民國教育史料叢刊

881

主編 李景文 馬小泉

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

高等教育

歷年國内專門以上學校入學數學試題詳解

評注全國學生英文成績大觀

（甲級：大學之部）

學校圖書館學

大象出版社

國家出版基金項目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

民國教育史料叢刊

881

高等教育

李景文 馬小泉 主編

大象出版社

歷年國内專門以上學校入學數學試題詳解

評注全國學生英文成績大觀（甲級：大學之部）

學校圖書館學

歷年國內專門以上學校入學

數學試題詳解

序

國立專門以上學校歷年考試，差不多沒個不考數學的。至於為甚麼都要考數學，以我看來也不過覺得治數學能增長推理的能力，養成有秩序的習慣，引起發明之才能，使思想凝結罷了。他們雖想藉考試數學以知學生思索力和想像力的究竟(除特別的以外)那出題的人，對於中學學生程度，却未必就了解；且多以為中等學校無論如何教學，本校自有試驗標準；而中等學校教員，不管專門學校如何考試，則以為本校功課自有照例進行的步驟，結果弄得上下不相銜接，遂致許多青年，考學時不能如願相償。我們收集數學試題的目的，就是想藉此以使中等學校教員深明專門學校考試數學的真像，給學生以相當的引導云，這樣說來，僅將試題彙集，已可完事，何必又加以解答呢？個中倒也有個緣故，中學學生升學時，那個不想知道各校試題和試題的正解，專門學校試題，雖說都不很難，可是也有再思不得其解者，中學學生遇着這樣題目，雖說不有"搔首愁思"甚至"拍案高吁"者，我們這些題解，雖非珍品想來那時也可作他們的一個參考，較置之不問作掩耳盜鈴之舉，恐怕還好的多着啦，這便是我們作此書的為甚麼

還有幾件事情，我們要特別聲明。

1. 一試題中含數個特性時，因當縷粒盡述但有數題，因急於付印，沒有如樣做去，讀者諒之。
2. 我們收集的試題，不全是從各該校校內直接得來，不免有些錯的，因之無法求解該解即略，再版時或可改正添入
3. 國內專門學校很多，收集試題太難，因之不甚完全好在自民八以後各著名學校試題尚稱完全，別的再版時如能收來，即行添入，若閱者肯將未收入之題惠寄，以便將來集成完璧，無任歡迎。
4. 我們在百忙之中，來做此事，錯誤定屬難免，閱者找出時，請來函指示，那便多謝了。
5. 本書擬逐年出版且年將新試題添入，讀者若有以十三年度數學試題相贈者，將來出書時酌各報酬，以伸謝忱

著者識於北京師大　　　　十三年七月，一九二四。

數學試題詳解

目錄

北京師範大學
民國八年

1.八月十二日本京招生試題

1. 有人持錢購物，初用去其三分之一，又用其剩者八分之五，尚餘銅元30枚，問其人原持錢若干.

(解) 設某人原持錢爲1.初次用其三分之一，則其所餘者爲原錢之三分之二；次用初餘之八分之五，即用原錢之$\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$.故兩次用後所餘者當爲原錢之$\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$，即原錢之$\frac{1}{4}$爲30文，故原錢爲$30\div\frac{1}{4}=120$枚.

2. 求解 $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}=\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$

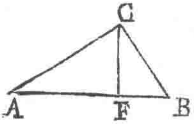
(解) 各項母子相除得

$$4-\frac{1}{x-4}+5+\frac{2}{2x-3}=4-\frac{2}{2x-7}+5+\frac{1}{x-1}$$

即
$$\frac{-2x+3+2x-8}{(x-4)(2x-3)}=\frac{-2x+2+2x-7}{(2x-7)(x-1)}$$
$$(x-4)(2x-3)=(2x-7)(x-1)$$

$$2x^2-11x+12=2x^2-9x+7$$
$$2x=5$$
$$x=\frac{5}{2}$$

由直角三角形之直角頂，作其對邊之垂線；求證此垂線之平方，等於其所分底線兩段之積.



設CF爲由直角三角形ABC之頂C至AB之垂線.

求證 $\overline{CF}^2=AF\times BF$.

證 $\angle CAF+\angle ACF=90°$，$\angle ACF+\angle BCF=90°$，

$\angle CAF=\angle BCF$.

∴△CFA及BFC相似.

$$\therefore AF:CF=CF:FB.$$

即 $$\overline{CF}^2=AF\times BF.$$

4. 試證以下基本公式:—

(a) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(b) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

(解)(a)此問題因A,B兩角之爲銳爲鈍爲直以及其正負，致有種種證法、茲略述之如次:—

(1) A,B俱爲0°,則

$$\cos(A+B)=\cos(0°+0°)=\cos 0°=1,$$

又$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0°\cos 0°=\sin 0°\sin 0°=1\times 1-0\times 0=1$

$$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

(2) A,B中有一(如A)爲0,而其他不爲0;則

$$\cos(A+B)=\cos(0+B)=\cos B;$$

又$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0°\cos B-\sin 0.\sin B=1\times\cos B-0\times\sin B$

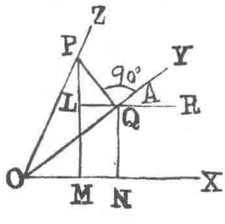
$$=\cos B,$$

$$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

若A不等0°,而B等於0°時，可依同樣證明。

(3). A,B均爲正銳角，其和亦爲正銳角

設$\angle$s XOY,YOZ,XOZ各爲A,B,A+B.由OZ上一點P作PM⊥OX,PQ⊥OY,由Q作QL⊥PM並延長之至R,則∠RQP=90°+A,故有如次之關係



$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-QL}{OP}=\frac{ON}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}-\frac{QL}{QP}\times\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\cos(90°+A)\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

(4) A,B俱爲正銳角而A+B爲直角;則

$\cos(A+B)=\cos 90^\circ=0$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos(90-A)-\sin A\sin(90^\circ-A)$

$=\cos A\sin A-\sin A\cos A=0$

$\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(5) A,B俱爲正銳角而A+B爲鈍角，則

$90^\circ-A$　$90^\circ-B$, $(90^\circ-A)+(90^\circ-B)$ 俱爲正銳角故

$\cos(A+B)=-\cos\{180^\circ-(A+B)\}=-\cos\{(90^\circ-A)+90^\circ-B)\}$

$=-\{\cos(90^\circ-A)\cos(90^\circ-B)-\sin(90^\circ-A)\sin(90^\circ-B)\}$

$=-\{\sin A\sin B-\cos A\cos B\}$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(6) A,B 爲任何正角，由前五者之理，則知A,B爲任何之銳角，(a) 式皆可成立，今設A,B中有一(如A)增至90°者，則得

$\cos\{(90^\circ+A)+B\}=\cos\{90^\circ+(A+B)\}=-\sin(A+B)=-\sin A\cos B$

$-\cos A\sin B=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B$

同樣，若B角增至90°，或A,B同時均增至90°，(a)依然成立，由此類推，則知A,B無論增90。之若干整數倍，(a)式未有不能成立者。

(7)A,B中之一，或俱爲負角。設A,B中之一(如A)爲負角，則加以360°適當之倍量，其和$n\times360^\circ+A$爲正，則

$\cos(A+B)=\cos(n\times360^\circ+A+B)$

$=\cos(n\times360^\circ+A)\cos B-\sin(n\times369^\circ+A)\sin B$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

同理B爲負角，或A,B,俱爲負角，此式亦能成立。總觀以上七證，則知(a)式無往而不成立。

解(b) 不論A,B之大小正負如何，(a)式無往而不成立，前已證之，由是則得

$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$

$\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$

$$=\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B+\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B.$$

(b) 式之證明，亦可一如前法，茲爲免重複起見，故不逐次證明。

II. 九月十二日覆試各省選送學生試題.

1. 千二十碼之競走，甲許乙先發5碼，乙許丙先發八碼則無勝負；若於880碼之競走，問甲許丙先發50碼，尙勝若干碼？

(解) 甲速：乙速＝220：215＝44：43

乙速：丙速＝220：209＝20：19

∴甲速：丙速＝44×20：43×19＝880：817

故880碼競走，甲當勝丙880—817＝63碼.

880—817—50＝13碼，卽甲讓丙先發50碼當所勝之數.

2. 試化下式爲簡式

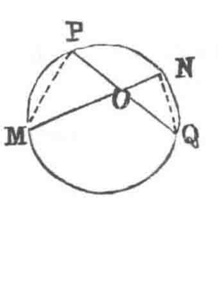
$$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{4x}{1+x^2}+\dfrac{8x}{1-x^4}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{4x^2}{1+x^4}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$$

(解)原式$=\dfrac{\dfrac{4x}{1-x^2}+\dfrac{4x}{1+x^2}+\dfrac{8x}{1-x^4}}{\dfrac{4x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^{4}}{1+x^4}}$

$$=\frac{\dfrac{2}{1-x^4}+\dfrac{2}{1-x^4}}{\dfrac{}{1-x^4}+\dfrac{}{1+x^4}}$$

$$=\frac{2(1+x^4)}{}$$

3. 設兩弦於圓內相交，其兩線分之積，彼此相等；試證明之。



設兩弦MN及PQ相交於O。

求證　OM×ON＝OQ×OP。

證　連結MP及NQ。

∠NQP＝∠PMN，∠MNQ＝∠MPQ.

△NOQ及POM相似

∴OQ：OM＝ON：OP;

即　　$OM \times ON = OQ \times OP.$

4.　設　$2\mathrm{Sin}A = \mathrm{Cos}A$，求SinA及CosA之值

（解）　$2\mathrm{Sin}A = \sqrt{1-\mathrm{Sin}^2A}$

平方之　$4\mathrm{Sin}^2A = 1-\mathrm{Sin}^2A$

$5\mathrm{Sin}^2A = 1$

$\mathrm{Sin}A = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\mathrm{Cos}A = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

II.　十月六日二次複試各省區選送學生試題

1.　甲乙丙三人其，年齡甲乙之和爲46，乙丙之和爲40，甲丙之和爲22，問三人各年幾何，

（解）

$(46+40-22)\div 2 = 32$　乙之年齡

$(46+22-40)\div 2 = 14$　甲之年齡

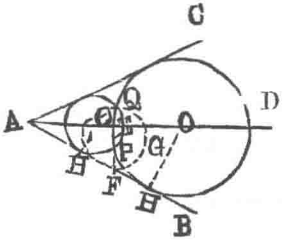
$(40+22-46)\div 2 = 8$　丙之年齡

2.　欲使方程式$2x^2+8x+m=O$之二根相等，則m之值如何？

（解）　$X = \frac{-8\pm\sqrt{8^2-8m}}{4}$

故欲使方程式之二根相等，必須$8^2-8m=O$，即$m=8$，

3.　求作一圓，過一已知點，且與兩已知直線相切.



設AB及AC爲兩已知直線，P爲已知之點，求作圓過此已知點，且與此兩已知直線相切.

構圖.　作直線AD平分∠BAC，由P點作直線PQ垂直AD，與AB及AD相交於F及E，且令PE＝QE，次以FQ爲直徑畫圓，再由P作PQ之垂線，交此圓周於G，連結FG，於AB直線上截取FH令等於FG，由H作AB之垂直線交AD於O及O′兩點，以O及O′爲圓心，以

OH及O′H爲半徑作圓，卽爲所求之圓．

證因　　$FP\times FQ=\overline{FG}^2$

而　　$FH=FG$，

$\therefore\ FP\times FQ=\overline{FH}^2$

故以O及O′爲圓心，以OH及O′H爲半徑所作之圓，必過P點而與AB相切（溫德華幾何第 167 頁）但AD爲∠BAC之平分線，故圓亦必與AC相切．（溫氏幾何第47頁）

討論　若AB平行與AC，或P點在AB，AC上，亦可用上法求得．

4.　試證次之恒等式

$$\frac{\mathrm{Cosec}A-\mathrm{Sec}A}{\mathrm{Cot}A+\mathrm{Tan}A}=\frac{\mathrm{Cot}A-\mathrm{Tan}A}{\mathrm{Cosec}A+\mathrm{Sec}A}$$

(解)因$\mathrm{Cosec}^2A-\mathrm{Sec}^2A=(1+\mathrm{Cot}^2A)-(1+\mathrm{Tan}^2A)=\mathrm{Cot}^2A-\mathrm{Tan}^2A$

i.e. $(\mathrm{Cosec}A+\mathrm{Sec}A)(\mathrm{Cosec}A-\mathrm{Sec}A)=(\mathrm{Cot}A+\mathrm{Tan}A)(\mathrm{Cot}A-\mathrm{Tan}A)$

$$\frac{\mathrm{Cosec}A-\mathrm{Sec}A}{\mathrm{Cot}A+\mathrm{Tan}A}=\frac{\mathrm{Cot}A-\mathrm{Tan}A}{\mathrm{Cosec}A+\mathrm{Sec}A}.$$

民　國　九　年

1.　八月本京招生試題

1.　今有一火車，於上午10點鐘離甲城，下午1點15分到乙城；又有一火車，于上午六點15分離乙城，上午11點30分到甲城，問二車在何時相遇．

(答)兩車相遇時間爲10點$18\frac{19}{32}$分

2.　試解$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$ ……………………………(1)

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}$ ……………………………(2)

(解)(1)式平方　$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{9}{4}$ ……………………………(3)

(3)—(2)得　　$\frac{2}{xy}=1$ ……………………………(4)

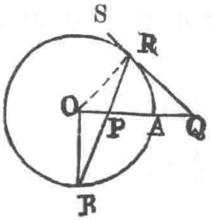
(2)—(4)得　$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}$

開方得 $\frac{1}{}-\frac{1}{y}=\pm\frac{1}{2}$ ……………………………(5)

由(1)+(5)得 $x=1$ 或 $x=2$

由(1)—(5)得 $y=2$ 或 $y=1$

3. 設O爲圓心,OA及OB爲互相垂直之兩半徑，P爲OA上一點，R爲PB之延長線與圓周之交點,Q爲由R所作之切線與OA之延長線相交之點;則△PQR爲二等邊三角形.



證 連結OR,則$\angle PRS=\angle PRO+\angle SRO$,

$\angle RPO=\angle=\angle BOP+\angle PBO$.

但 $OR=BO$ $\therefore\angle PBO=\angle PRO$.

又 $OR\perp QS$ $\therefore\angle SRO=Rt\angle$.

而 $\angle BOP=Rt.\angle$,$\therefore\angle SRO=\angle BOP$.

$\therefore\angle PRS=\angle RPO$.

$\therefore\angle QRP=\angle QPR$.

$\therefore$ $PQ=RQ$.

故知 △PQR爲二等邊三角形.

4. 設$\sin\theta=m$, 則$\tan\theta$之式如何?

(解)$\tan\theta=\frac{\sin 8}{\cos 8}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

II. 九月複試各省選送學生試題

1. 某甲買得某種物品,費銀二十五元,若此物品每斤之價減少百分之十，則可多買十斤.問每斤原價?

(解)原來物價之百分之十爲$25\times\frac{10}{100}=2.5$元. 故每斤之價爲 $2.5\frac{1}{10}=25$元.

今現價乃原價之$\frac{90}{100}$ $\frac{9}{10}$故每斤原價爲 $125\div\frac{9}{10}=278$元.

2. 試解 $\frac{x+1}{x-5}+\frac{x+2}{x-1}=-3$

(解) $\frac{x^2-1+x^2-3x-10+3x^2-18x+15}{x^2-6x+5}=0$

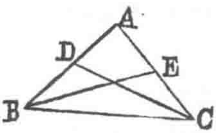
$\frac{5x^2-21x+4}{x^2-6x+5}=0$

$$5x^2-21x+4=0$$

$$(5x-1)(x-4)=0$$

$$x=\frac{1}{5}\quad 或\quad x=4$$

2. 等腰三角形內,設取兩腰之中點D及E,各以直線連於對頂C及B,則DC與BE相等;試證之.



設ABC爲等腰三角形,D及E爲兩等腰AB及AC之中點,

求證　　$DC=BE$

證　在$\triangle DBC$及$\triangle BCE$內,BC爲公用之邊.

又　$AB=AC$, $\therefore \frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC$; 卽 $BD=CE$

且　$\angle DBC=\angle ECB$.

$\therefore \triangle DBC=\triangle BCE$.

$\therefore DC=BE$.

3. 試證　$\mathrm{Sec}A-\mathrm{Cos}A=\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Tan}A$.

(證)　$\mathrm{Sec}A-\mathrm{Cos}A=\frac{1}{\mathrm{Cos}A}-\mathrm{Cos}A=\frac{1-\mathrm{Cos}^2A}{\mathrm{Cos}A}=\frac{\mathrm{Sin}^2A}{\mathrm{Cos}A}=\mathrm{Sin}A\,\frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cos}A}$

$=\mathrm{Sin}A\,\mathrm{tan}A$

民　國　十　年

1. 九月十一日　本京招生題

1. 銀500元分配於甲乙丙人甲所得與乙所得之比爲6:5.若甲乙各用去80元則其所餘之和恰等於丙所得之數,向三人各得若干?

(解)　甲乙二人各用去80元後尙餘　$500-160=340$元,此爲丙所得文與甲乙二人用餘之和,故丙所得元數爲$\frac{1}{2}\times 340=170$元

甲乙二人之和爲　$500-170=330$.

依配分比例可知甲所得　$330\times\frac{6}{11}=180$元.

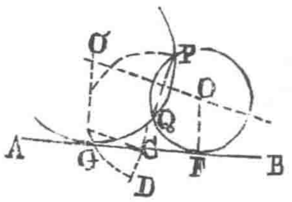
乙所得爲　$330\times\frac{5}{11}=150$元

2. 求解 $\frac{2+x}{1-x}+\frac{3+x}{2-x}+2=0$.

(解) $\frac{(2+x)(2-x)+(1-x)(3+x)+2(1-x)(2-x)}{(1-x)(2-x)}=0$;

$\frac{-8x+11}{(1-x)(2-x)}=0$ 　　　　$\therefore x=\frac{11}{8}$.

3. 求過二已知之點，作一平圓，與已知之一直線相切.



設P及Q為二已知之點，AB為已知之直線.

求作一圓過此二已知點且與AB直線相切.

作圖．連結PQ並引長之遇AB於C．於此引長線上取QC＝DC．以DP為直徑作圓，再作CE⊥DP．截取CF及CG等於CE，並於其上作垂線與PQ之垂直平分線OO′相交於O及O′．以O及O′為圓心，以OF及O′G為半徑所作之圓，即為所求之圓.

證．因O及O′距P,Q等遠故所作之圓必通過P及Q.

又　　DC : CE＝CE : PC,

而　　CE＝CG＝CF , DC＝QC,

QC : CF＝CF : PC , QC : CG＝CG : PC.

故 CF切O圓於F,CG切O′圓於G.

討論 此題可分數種不同之情形，茲述之於下:

(1) 若連結P及Q之直線，適與AB相垂直，則可用上法作圓.

注意 在此情形或以前證明之情形中，CF之長，可另用他法求得．即以PC為直徑畫圓，由Q作PC之垂直線，交圓周於一點．聯C與此交點之直線，即為所求之CF之長．蓋以此直線恰為QC及PC之比例中項也.

(2) 若連結P及Q之直線，適與AB相平行．則上法即不適用，不得不另覓他法，聯結P,Q，再作PQ之垂直線交已知線於一點．聯結此點與P,Q二點必圍成一三角形．作此三形角之外接圓可也.