求和环境。

北 京 師 範 大 學
民 國 八 年

1. 八月十二日本京招生試題

1. 有人持錢購物，初用去其三分之一，又用其剩者八分之五，尚餘銅元30枚，問其人原持錢若干。

(解) 設某人原持錢為1，初次用其三分之一，則其所餘者為原錢之三分之二；次用初餘之八分之五，即用原錢之 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$ ，故兩次用後所餘者當為原錢之 $\frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$ ，即原錢之 $\frac{1}{4}$ 為30文，故原錢為 $30 \div \frac{1}{4} = 120$ 枚。

2. 求解 $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} = \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$

(解) 各項分子相除得

$$4 - \frac{1}{x-4} + 5 + \frac{2}{2x-3} = 4 - \frac{2}{2x-7} + 5 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{即 } \frac{-2x+3+2x-8}{(x-4)(2x-3)} = \frac{-2x+2+2x-7}{(2x-7)(x-1)}$$

$$(x-4)(2x-3) = (2x-7)(x-1)$$

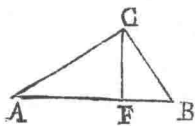
$$2x^2 - 11x + 12 = 2x^2 - 9x + 7$$

$$2x = 5$$

$$\frac{5}{2}$$

$$= 2.5$$

由直角三角形之直角頂，作其對邊之垂線；求證此垂線之平方，等於其所分底線兩段之積。



設 CF 為由直角三角形 ABC 之頂 C 至 AB 之垂線。

求證

$$CF^2 = AF \times BF.$$

證

$$\angle CAF + \angle ACF = 90^\circ, \quad \angle ACF + \angle BCF = 90^\circ,$$

$$\angle CAF = \angle BCF.$$

$\triangle CFA$ 及 $\triangle CFB$ 相似。

$$\therefore AF:CF=CF:FB.$$

即

$$\frac{2}{CF}=AF \times BF.$$

4. 試證以下基本公式：—

(a) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(b) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(解) (a) 此問題因A, B兩角之為銳為鈍為直以及其正負，致有種種證法、茲略述之
如次：—

(1) A, B俱為 0° ，則

$$\cos(A+B) = \cos(0^\circ + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1,$$

$$\text{又 } \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos 0^\circ \cos 0^\circ - \sin 0^\circ \sin 0^\circ = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

(2) A, B中有一(如A)為 0 ，而其他不為 0 ；則

$$\cos(A+B) = \cos(0+B) = \cos B;$$

$$\text{又 } \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos 0^\circ \cos B - \sin 0^\circ \sin B = 1 \times \cos B - 0 \times \sin B$$

$$= \cos B,$$

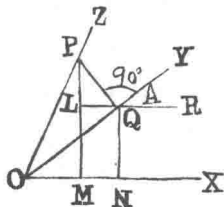
$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

若A不等 0° ，而B等於 0° 時，可依同樣證明。

(3) A, B均為正銳角，其和亦為正銳角

設 $\angle XOY, YOZ, XOZ$ 各為A, B, A+B. 由OZ上一點P作 $PM \perp OX, PQ \perp OY$,

由Q作 $QL \perp PM$ 並延長之至R, 則 $\angle RQP = 90^\circ + A$, 故有如次之關係



$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON - QL}{OP} = \frac{ON}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} - \\ &\quad \frac{QL}{QP} \times \frac{QP}{OP} \\ &= \cos A \cos B + \cos(90^\circ + A) \sin B \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned}$$

(4) A, B俱為正銳角而A+B為直角；則

$$\cos(A+B) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \cos A \cos B - \sin A \sin B &= \cos A \cos(90^\circ - A) - \sin A \sin(90^\circ - A) \\ &= \cos A \sin A - \sin A \cos A = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(5) A, B 俱為正銳角而 A+B 為鈍角, 則

$90^\circ - A$ $90^\circ - B$, $(90^\circ - A) + (90^\circ - B)$ 俱為正銳角故

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= -\cos\{180^\circ - (A+B)\} = -\cos\{(90^\circ - A) + (90^\circ - B)\} \\ &= -\{\cos(90^\circ - A)\cos(90^\circ - B) - \sin(90^\circ - A)\sin(90^\circ - B)\} \\ &= -\{\sin A \sin B - \cos A \cos B\} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{aligned}$$

(6) A, B 為任何正角, 由前五者之理, 則知 A, B 為任何之銳角, (a) 式皆可成立, 今設 A, B 中有一 (如 A) 增至 90° 者, 則得

$$\begin{aligned} \cos\{(90^\circ + A) + B\} &= \cos\{90^\circ + (A+B)\} = -\sin(A+B) = -\sin A \cos B \\ &\quad - \cos A \sin B = \cos(90^\circ + A)\cos B - \sin(90^\circ + A)\sin B \end{aligned}$$

同樣, 若 B 角增至 90° , 或 A, B 同時均增至 90° , (a) 依然成立, 由此類推, 則知 A, B 無論增 90° 之若干整數倍, (a) 式未有不能成立者。

(7) A, B 中之一, 或俱為負角。設 A, B 中之一 (如 A) 為負角, 則加以 360° 適當之倍量, 其和 $n \times 360^\circ + A$ 為正, 則

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos(n \times 360^\circ + A + B) \\ &= \cos(n \times 360^\circ + A)\cos B - \sin(n \times 360^\circ + A)\sin B \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

同理 B 為負角, 或 A, B, 俱為負角, 此式亦能成立。總觀以上七證, 則知 (a) 式無往而不成立。

解 (b) 不論 A, B 之大小正負如何, (a) 式無往而不成立, 前已證之, 由是則得

$$\begin{aligned} \cos(A-B) &= \cos\{A + (-B)\} \\ &= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) \end{aligned}$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

(b) 式之證明，亦可一如前法，茲為免重複起見，故不逐次證明。

II. 九月十二日覆試各省選送學生試題.

1. 千二十碼之競走，甲許乙先發5碼，乙許丙先發八碼則無勝負；若於880碼之競走，問甲許丙先發50碼，尚勝若干碼？

(解) 甲速：乙速 = 220 : 215 = 44 : 43

乙速：丙速 = 220 : 209 = 20 : 19

∴ 甲速：丙速 = 44 × 20 : 43 × 19 = 880 : 817

故880碼競走，甲當勝丙 880 - 817 = 63碼。

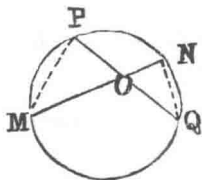
880 - 817 - 50 = 13碼，即甲讓丙先發50碼，尚當所勝之數。

2. 試化下式為簡式

$$\frac{\frac{1+x}{1-x} + \frac{4x}{1+x^2} + \frac{8x}{1-x^4} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x^3}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1+x^4} - \frac{1-x^3}{1+x^3}}$$

$$\begin{aligned} \text{(解) 原式} &= \frac{\frac{4x}{1-x^3} + \frac{4x}{1+x^3} + \frac{8x}{1-x^4}}{\frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{x^3}{1+x^4}} \\ &= \frac{\frac{2}{1-x^4} + \frac{2}{1-x^4}}{\frac{1}{1-x^4} + \frac{1}{1+x^4}} \\ &= \frac{2(1+x^4)}{1+x^4} \end{aligned}$$

3. 設兩弦於圓內相交，其兩線分之積，彼此相等；試證明之。



設兩弦 MN 及 PQ 相交於 O。

求證 $OM \times ON = OQ \times OP$ 。

證 連結 MP 及 NQ。

$$\angle NQP = \angle PMN, \angle MNQ = \angle MPQ.$$

△NOQ 及 △POM 相似

$$\therefore OQ : OM = ON : OP;$$

即 $OM \times ON = OQ \times OP$.

4. 設 $2\sin A = \cos A$, 求 $\sin A$ 及 $\cos A$ 之值

(解) $2\sin A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

平方之 $4\sin^2 A = 1 - \sin^2 A$

$5\sin^2 A = 1$

$\sin A = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\cos A = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$

II. 十月六日二次覆試各省區選送學生試題

1. 甲乙丙三人其年齡甲乙之和為 46, 乙丙之和為 40, 甲丙之和為 22, 問三人各年幾何,

(解)

$(46 + 40 - 22) \div 2 = 32$ 乙之年齡

$(46 + 22 - 40) \div 2 = 14$ 甲之年齡

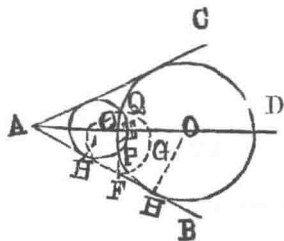
$(40 + 22 - 46) \div 2 = 8$ 丙之年齡

2. 欲使方程式 $2x^2 + 8x + m = 0$ 之二根相等, 則 m 之值如何?

(解) $x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 8m}}{4}$

故欲使方程式之二根相等, 必須 $8^2 - 8m = 0$, 即 $m = 8$.

3. 求作一圓, 過一已知點, 且與兩已知直線相切.



設 AB 及 AC 為兩已知直線, P 為已知之點,

求作圓過此已知點, 且與此兩已知直線相切.

構圖. 作直線 AD 平分 $\angle BAC$, 由 P 點作直線 PQ

垂直 AD , 與 AB 及 AD 相交於 F 及 E , 且令 PE

$= QP$, 次以 PQ 為直徑畫圓, 再由 P 作 PQ 之垂

線, 交此圓周於 G , 連結 FG , 於 AB 直線上截

取 FH 等於 FG , 由 H 作 AB 之垂直, 線交 AD 於 O 及 O' 兩點, 以 O 及 O' 為圓心, 以

OH 及 $O'H$ 爲半徑作圓，卽爲所求之圓。

$$\text{證因} \quad FP \times FQ = \overline{FG}^2$$

$$\text{而} \quad FH = FG,$$

$$\therefore FP \times FQ = \overline{FH}^2$$

故以 O 及 O' 爲圓心，以 OH 及 $O'H$ 爲半徑所作之圓，必過 P 點而與 AB 相切（溫德華幾何第167頁）但 AD 爲 $\angle BAC$ 之平分線，故圓亦必與 AC 相切。（溫氏幾何第47頁）討論 若 AB 平行與 AC ，或 P 點在 AB, AC 上，亦可用上法求得。

4. 試證次之恒等式

$$\frac{\operatorname{Cosec} A - \operatorname{Sec} A}{\operatorname{Cot} A + \operatorname{Tan} A} = \frac{\operatorname{Cot} A - \operatorname{Tan} A}{\operatorname{Cosec} A + \operatorname{Sec} A}$$

$$\text{(解) 因 } \operatorname{Cosec}^2 A - \operatorname{Sec}^2 A = (1 + \operatorname{Cot}^2 A) - (1 + \operatorname{Tan}^2 A) = \operatorname{Cot}^2 A - \operatorname{Tan}^2 A$$

$$\text{i.e. } (\operatorname{Cosec} A + \operatorname{Sec} A)(\operatorname{Cosec} A - \operatorname{Sec} A) = (\operatorname{Cot} A + \operatorname{Tan} A)(\operatorname{Cot} A - \operatorname{Tan} A)$$

$$\frac{\operatorname{Cosec} A - \operatorname{Sec} A}{\operatorname{Cot} A + \operatorname{Tan} A} = \frac{\operatorname{Cot} A - \operatorname{Tan} A}{\operatorname{Cosec} A + \operatorname{Sec} A}$$

民 國 九 年

1. 八月本京招生試題

1. 今有一火車，於上午10點鐘離甲城，下午1點15分到乙城；又有一火車，於上午六點15分離乙城，上午11點30分到甲城，問二車在何時相遇。

(答) 兩車相遇時間爲10點 $18\frac{19}{32}$ 分

$$2. \text{ 試解 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{(解) (1) 式平方 } \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{9}{4} \dots\dots\dots(3)$$

$$(3) - (2) \text{ 得 } \frac{2}{xy} = 1 \dots\dots\dots(4)$$

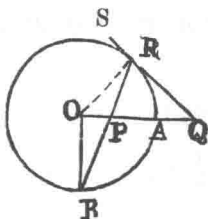
$$(2) - (4) \text{ 得 } \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$$

開方得 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \pm \frac{1}{2}$(5)

由(1)+(5)得 $x=1$ 或 $x=2$

由(1)-(5)得 $y=2$ 或 $y=1$

3. 設O為圓心,OA及OB為互相垂直之兩半徑,P為OA上一點,R為PB之延長線與圓周之交點,Q為由R所作之切線與OA之延長線相交之點;則△PQR為二等邊三角形.



證 連結OR,則 $\angle PRS = \angle PRO + \angle SRO$,

$$\angle RPQ = \angle R = \angle BOP + \angle PBO.$$

但 $OR=BO \therefore \angle PBO = \angle PRO$.

又 $OR \perp QS \therefore \angle SRO = \text{Rt}\angle$.

而 $\angle BOP = \text{Rt}\angle, \therefore \angle SRO = \angle BOP$.

$$\therefore \angle PRS = \angle RPO.$$

$$\therefore \angle QRP = \angle QPR.$$

$$\therefore PQ=PR.$$

故知 $\triangle PQR$ 為二等邊三角形.

4. 設 $\sin\theta = m$,則 $\tan\theta$ 之式如何?

(解) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

II. 九月複試各省選送學生試題

1. 某甲買得某種物品,費銀二十五元,若此物品每斤之價減少百分之十,則可多買十斤,問每斤原價?

(解)原來物價之百分之十為 $25 \times \frac{10}{100} = 2.5$ 元,故每斤之價為 $2.5 \frac{1}{10} = 25$ 元.

今現價乃原價之 $\frac{90}{100}$ 故每斤原價為 $125 \div \frac{9}{10} = 278$ 元.

2. 試解 $\frac{x+1}{x-5} + \frac{x+2}{x-1} = \dots$

(解) $\frac{x^2-1+x^2-3x-10+3x^2-18x+15}{x^2-6x+5} = 0$

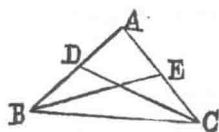
$$\frac{6x^2-21x+4}{x^2-6x+5} = 0$$

$$5x^2 - 21x + 4 = 0$$

$$(5x-1)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{5} \quad \text{或} \quad x = 4$$

2. 等腰三角形內，設取兩腰之中點D及E，各以直線連於對頂C及B，則DC與BE相等；試證之。



設 ABC 為等腰三角形，D及E為兩等腰 AB 及 AC 之中點，

求證 $DC = BE$

證 在 $\triangle DBC$ 及 $\triangle BCE$ 內， BC 為公用之邊。

又 $AB = AC$ ， $\therefore \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$ ；即 $BD = CE$

且 $\angle DBC = \angle ECB$ 。

$$\therefore \triangle DBC = \triangle BCE.$$

$$\therefore DC = BE.$$

3. 試證 $\sec A - \cos A = \sin A \tan A$ 。

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad \sec A - \cos A &= \frac{1}{\cos A} - \cos A = \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} = \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \sin A \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \sin A \tan A \end{aligned}$$

民 國 十 年

I. 九月十一日 本京招生題

1. 銀500元分配於甲乙丙三人甲所得與乙所得之比為6:5。若甲乙各用去80元則其餘之和恰等於丙所得之數，向三人各得若干？

(解) 甲乙二人各用去80元後尚餘 $500 - 160 = 340$ 元，此為丙所得之數與甲乙二人用餘之和，故丙所得元數為 $\frac{1}{2} \times 340 = 170$ 元

$$\text{甲乙二人之和為 } 500 - 170 = 330.$$

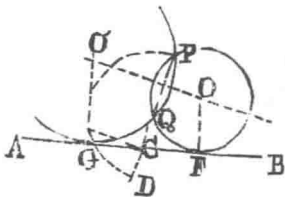
$$\text{依配分比例可知甲所得 } 330 \times \frac{6}{11} = 180 \text{元.}$$

$$\text{乙所得為 } 330 \times \frac{5}{11} = 150 \text{元}$$

2. 求解 $\frac{2+x}{1-x} + \frac{3+x}{2-x} - 2 = 0$.

(解) $\frac{(2+x)(2-x) + (1-x)(3+x) + 2(1-x)(2-x)}{(1-x)(2-x)} = 0;$
 $\frac{-8x+11}{(1-x)(2-x)} = 0 \qquad \therefore x = \frac{11}{8}.$

3. 求過二已知之點，作一平圓，與已知之一直線相切。



設P及Q為二已知之點，AB為已知之直線。

求作一圓過此二已知點且與AB直線相切。

作圖。連結PQ並引長之遇AB於C。於此引長線上取CE=DC，以DP為直徑作圓，再作CE⊥DP。截取CF及CG等於CE，並於其上作垂線與PQ之垂直平分線OO'相交於

O及O'，以O及O'為圓心，以OF及O'G為半徑所作之圓，即為所求之圓。

證。因O及O'距P、Q等遠故所作之圓必通過P及Q。

又 $DC:CE=CE:PC$,

而 $CE=CG=CF$, $DC=QC$,

$QC:CF=CF:PC$, $QC:CG=CG:PC$.

故 CF切O圓於F, CG切O'圓於G。

討論 此題可分數種不同之情形，茲述之於下：

(1) 若連結P及Q之直線，適與AB相垂直，則可用上法作圖。

注意 在此情形或以前證明之情形中，CF之長，可另用他法求得。即以PC為直徑畫圓，由C作P之垂直線，交圓周於一點，聯C與此交點之直線，即為所求之CF之長。蓋以此直線恰為P及P'之比例中項也。

(2) 若連結P及Q之直線，適與AB相平行，則上法即不適用，不得不另覓他法，聯結P、Q，再作PQ之垂直線交已知線於一點，聯結此點與P、Q二點必圍成一三角形，作此三角形之外接圓可也。