Wei Ji Fen Ji Qi
Ying Yong Dao Xue

微积分及其应用导学

（上册）

主　编　徐苏焦　潘　军
副主编　冉素真　贵竹青

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

微积分及其应用导学

（上册）

主　编　徐苏焦　潘　军
副主编　冉素真　贵竹青

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用导学. 上册 / 徐苏焦, 潘军主编.
—杭州：浙江大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-308-17308-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①徐… ②潘… Ⅲ.①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 201720 号

微积分及其应用导学(上册)

主　编　徐苏焦　潘　军
副主编　冉素真　贵竹青

责任编辑　王元新
责任校对　王　波
封面设计　续设计
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　10
字　　数　225 千
版 印 次　2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-17308-7
定　　价　28.00 元

前　言

进入21世纪后，世界各国的高等教育界逐渐形成了一种新的认识，即培养大学生实践能力和创新能力是提高大学生社会职业素养和就业竞争力的重要途径."应用型本科"是对新型的本科教育和新层次的高职教育相结合的教育模式的探索，是新一轮高等教育发展的历史性选择.应用型本科需要以应用型为办学定位，其发展同时也需要其他各方面协同发展，这当然也包括应用型本科教材这个相当重要的环节.

"微积分"作为应用型本科院校各相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程，不仅肩负着为其他后继课程提供强大的运算工具和逻辑基础的职能，还主要承担着培养学生的逻辑推理、抽象思维、分析和解决问题能力的重任，在高素质应用型人才的培养过程中具有不可替代的作用.目前，国内面向本科生的微积分教材种类繁多，但专门面向应用型本科院校的微积分教材为数尚少.事实上，许多应用型本科院校仍在使用国内流行的普通高校的微积分教材，这也为我们加快应用型本科配套教材的建设提供了天然的动力.本书正是在为了适应新形势发展，夯实应用型本科院校课程教学质量与改革工程的背景下编写的.

浙江海洋大学东海科学技术学院十分重视微积分教材的编写工作，对教材的编写提出了"厚基础、宽应用、分层次"的指导性要求，2014年开始组织潘军、徐苏焦、冉素真、贵竹青等教师编写《微积分及其应用教程》和《微积分及其应用导学》，这两本教材在学院内试用一年后，现由浙江大学出版社正式出版.

这两本教材的主要特点是以为经济社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才服务为宗旨，内容设计注重强化知识基础、降低理论难度、体现分层次教学优化模式、面向学科应用的特点.内容体系设计有弹性，它将微积分相对直观的核心内容安排在本科第一学年进行学习，而将难度相对较大、相对较复杂的选学部分(打"*"的内容)放在本科第二学年，通过开展"通识选修课"的形式让学生选学.实践证明，这种分层次教学改革比较适合应用型本科院校的学生求学特点，师生反映良好.

《微积分及其应用导学》分上、下两册，本书为上册，主要内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程初步.全书由徐苏焦、潘军主编，冉素真、贵竹青等教师参与了部分编写工作.

借本书出版之机，向关心与支持本书的广大师生与读者表示衷心的感谢！由于水平有限，书中不妥或者错误之处在所难免，恳请广大专家、师生和读者批评指正.

编　者

2017年5月于舟山

目　录

第1章 一元函数、极限与连续

数学科学呈现出一个最辉煌的例子，表明不用借实验，纯粹的推理能成功地扩大人们的认知领域。

——德国哲学家　康德

数学是创造性的艺术，因为数学家创造了美好的新概念；数学是创造性的艺术，因为数学家的生活、言行如同艺术家一样；数学是创造性的艺术，因为数学家就是这样认为的。

——美国数学家　哈尔莫斯

学习导引

在现实世界中，一切事物都在一定的空间里运动变化着. 17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海等问题)的研究中引出了函数概念，从此以后函数概念几乎在所有的科学研究中占据了中心位置. 极限思想的产生源于求某些实际问题的精确解，例如，数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术；古希腊人用来求某些不规则几何图形的面积和体积的方法——穷竭法，都蕴含了深刻的极限思想，而极限思想的进一步发展与微积分的建立紧密相连，因此微积分中的许多概念都与极限有关. 连续函数不仅是微积分的研究对象，而且微积分中的主要概念、定理与法则往往要求函数具有连续性.

进一步掌握函数的基本内容，了解各种极限的严格定义，熟练准确地运用极限运算法则与重要极限公式计算各类极限，求函数的间断点并判断其类型以及闭区间上连续函数性质的简单应用将是本章学习的基本目标.

1.1 函　数

1.1.1 关于函数特性的几点说明

1. 关于函数的奇偶性

对于函数的奇偶性，在微积分及其应用教程 1.1 中给出了它们的几何意义：在平面直角坐标系中，偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，奇函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称. 现证明如下：

设点 $P(x,f(x))$ 是偶函数 $y=f(x)$ 的图像上任意一点，由于 $f(-x)=f(x)$，因此点 $P(x,f(x))$ 关于 y 轴的对称点为 $P'(-x,f(x))$，即 $P'(-x,f(-x))$，所以 P' 在 $y=f(x)$ 的图像上，即偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(见图 1-1). 同理可以证明奇函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称(见图 1-2).

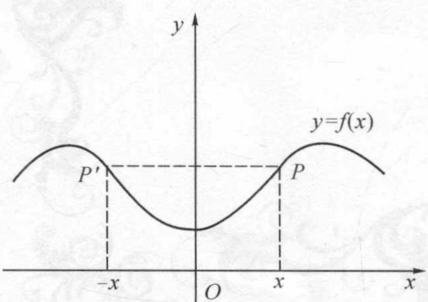

图 1-1

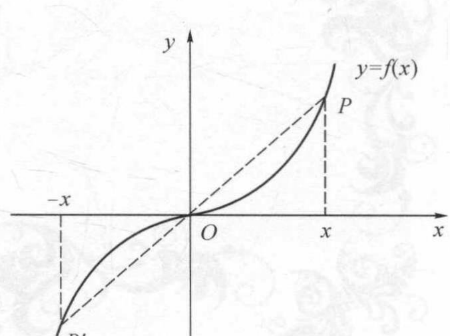

图 1-2

2. 关于函数的单调性

在中学数学中,我们主要是利用函数单调性的定义去判断函数的单调性,这就需要我们有较强的不等式变形能力,要求的技巧性较强. 在今后的学习中,我们将利用微分中值定理给出判断函数单调性的简单方法,而这个简单的方法从几何上看,就是关于单调函数图像的如下事实:

已知函数 $y=f(x)$在区间 I 上的任意一点都存在切线的斜率,如果这些切线的斜率都大于(小于)零,则函数 $y=f(x)$在区间 I 上严格单调增加(减少).

读者可以通过作函数 $y=f(x)$的图像加以验证.

3. 关于函数的周期性

在微积分及其应用教程 1.1 中我们指出,若 l 为 f 的一个周期,则 $nl(n\in\mathbf{Z},n\neq0)$也是 f 的一个周期,这是因为:

$$f(x+nl)=f[x+(n-1)l+l]=f[x+(n-1)l]=\cdots=f(x+l)=f(x).$$

因此,周期函数的一切周期所组成的数集一定是一个无上、下界的无穷数集. 按照周期函数的定义,x 和 $x+nl$ 都在 $f(x)$的定义域内,所以周期函数的定义域也一定是一个无上、下界的无穷数集. 但是,周期函数的定义域不一定就是 $\mathbf{R}$,例如周期函数 $y=\tan x$ 的定义域为$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

有些周期函数的最小正周期是不存在的,例如常值函数 $f(x)=C$(C 为常数)是周期函数,任何一个非零实数都是它的周期,但由于不存在最小的正实数,因此它没有最小的周期.

4. 关于函数的有界性

关于函数 $y=f(x)$的有界性也可以如下定义:

设函数 $y=f(x)$是定义在 X 上的函数,若存在实数 M_1 和 M_2 使得对任意 $x\in X$,都有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,则称 $y=f(x)$为 X 上的**有界函数**. M_1 和 M_2 分别称为 $y=f(x)$的一个下(上)界.

容易证明,上述关于函数 $y=f(x)$有界性的定义与微积分及其应用教程 1.1 中的定义 1.4 是等价的.

事实上,由$|f(x)|\leqslant M$ 可得$-M\leqslant f(x)\leqslant M$,若取 $M_1=-M,M_2=M$,则上述不等式即为 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$;反之,在 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$ 中,若令 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则可得$-M\leqslant f(x)\leqslant M$,即$|f(x)|\leqslant M$.

显然,有界函数的上界和下界都不是唯一的;函数在某数集上有界的充要条件是它在该数集上既有上界又有下界.

1.1.2 关于幂函数某些性质的讨论

对于幂函数 $y=x^\mu$(μ 为常数),由于 μ 取值的不同,其图像与性质都有显著的不同,所以下面对 μ 的取值进行分类讨论.

(1)如果 $\mu=0$,此时幂函数为 $y=x^0$,根据零指数的意义,可得此时幂函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$\{1\}$.

(2)如果 μ 是正有理数,即 $\mu=\dfrac{p}{q}$(p,q 是互质的正整数).

①当 p,q 都为奇数时,幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域都为 $\mathbf{R}$,是奇函数;当 p 是偶数、q 是奇数时,幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域分别为 $\mathbf{R}$ 和$[0,+\infty)$,是偶函数.

②当 p 是奇数、q 是偶数时,幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域都为$[0,+\infty)$.

(3)如果 μ 是负有理数,即 $\mu=-\dfrac{p}{q}$(p,q 是互质的正整数).

③当 p,q 都为奇数时,幂函数 $y=x^{-\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域都为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,是奇函数;当 p 是偶数、q 是奇数时,幂函数 $y=x^{-\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域分别为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$和$(0,+\infty)$,是偶函数.

④p 是奇数,q 是偶数时,幂函数 $y=x^{-\frac{p}{q}}$ 的定义域和值域都为$(0,+\infty)$.

(4)如果 μ 是无理数,则 $x^\mu=\mathrm{e}^{\ln x^\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$,所以此时幂函数 $y=x^\mu$ 就定义为指数函数 $y=\mathrm{e}^u$ 和对数函数 $u=\mu\ln x$ 的复合函数,因此幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域和值域都为$(0,+\infty)$.

1.1.3 双曲函数的图像和性质

双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$的定义域和值域都为 $\mathbf{R}$,是奇函数,在 $\mathbf{R}$ 上严格单调增加;双曲余弦函数 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$的定义域和值域分别为 $\mathbf{R}$ 和$[1,+\infty)$(因为$\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\geqslant\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}=1$,且当 $x=0$ 时取等号),是偶函数;在$(-\infty,0]$上严格单调减少,在$[0,+\infty)$上严格单调增加;双曲正切函数 $y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$的定义域和值域分别为 $\mathbf{R}$ 和$(-1,1)$(因为由 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$可解得 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$,于是$\dfrac{1+y}{1-y}>0\Leftrightarrow-1<y<1$),是奇函数,在 $\mathbf{R}$ 上严格单调增加.它们的函数图像依次如图 1-3 和图 1-4 所示.

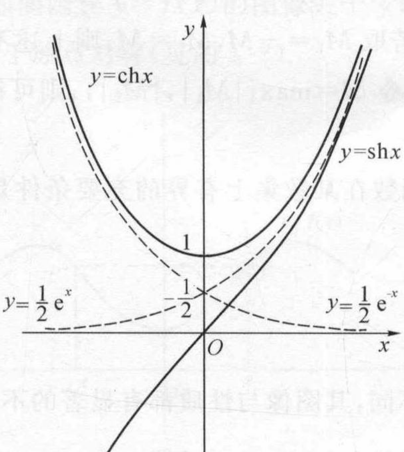

图 1-3

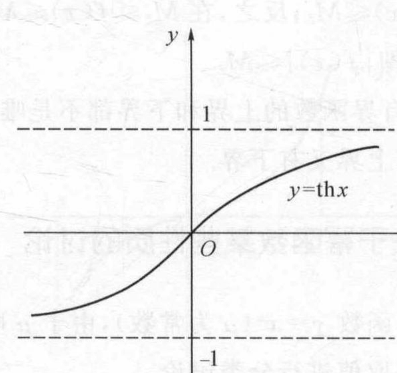

图 1-4

1.1.4　与函数内容相关的几个典型例题

为了更好地理解和掌握函数的相关内容，我们再举几个典型的例题，作为对微积分及其应用教程的补充.

例 1.1　证明函数 $f(x)=x\cos x$ 在其定义域内无界.

证明　已知函数的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意给定的 $M>0$，一定存在 $k\in\mathbf{Z}^+$，使得 $k>\frac{M}{2\pi}$，即存在 $x=2k\pi\in\mathbf{R}$，使得

$$f(x)=f(2k\pi)=2k\pi\cos 2k\pi=2k\pi>M,$$

所以已知函数在其定义域内无界.

例 1.2　求函数 $y=\sin x$ 的单调区间，并在每个单调区间内求它的反函数.

解　函数在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

当 $x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 时，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$y=\sin x=-\sin(-x)=-\sin(2k\pi-x)\Rightarrow\sin(2k\pi-x)=-y,$$

所以

$$2k\pi-x=\arcsin(-y)=-\arcsin y\Rightarrow x=2k\pi+\arcsin y,$$

因此所求反函数为

$$y=2k\pi+\arcsin x(k\in\mathbf{Z}).$$

当 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi+\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$y=\sin x=\sin(\pi-x)=\sin(2k\pi+\pi-x),$$

所以

$$2k\pi+\pi-x=\arcsin y\Rightarrow x=2k\pi+\pi-\arcsin y,$$

因此所求反函数为

$$y=2k\pi+\pi-\arcsin x(k\in\mathbf{Z}).$$

例 1.3　将函数 $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$ 写成分段函数的形式，并判断它是否具有奇偶性和周期性.

解　当 $\sin x>0$ 时，即当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=1$；当 $\sin x<0$ 时，即当 $x\in(2k\pi-\pi,2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=-1$；当 $\sin x=0$ 时，即当 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=0$. 因此

$$y=\begin{cases}1, & x\in(2k\pi,2k\pi+\pi),\\ 0, & x=k\pi,\\ -1, & x\in(2k\pi-\pi,2k\pi),\end{cases}\qquad(k\in\mathbf{Z}).$$

作出此函数的图像(见图 1-5)。由函数图像可知,函数 $y=\mathrm{sgn}(\sin x)$ 是奇函数,且是周期为 2π 的周期函数.

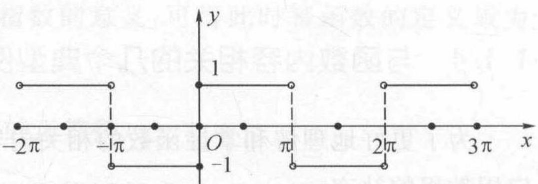

图 1-5

常规训练 1.1

1. 选择题

(1) 函数 $y=\dfrac{\arcsin x}{\ln(x+1)}$ 的定义域为(　　).

A. $[-1,1]$　　　　B. $[-1,0)\cup(0,1]$

C. $(-1,1]$　　　　D. $(-1,0)\cup(0,1]$

(2) 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ 与 $g(x)=\sqrt{-x+1}\cdot\sqrt{-x-1}$ 表示同一个函数,则自变量 x 的取值范围是(　　).

A. $[-1,1]$　　　　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　　　D. $[1,+\infty)$

(3) 下列说法错误的是(　　).

A. 函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在其定义域内是有界函数

B. 取整函数 $y=[x]$($[x]$表示不超过 x 的最大整数)是周期函数

C. 已知 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,则函数 $y=f(x)-f(-x)$ 是奇函数

D. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称

2. 填空题

(1) 已知 $f(x+2)=x^2+6x$,则 $f(x)=$________.

(2) 已知 $x\leqslant 0$,则函数 $y=x^2$ 的反函数是________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-2))=$________.

3. 解答题

(1) 求下列函数的定义域:

①$y=\dfrac{1}{\sin x}$;　　　　②$y=\dfrac{\arccos(x-2)}{\sqrt{x^2-1}}$.

(2) 求下列函数的反函数：

①$y=-\ln(x+1)$；　　　　　　②$y=\cos x(\pi\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

(3)设置中间变量，将下列函数分解成简单函数的复合：

①$y=\arcsin(\cos \mathrm{e}^{x})$；　　　　　　②$y=\sqrt{\ln\cos(1-x^{2})}$.

(4) 证明下列函数在其定义域内是有界函数：

①$y=\operatorname{arccot} x$；　　　　②$y=\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}$.

(5)作出函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^{2}}, & |x|\leqslant 1,\\ x^{2}-1, & x|>1\end{cases}$ 的图像，并利用图像研究此函数的奇偶性、单调性和有界性.

常规训练 1.1 详解

1.2　数列极限的概念和性质

1.2.1　数列极限严格定义的几何意义

利用邻域的概念，数列极限的定义还可以叙述为：

$$\lim_{n\to\infty}x_{n}=a\Leftrightarrow\forall U(a,\varepsilon)，\exists N\in\mathbf{Z}^{+}，当 n>N 时，总有 x_{n}\in U(a,\varepsilon).$$

即从数列$\{x_n\}$的第 N 项以后的所有项 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 全部落在邻域 $U(a,\varepsilon)$内，或者说数列$\{x_n\}$在邻域 $U(a,\varepsilon)$外的点最多只有 N 个，如图 1-6 所示.

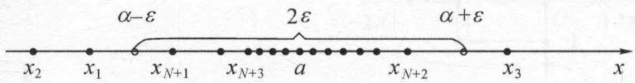

图 1-6

1.2.2 数列与子数列的收敛性关系

任取数列$\{x_n\}$中的无穷多项按原有顺序所构成的新数列称为数列$\{x_n\}$的子数列，简称子列. 如果在数列$\{x_n\}$中依次取 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，便得到数列$\{x_n\}$的一个子数列：

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots,$$

子数列简记为$\{x_{n_k}\}$，这里 x_{n_k} 是原数列的第 n_k 项，是子数列的第 k 项，由子数列的定义可知，$n_k \geqslant k$，且一个数列的子数列有无限多个. 从数列与它子数列的收敛性关系，有下列结论：

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是它的任一子数列都收敛，且有相同的极限.

由于$\{x_n\}$本身也是一个子数列，所以条件的充分性是显然的，下面证明必然性.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子数列. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{Z}^+$，当 $n > N$ 时，都有$|x_n - a| < \varepsilon$，取 $K = N$，则当 $k > K$，由于 $n_k > n_K > K = N$，所以，都有$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$，所以$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

1.2.3 用数列极限的严格定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

在微积分及其应用教程 1.1 中，我们给出了数列极限的严格定义，它并不能用来求数列的极限，但可以论证数列$\{x_n\}$的极限为 a，称为 $\varepsilon - N$ 论证法，其证明的一般步骤为：

第一步，任意给定 $\varepsilon > 0$；

第二步，由$|x_n - a| < \varepsilon$ 进行分析倒推，推出 $n > n(\varepsilon)$；

第三步，取 $N = [n(\varepsilon)]$，再用 $\varepsilon - N$ 语言顺述结论.

在上述步骤中，最关键的是第二步，当要论证的极限结论比较简单时，可以通过直接解$|x_n - a| < \varepsilon$得到 $n > n(\varepsilon)$. 在多数情形中，不等式$|x_n - a| < \varepsilon$ 的求解比较困难. 由于极限定义中的 N 并不唯一，并且只强调 N 的存在性，因此可将$|x_n - a|$适当地放大为 $g(n)$，当 $n > N$ 时，能够使 $g(n) < \varepsilon$ 成立，也即能够使$|x_n - a| < \varepsilon$ 成立. 这样就可以通过解 $g(n) < \varepsilon$ 得到 $n > n(\varepsilon)$.

例 1.4 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$，因$\left|\dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2\right| = \dfrac{3}{n^2 + 1} < \dfrac{3}{n}$，所以要使$\left|\dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2\right| < \varepsilon$，只要$\dfrac{3}{n} < \varepsilon$，解

得 $n>\frac{3}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{2n^2-1}{n^2+1}-2\right|<\varepsilon$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+1}=2$.

例 1.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$，则 $\alpha_n\geqslant 0$，且当 $n\geqslant 2$ 时，利用二项式定理得

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

从而有 $0\leqslant\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$，因此 $\forall\,\varepsilon>0$，从 $|\sqrt[n]{n}-1|=\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$，所以可取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$，则当 $n>N$，总有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注 此例将 $|\sqrt[n]{n}-1|$ 放大为 $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ 时，n 满足 $n\geqslant 2$，因此 N 的取值应为 $N=\max\left\{2,\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$.

1.2.4 用数列极限的四则运算法则求极限

利用数列极限的四则运算法则，结合某些特殊数列的极限公式，例如，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($|q|<1$ 的常数)，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$($k>0$ 的常数)等，可以求出较为复杂的数列的极限.

例 1.6 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}\right]$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(n+1)^2}-\frac{n}{3}\right]$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}(2)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(n+1)^2}-\frac{n}{3}\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)^2}-\frac{n}{3}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)-2n(n+1)}{6(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{6(n+1)}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

1.2.5 用数列极限的夹逼定理求极限

我们在微积分及其应用教程 1.2 中给出了如下的数列极限夹逼定理：